

05

© 1991 г.

ПРОРАСТАНИЕ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ И ЭВОЛЮЦИЯ ЛИНИЙ ТОКА В МЕТАЛЛИЧЕСКОМ ПРОВОДНИКЕ ПРИ ВЫСОКОЙ ПЛОТНОСТИ ТОКА

Л. С. Герасимов, В. И. Икрянников

Рассмотрена задача о протекании тока в металлическом проводнике с начальной неоднородностью. Показано, что в результате взаимодействия электрических и тепловых полей происходят «прорастание» неоднородности поперек линий тока и эволюция линий тока, обтекающего эту неоднородность.

Введение

В последнее время проявляется значительный интерес к процессу протекания тока высокой плотности в реальном металлическом проводнике. Это объясняется тем, что все более широкое применение в технике и практике научного эксперимента находят такие установки и процессы, где плотность тока на несколько порядков превышает эту величину в традиционной электротехнике. При таких плотностях тока проявляется своеобразная неустойчивость металлического проводника: имеющиеся всегда в наличии неоднородности служат очагами повышенного тепловыделения, интенсивность которого столь велика, что не уравнивается за счет теплопроводности. В результате этого неоднородность растет, а линии тока претерпевают непрерывную эволюцию, обтекая растущую неоднородную зону. На принципиальную возможность этого явления указывалось в [1], расчет локальных перегревов произведен в [2, 3], но этот расчет относится к начальному моменту времени, а динамика процесса не рассматривалась. В работах [4, 5] проведено численное моделирование среды со случайными неоднородностями. Получено подтверждение того, что неоднородность (область пониженной проводимости) прорастает поперек линий тока. Достоинством этой работы является сложность модели, отвечающая действительности — наличие множества взаимодействующих неоднородностей. Однако с этим же связаны и два недостатка: сложность модели не позволила авторам ввести учет теплопроводности среды, что приводит к бесконечным перегревам при больших временах. Остался также невыясненным вопрос, приходит ли прорастающая неоднородность к стационарному состоянию и какова форма этой стационарной неоднородности.

В настоящей статье рассмотрена динамика роста одиночной неоднородности, электропроводность которой мало отличается от электропроводности среды.

Постановка задачи

Рассмотрим бесконечную металлическую среду (проводник), электропроводность σ которой изменяется с температурой T_c по закону

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + \alpha(T_c - T_0)}.$$

Форму неоднородного включения будем описывать некоторой функцией координат $\Omega(\mathbf{r})$, приняв $0 < \Omega(\mathbf{r}) \leq 1$. Поместим центр координат в центр

неоднородности так, что $\Omega(0)=1$, $\Omega(\infty)=0$. Тогда электропроводность может быть определена так:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{[1 + a\Omega(r)][1 + a(T_c - T_0)]}. \quad (1)$$

Остальные физические параметры — температуропроводность χ , плотность γ , теплоемкость c , температурный коэффициент сопротивления α будем считать постоянными. В (1) σ_0 — начальная электропроводность проводника на бесконечном удалении от центра, T_0 — начальная температура, a — параметр неоднородности, равный $(\sigma_0/\sigma - 1)$ при $T_c = T_0$, $r = 0$. На бесконечном удалении от неоднородности зададим направление плотности тока \mathbf{j} вдоль оси z и положим для простоты, что она постоянна во времени $|\mathbf{j}| = j_0$.

Тогда в условиях квазистационарного режима уравнения, описывающие распределение потенциала Φ и температуры T среды, в безразмерном виде будут

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi, \\ \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \delta_0 \frac{j^2}{\sigma}, \quad \sigma = \frac{1}{(1 + a\Omega)T}, \end{aligned}$$

где $T = 1 + a(T_c - T_0)$, а безразмерные величины r , t , \mathbf{E} , \mathbf{j} , σ , Φ выражены в единицах характерного размера неоднородности R , R^3/λ , j_0/σ_0 , j_0 , σ_0 , Rj_0/σ_0 соответственно. Параметр $\delta_0 = R^2 \alpha j_0^2 / (\chi \gamma c \sigma_0)$ дает отношение характерных скорости джоулевого тепловыделения в проводнике к скорости отвода тепла за счет теплопроводности.

Представленная система уравнений сводится к трем уравнениям с начальным условием

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{1}{\sigma} (\operatorname{grad} \Phi \cdot \operatorname{grad} \sigma), \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \delta_0 \sigma |\operatorname{grad} \Phi|^2, \quad (3)$$

$$\sigma = \frac{1}{(1 + a\Omega)T}, \quad (4)$$

$$T(r, t = 0) = 1. \quad (5)$$

Решение задачи в предельном режиме

Пусть параметр неоднородности $|a| \ll 1$. Тогда решение системы уравнений (2)–(5) будем искать в виде асимптотического разложения по этому параметру

$$\Phi = e^{\delta_0 t} (-z + a\Phi_1 + O(a^2)), \quad (6)$$

$$T = e^{\delta_0 t} (1 + aT_1 + O(a^2)). \quad (7)$$

Функции Φ_1 и T_1 при $t \rightarrow \infty$ стремятся к своему стационарному значению, которое определяет предельную форму неоднородности, т. е. ту форму, к которой эволюционирует исходная неоднородность, описываемая функцией $\Omega(r)$.

