

01  
© 1992 г.**ДВУМЕРНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ СКАЛЯРНОЙ ДИФРАКЦИИ  
В СИСТЕМАХ НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ЭКРАНОВ***А. С. Зильберглейт, И. Н. Златина, И. Б. Суслова*

Предложен метод решения задач нестационарного рассеяния скалярных волн системой непересекающихся полубесконечных экранов, основанный на новых специальных представлениях решения — сингулярных потенциалах.

**Введение**

подавляющее большинство исследованных к настоящему времени задач со смешанными граничными условиями содержат две независимые переменные [1–5]. Особенно мало исследованы начально-краевые проблемы этого типа с тремя переменными (время плюс две пространственные координаты).

В данной работе развивается способ решения одного класса нестационарных задач для волнового уравнения с двумя пространственными переменными, основанный на специально конструируемых представлениях решения, получивших название сингулярных потенциалов. Метод позволяет, в частности, находить явно асимптотику решения на “малых” временах, т. е. описывать переходный процесс. Последний, как правило, представляет главный интерес для приложений, поскольку при типичных способах возбуждения на больших временах устанавливается стационарный или квазистационарный режим, который можно определить независимо.

Сингулярные потенциалы краевых задач для уравнения Гельмгольца в неограниченных областях были предложены впервые Н. Н. Лебедевым и И. П. Скальской в работе [6], дальнейшее развитие теории и ее новые приложения содержатся в [7–10]. Сингулярные потенциалы уравнения Лапласа для ограниченных областей с разрезами введены и изучены в [11–13].

**1. Нестационарное рассеяние плоской волны на полуплоскости.  
Сингулярные потенциалы**

Пусть линия  $y = 0$ ,  $0 < x < \infty$  в плоскости  $\{x, y\}$  занята идеальным экраном, на край которого в момент  $t = 0$  падает бегущая со скоростью  $c > 0$  вдоль оси  $ox$  волна  $f(t - x/c)$ , где  $f(\xi)$  — заданная функция,  $f(\xi) \equiv 0$  при  $\xi < 0$ . Считая, что процесс описывается волновым уравнением и на экране выполняется граничное условие Дирихле, приходим к следующей задаче:

$$u(x, y, t) = u_{\text{пад}}\left(t - \frac{x}{c}\right) - v(x, y, t) \equiv f\left(t - \frac{x}{c}\right) - v(x, y, t), \quad (1.1)$$

$$\frac{d^2 v}{d x^2} + \frac{d^2 v}{d y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 v}{d t^2} = 0, \quad (1.2)$$

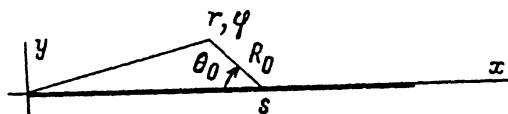


Рис. 1.

$$v|_{t=0} = \frac{dv}{dt}|_{t=0} = 0, \quad (1.3)$$

$$v|_{\substack{y=0 \\ x>0}} = f\left(t - \frac{x}{c}\right), \quad t > 0, \quad (1.4)$$

причем разыскивается решение с конечной энергией. Это решение хорошо известно [14, 15] и может быть найдено различными способами; получим его методом сингулярного потенциала, построив таковой по ходу дела.

Переходя к преобразованию Лапласа  $\bar{v}(x, y, p)$  с учетом (1.3), имеем

$$\Delta \bar{v} - \frac{p^2}{c^2} \bar{v} = 0, \quad (1.5)$$

$$\bar{v}|_{\varphi=0} = e^{-\frac{px}{c}} \mathcal{F}(p), \quad (1.6)$$

где  $\{r, \varphi\}$  — полярные координаты и

$$\mathcal{F}(p) = \int_0^{\infty} e^{-p\xi} f(\xi) d\xi. \quad (1.7)$$

Задача (1.5), (1.6) заменой  $p$  на  $i\omega$  сводится к соответствующей задаче об установившихся колебаниях частоты  $\omega$ , т. е. к предмету работ [7—9]. Это подсказывает вид соответствующего потенциала, точнее, его лапласовского изображения, а именно решение (1.5), (1.6) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \bar{v}(x, y, p) = \bar{v}(r, \varphi, p) &= \sqrt{\frac{p}{c}} \int_0^{\infty} \bar{\mu}(s, p) K_{1/2}\left(\frac{pR_0}{c}\right) \cos \frac{\theta_0}{2} ds = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \bar{\mu}(s, p) \frac{e^{-\frac{pR_0}{c}}}{\sqrt{R}} \cos \frac{\theta_0}{2} ds. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь  $K_{1/2}(\xi)$  — функция Макдональда;  $\bar{\mu}(s, p)$  — искомая неизвестная функция;  $\{R_0, \theta_0\}$  — полярные координаты с началом в точке  $r = s, \varphi = 0$  (рис. 1), так что

$$\begin{aligned} R_0 &= R(r, \varphi; s, 0) = \sqrt{r^2 + s^2 - 2rs \cos \varphi}, \\ \theta_0 &= \theta(r, \varphi; s, 0); \quad \cos \theta_0 = \frac{s - r \cos \varphi}{R_0}, \\ \sin \theta_0 &= \frac{r \sin \varphi}{R_0}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Переходя в (1.8) к оригиналам в предположении, что  $\bar{\mu}(s, p)$  является изображением по Лапласу от некоторой кусочно-непрерывной функции  $\mu(s, t)$ ,<sup>1</sup> с помощью теоремы запаздывания и теоремы о свертке нетрудно получить выражение самого сингулярного потенциала

$$U(r, \varphi, t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \mu\left(s, t - \frac{R_0}{c}\right) H\left(t - \frac{R_0}{c}\right) \frac{\cos \frac{\theta_0}{2}}{\sqrt{R_0}} ds, \quad (1.10)$$

в котором  $H(\xi)$  — единичная функция Хевисайда.

Под знаком интеграла (1.8) стоит частное решение уравнения (1.5), стремящееся к нулю на бесконечности при  $\text{Re} p > 0$ . Поэтому при надлежащей сходимости интеграла (1.8) уравнение (1.5) удовлетворяется, а граничное условие (1.6) приводит к соотношению

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_r^{\infty} \bar{\mu}(s, p) \frac{e^{-\frac{p}{c}(s-r)}}{\sqrt{s-r}} ds = e^{-\frac{pr}{c}} \mathcal{J}(p), \quad r > 0. \quad (1.11)$$

Из (1.11) с помощью формулы обращения Абеля определяется  $\bar{\mu}(s, p)$

$$\bar{\mu}(s, p) = -\frac{ps}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{ds} \int_s^{\infty} \frac{\mathcal{J}(p) e^{-\frac{2pr}{c}}}{\sqrt{r-s}} dr = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{p}{c}} e^{-\frac{ps}{c}} \mathcal{J}(p). \quad (1.12)$$

Можно убедиться, что найденное решение совпадает с известным. Например, если падающая волна представляет собой ступеньку  $f(\xi) = H(\xi)$ , то по формулам (1.7), (1.8), (1.12) последовательно находим

$$\mathcal{J}(p) = \frac{1}{p}, \quad \bar{\mu}(s, p) = \frac{2}{\pi} e^{-\frac{ps}{c}} \frac{1}{\sqrt{cp}},$$

$$\bar{u}(x, y, p) = \frac{e^{-\frac{px}{c}}}{p} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{p(r-x)}{c}}\right)$$

и, обращая последнее с помощью известной формулы [16, с. 266] и теоремы о свертке, приходим к результату (ср. [16, с. 255])

$$u(x, y, t) = \frac{2}{\pi} H\left(t - \frac{r}{c}\right) \arcsin \sqrt{\frac{ct-r}{ct-x}}.$$

Смысл приведенных выкладок заключается в получении сингулярного потенциала (1.10) и демонстрации корректности его определения. Ясно, что если препятствие расположено вдоль луча  $\varphi = \alpha$ ,  $r > a \geq 0$ , то вместо (1.8), (1.10) следует записывать сингулярный потенциал так:

$$U(r, \varphi; a, \alpha; p) = \sqrt{\frac{p}{c}} \int_0^{\infty} \bar{\mu}(s; p) K_{\frac{1}{2}}\left(\frac{pR}{c}\right) \cos \frac{\theta}{2} ds, \quad (1.13)$$

<sup>1</sup>Чтобы это допущение было верным, в (1.8) введен множитель  $\sqrt{p/c}$ .

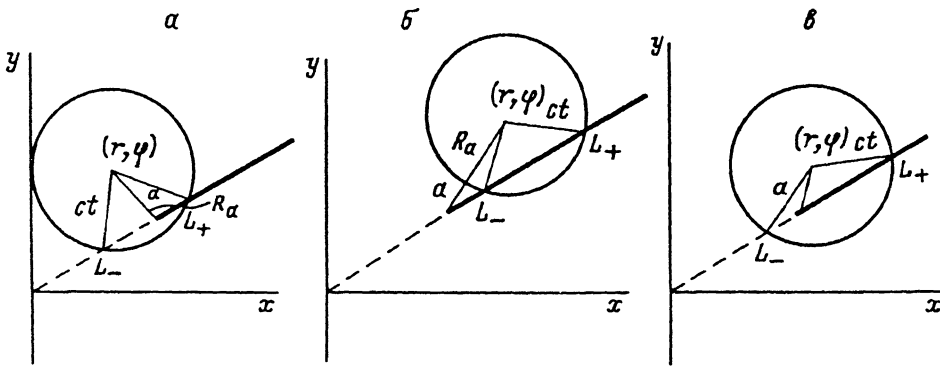


Рис. 2.