Для нахождения стационарного распределения подставляем (6), (7) в (2)–(5). Пренебрегая членами второго порядка малости по a и отбрасывая $(\partial T_1 / \partial t)$, получим

$$\nabla^2 \Phi_1 = -\frac{\partial T_1}{\partial z} - \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \quad (8)$$

$$\nabla^2 T_1 = \delta_0 \left(2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + 2T_1 + \Omega \right), \quad (9)$$

$$T_1(r, t = 0) = 0. \quad (10)$$

В режиме высокой скорости джоулевого тепловыделения, когда $\delta \gg 1$, решение уравнений (8)–(10) находим методом погранфункций [6]. Выбирая цилиндрическую систему координат с осью z вдоль линий тока на бесконеч-

ности и задавая для определенности $\Omega(r)$ в виде $\Omega = \exp(-r^2 - z^2)$, выделяем главный член в разложении T_1 по параметру δ_0^{-1} (см. Приложение)

$$T_1 = \frac{1 - 2z^2}{4} e^{-z^2} E_i(-r^2) - \frac{e^{-r^2 - z^2}}{2} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^2 e^{-x^2/4} \cos zx K_0\left(\frac{x^2 r}{\sqrt{2\delta_0}}\right) dx, \quad (11)$$

где $E_i(-x)$ и $K_0(x)$ — интегральная показательная функция и модифицированная функция Бесселя 2-го рода [7].

Подставляя (10) в (6) и (3), находим значение электропроводности

$$\sigma \approx \frac{e^{-\delta_0 t}}{1 + a\rho_1}, \quad (12)$$

$$\rho_1 = \Omega(r) + T_1. \quad (13)$$

Обсуждения

На рис. 1 приведены линии равного удельного электрического сопротивления $\rho_1 = \text{const}$, построенные по формулам (11), (13) при $\delta_0 = 10^4$. Максимальное значение ρ_1 достигается в центре — при $r=0, z=0$. Из (11) получим

$$T_1 = \frac{\ln(8\delta_0) - 6 + G}{4},$$

где $G=0.5772$... — постоянная Эйлера.

Из (13), учитывая, что $\Omega(0)=1$,

$$\rho_1 = \frac{\ln(8\delta_0) - 2 + G}{4}.$$

Отсюда при $\delta_0 = 10^4$ $\rho_1 \approx 2.47$. По оси z значение ρ_1 уменьшается от максимального значения в центре до минимального $\rho_1 \approx -0.71$ при $z \approx 1.4$ и далее

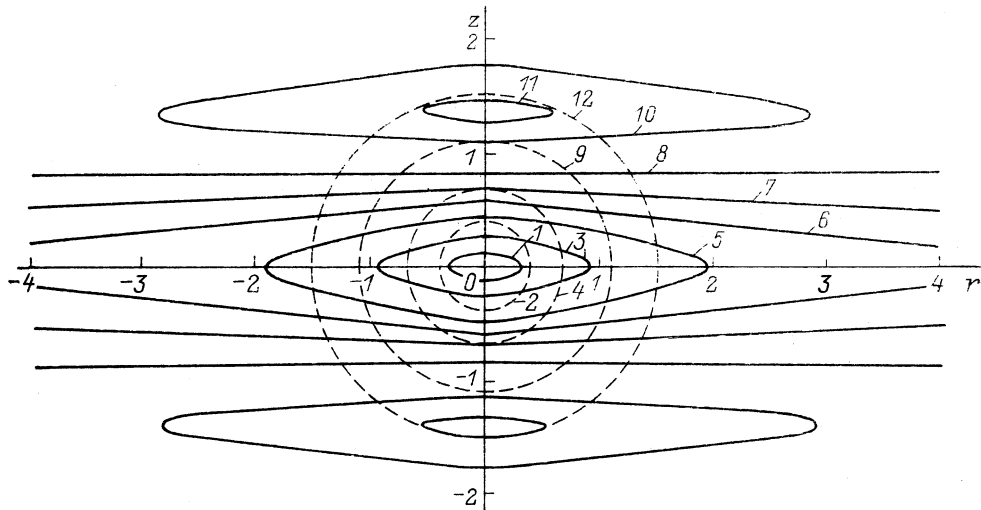


Рис. 1. Кривые равного удельного сопротивления $\rho_1 = \text{const}$.

Сплошные — в асимптотическом режиме, штриховые — в начальный момент времени; $\rho_1 = 2.4$ (1), 0.9 (2), 2.0 (3), 0.6 (4), 1.5 (5), 1.0 (6), 0.5 (7), 0 (8), 0.3 (9), -0.5 (10), -0.7 (11), 0.1 (12).