$$R = R(r, \varphi; s, \alpha) = \sqrt{r^2 + s^2 - 2rs \cos(\varphi - \alpha)},$$

$$\theta = \theta(r, \varphi; s, \alpha),$$

$$U(r, \varphi; a, \alpha; t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \mu\left(s, t - \frac{R}{c}\right) H\left(t - \frac{R}{c}\right) \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{R}} ds. \quad (1.14)$$

Нетрудно также установить (ср. с [8, 9]), что если на луче  $\varphi = \alpha$ ,  $r > a$  задается граничное условие Неймана, то в соответствующем сингулярном потенциале косинус замещается синусом

$$\bar{V}(r, \varphi; a, \alpha; p) = \sqrt{\frac{p}{c}} \int_a^{\infty} \bar{v}(s, p) K_{\nu/2} \left( \frac{pR}{c} \right) \sin \frac{\theta}{2} ds, \quad (1.15)$$

$$V(r, \varphi; a, \alpha; t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_a^{\infty} v\left(s, t - \frac{R}{c}\right) H\left(t - \frac{R}{c}\right) \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{R}} ds, \quad (1.16)$$

причем  $v(s, t)$  — произвольная функция;  $\bar{v}(s, p)$  — ее лапласовский образ.

Заметим, что интегрирование по  $s$  в (1.14), (1.16) на самом деле всегда осуществляется по конечному интервалу — той части луча  $\varphi = \alpha$ ,  $a < r < \infty$ , которая попадает в область влияния произвольной точки наблюдения  $\{r, \varphi\}$ , т. е. в круг радиуса  $ct$  с центром в этой точке. Обозначая через  $L_{\pm}(r, \varphi - \alpha; t)$  координаты точек пересечения окружности радиуса  $ct$  с центром в  $\{r, \varphi\}$  прямой, содержащей указанный луч, имеем

$$L_{\pm}(r, \varphi - \alpha, t) = r \cos(\varphi - \alpha) \pm \sqrt{(ct)^2 - r^2 \sin^2(\varphi - \alpha)},$$

$$ct \geq r |\sin(\varphi - \alpha)|.$$

Нетрудно видеть, что в зависимости от взаимного расположения точки наблюдения и луча, а также от значения  $t$  получаются три варианта записи, скажем потенциала  $U$ , соответствующие случаям а, б, в на рис. 2,

$$U(r, \varphi; a, \alpha; t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} H\left(t - \frac{R_a}{c}\right) \int_a^{L_+} \mu\left(s, t - \frac{R}{c}\right) \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{R}} ds,$$

$$r \cos(\varphi - \alpha) \leq a, \quad R_a = R(r, \varphi; a, \alpha),$$

$$U(r, \varphi; a, \alpha; t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} H\left(t - \frac{r |\sin(\varphi - \alpha)|}{c}\right) \int_{L_-}^{L_+} \mu\left(s, t - \frac{R}{c}\right) \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{R}} ds,$$

$$r \cos(\varphi - \alpha) \geq a, \quad ct \leq R_a,$$

$$U(r, \varphi; a, \alpha; t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} H\left(t - \frac{r |\sin(\varphi - \alpha)|}{c}\right) \int_a^{L_+} \mu\left(s, t - \frac{R}{c}\right) \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{R}} ds,$$

$$r \cos(\varphi - \alpha) \geq a, \quad ct \geq R_a,$$

Это можно представить и единой формулой вида

$$U(r, \varphi; a, \alpha; t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} H\left(t - \frac{d}{c}\right) \int_{\max\{a, L_-(r, \varphi - \alpha, t)\}}^{L_+(r, \varphi - \alpha, t)} \mu\left(s, t - \frac{R}{c}\right) \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{R}} ds,$$

где

$$d(r, \varphi; a, \alpha) = \text{dist}\{(r, \varphi); \Gamma\} = \begin{cases} R_a, & r \cos(\varphi - \alpha) - a \leq 0, \\ r |\sin(\varphi - \alpha)|, & r \cos(\varphi - \alpha) - a > 0 \end{cases}$$

— расстояние от точки  $\{r, \varphi\}$  до луча  $\varphi = \alpha$ ,  $a < r < \infty$ .

Аналогичные выражения справедливы и для  $U$ .

Сингулярные потенциалы (1.14), (1.16) и их лапласовские образы (1.13), (1.15) удовлетворяют ряду важных соотношений на особом луче  $\varphi = \alpha$ ,  $r > a$ , которые выводятся точно так же, как и в стационарном случае [9]. Приведем основные из этих равенств, записанных для  $\bar{U}$ ,  $\bar{V}$  (если требуется, к оригиналу легко перейти)

$$\bar{U}|_{\varphi = \alpha} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_r^{\infty} \bar{\mu}(s, p) \frac{e^{-\frac{p}{c}(s-r)}}{\sqrt{s-r}} ds,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi = \alpha \pm 0} = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{\bar{\mu}(a, p) e^{-\frac{p}{c}(r-a)}}{\sqrt{r-a}} + \int_a^r \left[ \frac{\partial \bar{\mu}(s, p)}{\partial s} + \frac{p}{c} \bar{\mu}(s, p) \right] \frac{e^{-\frac{p}{c}(r-s)}}{\sqrt{s-r}} ds \right\},$$

$$\bar{V}|_{\varphi = \alpha \pm 0} = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_a^r \bar{v} \frac{e^{-\frac{p}{c}(r-s)}}{\sqrt{r-s}} ds,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi = \alpha} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_a^{\infty} \frac{d}{ds} \left[ \bar{v} e^{-\frac{p}{c}s} \right] \frac{p_r}{\sqrt{s-r}} ds. \quad (1.17)$$

Полезно еще привести асимптотические формулы, описывающие поведение  $\bar{U}$  и  $\bar{V}$  в окрестности вершины  $r = a$ ,  $\varphi = \alpha$  луча  $a < r < \infty$ ,  $\varphi = \alpha$ ,  $(\rho, \psi)$  — локальные полярные координаты,  $\rho = R(r, \varphi, a, \alpha)$ ,  $\psi = \theta(r, \varphi; a, \alpha)$  (см.(1.13))

$$\begin{aligned} \bar{U} &= Q + \sqrt{\frac{\pi}{2p}} \bar{\mu}(p, a) \sqrt{\rho} \cos \frac{\psi}{2} + O(\rho), \quad \rho \rightarrow 0, \\ \bar{V} &= \sqrt{\frac{\pi}{2p}} \bar{v}(p, a) \sqrt{\rho} \sin \frac{\psi}{2} + O(\rho), \quad \rho \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$Q = Q(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_a^{\infty} \frac{\bar{\mu}(s, p) e^{-\frac{p}{c}(s-a)}}{\sqrt{s-a}} ds.$$

Асимптотические формулы (1.18) показывают, что условие Майкснера для  $\bar{U}$  и  $\bar{V}$  выполняется; эти выражения можно дифференцировать по  $\rho$  и  $\psi$ .

Приведенной здесь информации о построенных сингулярных потенциалах достаточно для того, чтобы использовать их при решении различных начально-краевых задач для волнового уравнения.

## 2. Начально-краевая задача для системы произвольного числа радиально расположенных полуплоскостей

Пусть теперь в плоскости переменных  $\{x, y\}$  зафиксировано  $N = N_1 + N_2$  лучей  $\Gamma_n^{(1),(2)}$

$$\begin{aligned} \Gamma_n^{(1)} &= \{(r, \varphi) : \varphi = \alpha_n, a_n < r < \infty\}, \quad n = 1, 2, \dots, N_1, \\ \Gamma_n^{(2)} &= \{(r, \varphi) : \varphi = \beta_n, b_n < r < \infty\}, \quad n = 1, 2, \dots, N_2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В области

$$\Omega_N = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \bigcup_{n=1}^{N_1} \Gamma_n^{(1)} \cup \bigcup_{n=1}^{N_2} \Gamma_n^{(2)} \right\}$$

рассмотрим следующую начально-краевую задачу относительно функции  $v = v(x, y, t)$

$$\Delta v - \frac{1}{c^2} v_{tt} = 0, \quad (2.2)$$

$$v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 0, \quad (2.3)$$

$$v|_{\Gamma_n^{(2)}} = F_n(r, t), \quad n = 1, 2, \dots, N_1, \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \Big|_{\Gamma_n^{(2)}} = G_n(r, t), \quad n = 1, 2, \dots, N_2. \quad (2.5)$$

К этому сводятся соответствующие нестационарные задачи акустики ( $u$  — акустическое давление,  $\Gamma_n^{(1)}$  — мягкие,  $\Gamma_n^{(2)}$  — жесткие экраны), рассеяния и излучения объемных упругих волн сдвига ( $u - z$  — компонента вектора перемещений,  $\Gamma_n^{(1)}$  — жесткие включения,  $\Gamma_n^{(2)}$  — открытые трещины), электродинамики ( $u$  — подходящая компонента поля,  $\Gamma_n^{(1),(2)}$  — идеально проводящие экраны и либо  $N_1=0$ , либо  $N_2=0$ ).

В соответствии со сказанным в предыдущем разделе, решение задачи (2.2)–(2.5) естественно искать в виде суперпозиции сингулярных потенциалов, описывающих вклад каждого из препятствий (см. (1.14), (1.16), (1.11))

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{N_1} U_n(r, \varphi, t) + \sum_{n=1}^{N_2} V_n(r, \varphi, t),$$

$$U_n(r, \varphi, t) = U(r, \varphi; a_n, \alpha_n; t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{a_n}^{\infty} \mu_n\left(s, t - \frac{R_n^{(1)}}{c}\right) H\left(t - \frac{R_n^{(1)}}{c}\right) \frac{\cos \frac{\theta_n^{(1)}}{2}}{\sqrt{R_n^{(1)}}} ds,$$

$$V_n(r, \varphi, t) = V(r, \varphi; b_n, \beta_n; t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{b_n}^{\infty} \nu\left(s, t - \frac{R_n^{(2)}}{c}\right) H\left(t - \frac{R_n^{(2)}}{c}\right) \frac{\sin \frac{\theta_n^{(2)}}{2}}{\sqrt{R_n^{(2)}}} ds,$$

$$R_n^{(1)}(r, \varphi, s) = R(r, \varphi; s, \alpha_n); \Theta_n^{(1)}(r, \varphi, s) = \Theta(r, \varphi; s, \alpha_n),$$

$$R_n^{(2)}(r, \varphi, s) = R(r, \varphi; s, \beta_n); \Theta_n^{(2)}(r, \varphi, s) = \Theta(r, \varphi; s, \beta_n), \quad (2.6)$$

причем  $\mu_n(s, t)$ ,  $\nu_n(s, t)$  — искомые непрерывные по  $s$  и кусочно-непрерывные по  $t$  функции, допускающие преобразование Лапласа по переменной  $t$ .

Первое из выражений (2.6) формально удовлетворяет уравнению (2.2) и начальным условиям (2.3). Граничные условия (2.4), (2.5) удобнее записать не для оригиналов, а для лапласовских образов (предполагается, что  $F_n(r, p)$  и  $\bar{G}_n(r, p)$  существуют):

$$\bar{u} \Big|_{\Gamma_n^{(1)}} = \bar{F}_n(r, \varphi), \quad n = 1, 2, \dots, N_1, \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} \Big|_{\Gamma_n^{(2)}} = \bar{G}_n(r, p), \quad n = 1, 2, \dots, N_2. \quad (2.8)$$

Подставляя взятое из (2.6) выражение  $\bar{u}$  сначала в (2.7) при  $n = m$ , а затем в (2.8) при  $n = m$  и принимая во внимание формулы (1.17) и тот факт, что  $\bar{U}_m(\bar{V}_m)$  регулярен на лучах  $\Gamma_{n, n \neq m}^{(1)}$ ,  $\Gamma_n^{(2)}$  (соответственно  $\Gamma_{n, n \neq m}^{(2)}$  и  $\Gamma_n^{(1)}$ ), приходим к соотношениям:

$$-\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_r^{\infty} \frac{\bar{\mu}_m(s, p)}{\sqrt{s-r}} e^{-\frac{p(s-r)}{c}} ds = -\bar{F}_m(r, p) +$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{N_1} \bar{U}_n \Big|_{\Gamma_m^{(1)}} + \sum_{n=1}^{N_2} \bar{V}_n \Big|_{\Gamma_m^{(1)}}, \quad m = 1, 2, \dots, N_1, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_r^\infty \frac{d}{ds} \left[ \bar{v}_m(s, p) e^{-\frac{p}{c}s} \right] \frac{e^{\frac{p}{c}r}}{\sqrt{s-r}} ds = \bar{G}_m(r, p) + \\ & + \sum_{n=1}^{N_1} \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{U}_n}{\partial \varphi} \Big|_{\Gamma_m^{(2)}} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{N_2} \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}_n}{\partial \varphi} \Big|_{\Gamma_m^{(2)}}, \quad m = 1, 2, \dots, N_1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Теперь следует обратить стоящие слева интегралы Абеля, изменить надлежащим образом порядок операций в правых частях и вычислить возникающие интегралы. Детали этих выкладок можно фактически найти в работах [7–9], необходимые интегралы вычислены в [9] (см. Приложения к этим работам, где обозначено  $p/c = \lambda$ ). Результатом является следующая система интегральных уравнений второго рода относительно  $\bar{\mu}_n(s, p)$  и  $\bar{v}(s, p)$ , рассматриваемых как функции переменной  $s$  ( $p$  входит сюда как параметр)

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_m(\xi, p) &= \bar{f}_m(\xi, p) + \frac{p}{c\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{N_1} \sin \frac{|\alpha_m - \alpha_n|}{2} \times \\ & \times \int_{a_n}^\infty \bar{\mu}_n(s, p) A_+ \left( \frac{p}{c} R_{m,n}^{(1)}, \frac{p}{c} (s + \xi) \right) ds + \\ & + \frac{p}{c\pi} \sum_{n=1}^{N_2} \cos \frac{\alpha_m - \beta_n}{2} \int_{b_n}^\infty \bar{v}(s, p) A_- \left( \frac{p}{c} R_{m,n}, \frac{p}{c} (s - \xi) \right) ds, \\ & a_m \leq \xi < \infty, \quad m = 1, 2, \dots, N_1, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_m(\xi, p) &= \bar{g}_m(\xi, p) - \frac{p}{c\pi} \sum_{n=1}^{N_1} \cos \frac{|\beta_m - \alpha_n|}{2} \times \\ & \times \int_{a_n}^\infty \bar{\mu}_n(s, p) A_+ \left( \frac{p}{c} R_{mn}, \frac{p}{c} (s - \xi) \right) ds - \\ & - \frac{p}{c\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{N_2} \sin \frac{|\beta_m - \beta_n|}{2} \int_{a_n}^\infty \bar{v}_n(s, p) A_- \left( \frac{p}{c} R_{mn}^{(2)}, \frac{p}{c} (s + \xi) \right) ds, \end{aligned}$$



$$b_m \leq \xi < \infty, \quad m = 1, 2, \dots, N_2, \quad (2.12)$$

$$\bar{f}_m(\xi, p) = -\frac{pe\xi}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{d\xi} \int_{\xi}^{\infty} \frac{\bar{F}_m(r, p) e^{-\frac{pr}{c}}}{\sqrt{r-\xi}} dr, \quad (2.13)$$

$$\bar{g}_m(\xi, p) = -\frac{e^{-\frac{p\xi}{c}}}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\xi}^{\infty} \frac{\bar{G}_m(r, p) e^{-\frac{pr}{c}}}{\sqrt{r-\xi}} dr, \quad (2.14)$$

$$A_{\pm}(z, w) = K_0(z) \pm \frac{w}{z} K_1(z),$$

$$R_{mn}^{(1)} = R(\xi, \alpha_m; s, \alpha_n), \quad R_{mn}^{(2)} = R(\xi, \beta_m; s, \beta_n), \quad R_{mn} = R(\xi, \alpha_n; s, \beta_n). \quad (2.15)$$

Используя известные формулы обращения [16, с.277]

$$K_0(\gamma p) \div \frac{H(t-\gamma)}{\sqrt{t^2-\gamma^2}}; \quad K_1(\gamma p) \div \frac{tH(t-\gamma)}{\gamma\sqrt{t^2-\gamma^2}},$$

можно перейти в (2.11) к оригиналам, что дает, например, для  $\mu_n(s, t)$  интегро-дифференциальное по  $t$  уравнение второго рода

$$\begin{aligned} \int_0^t \mu_m(\xi, \tau) d\tau &= \int_0^t f_m(\xi, \tau) d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{N_1} \sin \frac{|\alpha_m - \alpha_n|}{2} H\left(t - \frac{R_{mn}^{(1)}}{c}\right) \times \\ &\times \int_{a_n}^{L_+(\xi, \alpha_m - \alpha_n, t) t - \frac{R_{mn}^{(1)}}{c}} ds \int_0^{\frac{\mu_n(s, \tau) d\tau}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R_{mn}^{(1)2}}} \left[1 + \frac{(s+\xi)c(t-\tau)}{R_{mn}^{(1)2}}\right] + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{N_2} \cos \frac{\alpha_m - \beta_n}{2} H\left(ct - \frac{R_{mn}}{c}\right) \int_{b_n}^{L_+(\xi, \alpha_m - \alpha_n, t)} ds \times \\ &\times \int_0^{\frac{R_{mn}}{c} t - \frac{R_{mn}}{c}} \frac{\nu_n(s, \tau) d\tau}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R_{mn}^2}} \left[1 - \frac{(s-\xi)c(t-\tau)}{R_{mn}^2}\right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Системы (2.11), (2.12) или (2.16), (2.17) определяют в принципе искомые функции  $\mu_n(s, t)$ ,  $\nu_n(s, t)$ , доставляя тем самым решение задачи. Подчеркнем в связи с этим два обстоятельства. Во-первых, многие из представляющих интерес

для приложений величины выражаются непосредственно через  $\mu_n$  и  $\nu_n$ , минуя вычисление всего решения  $u(x, y, t)$  по формулам (2.6). Во-вторых, зачастую удается получить явные асимптотические разложения для  $\mu_n$  и  $\nu_n$  на “малых” временах, т.е. эффективно описать наиболее интересную часть переходного процесса. Указанные асимптотики удобнее всего извлекать из (2.11), (2.12) в виде разложений  $\bar{\mu}_n(s, p)$ ,  $\bar{\nu}_n(s, p)$  для “больших” значений  $p$  (ср. с [9, §4]). Все это естественно показать на примере какой-нибудь конкретной задачи.

### 3. Переходный процесс при рассеянии плоской волны на двух полуплоскостях, расположенных под углом друг к другу

Пусть плоская волна  $f[t - (x - a \cos \alpha)/c]$ ,  $f(\xi) = 0$ ,  $\xi < 0$  падает в момент  $t = 0$  на края двух симметрично расположенных относительно оси  $ox$  экранов  $\Gamma_{\pm}\{r, \varphi\}$ :  $\varphi = \pm \alpha$ ,  $a < r < \infty$ , на которых выполняются граничные условия первого рода. Представляя, как и в (1.1), полное поле  $u(x, y, t)$  в форме

$$u(x, y, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) - u(x, y, t),$$

приходим к задаче (2.2)–(2.5), в которой

$$\begin{aligned} N = N_1 = 2, \quad N_2 = 0; \quad \Gamma_1^{(1)} = \Gamma_+, \quad \Gamma_2^{(1)} = \Gamma_-, \quad a_1 = a_2 = a, \\ \alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = -\alpha, \quad F_1(r, t) = F_2(r, t) = f\left(t - \frac{(r-a)\cos\alpha}{a}\right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ввиду полной симметрии в представлении (2.6)

$$\mu_1(s, t) = \mu_2(s, t) = \mu(s, t), \quad (3.2)$$

тогда система (2.11), (2.12) сводится ввиду (2.13)–(2.15) к одному интегральному уравнению относительно  $\bar{\mu}(s, p)$

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(\xi, p) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2p(1 + \cos\alpha)}{c}} e^{-\frac{p}{c}(\xi - a)\cos\alpha} \mathcal{F}(p) + \\ + \frac{p}{\pi c} \sin\alpha \int_a^{\infty} \bar{\mu}(s, p) \left[ K_0\left(\frac{p}{c}R\right) + \frac{\xi + s}{p} K_1\left(\frac{p}{c}R\right) \right] ds, \\ a \leq s < \infty, \quad R = R(\xi, \alpha; s, -\alpha) = \sqrt{s^2 + \xi^2 - 2s\xi\cos 2\alpha}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Построим асимптотическое решение этого уравнения, считая  $p$  “большим” параметром. При  $\alpha > \pi/2$  соответствующий результат получается из (3.3) методом асимптотических итераций [9, §4] в виде

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(\xi, p) = \frac{2}{\pi} \mathcal{F}(p) \sqrt{\frac{p}{c}} \cos \frac{\alpha}{2} \left[ e^{-\frac{p}{c}(\xi - a)\cos\alpha} + \gamma_1 \sqrt{\frac{c}{p}} e^{-\frac{p}{c}R(\xi)} + \right. \\ \left. + \gamma_2 \frac{c}{p} e^{-\frac{p}{c}(R(\xi) + 2a\sin\alpha)} + O\left(\sqrt{\frac{c^3}{p^3}}\right) \right], \\ R(\xi) = \sqrt{\xi^2 + a^2 - 2a\xi\cos 2\alpha}, \end{aligned}$$

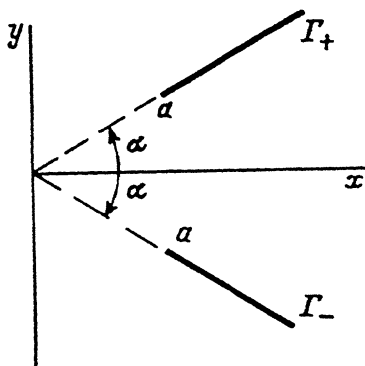


Рис.3.

$$\gamma_1 = \frac{\sin\alpha [R(\xi) + \xi + a]}{\sqrt{2\pi R(\xi)} [R(\xi)\cos\alpha + \xi - a\cos 2\alpha]},$$

$$\gamma_2 = \frac{1 + \sin\alpha}{2\pi(\cos\alpha + \sin\alpha)} \sqrt{\frac{\sin\alpha}{2aR(\xi)}} \frac{R(\xi) + \xi + a}{R(\xi)\sin\alpha + \xi - a\cos 2\alpha}. \quad (3.4)$$

Асимптотика функции  $\mu(s, t)$  при  $t \rightarrow 0$  получается обращением преобразования Лапласа. Асимптотическое выражение для поля при переходном процессе удобно искать при помощи формулы

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_a^{\infty} \bar{\mu}(s, p) \frac{e^{-\frac{pc}{\sqrt{R_1}}}}{\sqrt{R_1}} \cos \frac{\theta_1}{2} ds +$$

$$+ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_a^{\infty} \bar{\mu}(s, p) \frac{e^{-\frac{pc}{\sqrt{R_2}}}}{\sqrt{R_2}} \cos \frac{\theta_2}{2} ds = \bar{u}_1 + \bar{u}_2, \quad (3.5)$$

которая получается из (2.6) при  $N_1 = 2$ ,  $N_2 = 0$ ,  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $\alpha_2 = -\alpha$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ . Оценка интегралов, входящих в (3.5), осуществляется методом Лапласа при  $p \rightarrow \infty$ , что соответствует  $t \rightarrow 0$  при переходе к оригиналам. Очевидно, что эта оценка зависит от того, в какой части плоскости ищется выражение для поля (рис. 3). Например, для области, где  $r \cos\varphi > a \cos\alpha$  и  $|\varphi| < \alpha$ , имеем

$$\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$$

$$\bar{u}_1 = \bar{f}(p) \sqrt{\frac{c}{\pi p}} \cos \frac{\alpha}{2} \left\{ \frac{\sqrt{R_1(a) + a - r\cos(\alpha - \varphi)}}{R_1(a) \cos\alpha + a - r\cos(\alpha - \varphi)} e^{-\frac{pc}{\sqrt{R_1(a)}}} + \right.$$

$$+ \frac{R_1(s_0) \sin 2\alpha + s_0 r \sin(\alpha - \varphi) + \arccos 2a \sin(\alpha - \varphi)}{R_1(s_0) \sin 2\alpha \cos\alpha + s_0 r \sin(\alpha - \varphi) - \arccos 2a \sin(\alpha - \varphi)} \times$$

$$\times \frac{\sin\alpha}{\sqrt{r \sin(\alpha - \varphi)}} \sqrt{\frac{R_1(s_0) + s_0 - r\cos(\alpha - \varphi)}{r \sin(\alpha - \varphi) + \sin 2\alpha}} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{p}{c} R_1(s_0) \left[ 1 + \frac{a \sin 2\alpha}{r \sin(\alpha - \varphi)} \right] \right\} + O \left( \sqrt{\frac{c}{p}} \right),$$

$$s_0 = \frac{\operatorname{arsin}(3\alpha - \varphi)}{a \sin 2\alpha + r \sin(\alpha - \varphi)}; \bar{u}_2(r, \varphi; a, \alpha) = \bar{u}_1(r, \varphi; a, -\alpha). \quad (3.6)$$

Выражение для  $u$  может быть легко получено из (3.6) с помощью теоремы о свертке и теоремы запаздывания.

#### Список литературы

- [1] *Sneddon I. N.* Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory. Amsterdam; New York; Wiley: North-Holland Publ. Co, 1966.
- [2] *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 401 с.
- [3] *Sneddon I. N., Lowengrab M.* Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity. New York: John Wiley and Sons, 1969. 221 p.
- [4] Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493 с.
- [5] *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л. Наука, 1977. 220 с.
- [6] *Лебедев Н. Н., Скальская И. П.* // ЖТФ. 1977. Т. 47. Вып. 12. С. 2457—2463.
- [7] *Зильберглейт А. С., Златина И. Н.* // ЖТФ. 1979. Т. 49. Вып. 4. С. 706—713.
- [8] *Зильберглейт А. С., Златина И. Н.* // ЖТФ. 1980. Т. 50. Вып. 7. С. 14.
- [9] *Зильберглейт А. С., Златина И. Н.* Препринт ФТИ. № 645. Л., 1980. 50 с.
- [10] *Лебедев Н. Н., Скальская И. П.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 1. С. 3—11.
- [11] *Зильберглейт А. С., Сулова И. Б.* // ДАН СССР. 1983. Т. 271. № 2. С. 319—323.
- [12] *Зильберглейт А. С., Сулова И. Б., Никулин А. Е.* Препринт ФТИ. 805. Л., 1987. 44 с.
- [13] *Зильберглейт А. С., Сулова И. Б.* // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 140—143.
- [14] *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1964. 655 с.
- [15] *Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С.* Сборник задач по математической физике. М.: ГИТТЛ, 1955. 420 с.
- [16] *Бэйтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966.

Физико-технический институт  
им. А. Ф. Иоффе РАН  
С.-Петербург

Поступило в редакцию  
21 марта 1991 г.