возрастает до нуля. По оси r величина ρ_1 монотонно уменьшается до нуля от центра к периферии. При $z=0$ интеграл в (11) выражается через разность полных эллиптических функций 1-го и 2-го родов, в результате чего находим при больших r

$$T_1 \approx \rho_1 \sim \left(\frac{\sqrt{\delta_0}}{r}\right)^{3/2}.$$

Таким образом, неоднородность, имевшая в начальный момент времени «сферическую» форму, со временем эволюционирует в вытянутую вдоль оси r структуру: неоднородность прорастает поперек линий тока.

На рис. 2 представлены изотермы $T_1 = \text{const}$, распределение которых в основном повторяет распределение ρ_1 , что является следствием (13). Отличие состоит в том, что максимум температуры T_1 приходится не на центр неоднородности, а на точку $r \approx 1.3$ ($z=0$). Минимум T_1 находится в точке $z \approx 1.3$ ($r=0$). Такое положение максимумов и минимумов температуры совпадает с тем, которое было найдено в [2, 3], если принять, что в нашем случае начальная неоднородность имеет форму сферы с эффективным радиусом $r \approx 1.3$.

Полные температура T и электропроводность σ определяются выражениями (7) и (12) и, очевидно, зависят от соотношения между электропроводностями

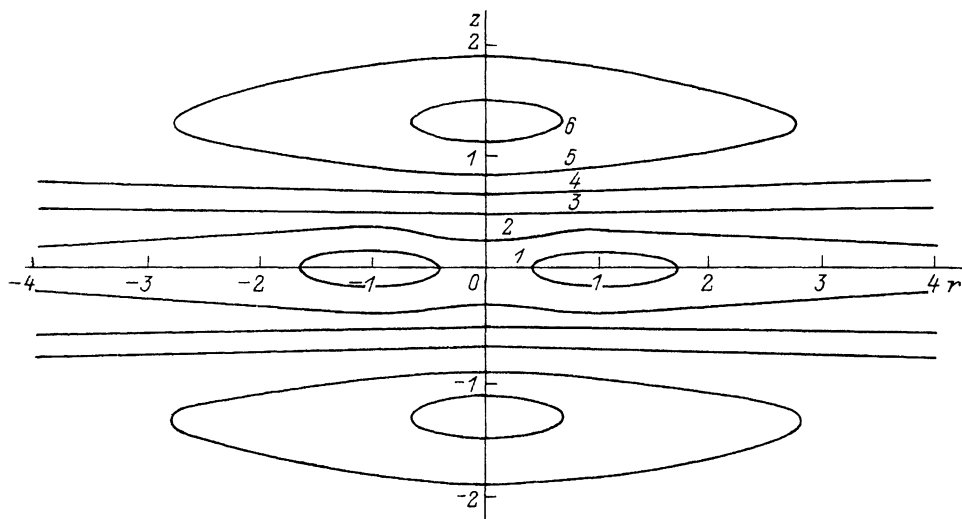


Рис. 2. Изотермы $T_1 = \text{const}$.

$T_1 = 1.5$ (1), 1.0 (2), 0.5 (3), 0 (4), -0.5 (5), -0.8 (6).

в центре неоднородности и на бесконечном удалении в начальный момент времени, т. е. от знака параметра a .

Качественные картины распределения T и σ по осям координат приведены на рис. 3.

Наличие экспоненциального множителя $\exp(\delta_0 t)$ в выражениях для T и σ приводит к тому, что даже малые возмущения электропроводности ($|a| \ll 1$) дают при больших временах немалые разности температуры и электропроводности в местах локализации неоднородности и на бесконечном удалении от нее. Иными словами, перегрев $\Delta T = T - T_\infty$, где $T_\infty = \exp(\delta_0 t)$ — температура на бесконечности, равен

$$\Delta T = e^{\delta_0 t} a T_1.$$

Отсюда время достижения заданного перегрева

$$t = \frac{1}{\delta_0} \ln \frac{\Delta T}{a T_1},$$

т. е. в основном определяется параметром δ_0 . Так, при $a = 0.1$, $T_1 \approx 1$ величина $\Delta T = 1000^\circ$ достигается за время $t \approx 8/\delta_0$.

В представленной здесь работе рассматривалось прорастание одиночной неоднородности. Некоторые качественные выводы можно сделать и для случая, когда в среде задано несколько неоднородных включений. Прежде всего заметим, что скорость роста неоднородностей определяется главным образом параметром δ_0 . Но $\delta_0 \sim R^2$, поэтому быстрее всего прорастают неоднородности с большим геометрическим размером R . Очевидно, неоднородности, располо-

женные по оси r , сливаются в одну. Неоднородности вдоль оси z остаются изолированными друг от друга, если расстояние между ними $\Delta z > 2$. При $1 < \Delta z < 2$ большая неоднородность экранирует меньшую так, что рост последней практически не наблюдается.

Эти качественные рассуждения, очевидно, требуют более точного количественного анализа поведения множества неоднородных включений в проводнике.

Для нахождения решения системы уравнений (8)–(10) методом погранфункций [7] представим функции Φ_1 и T_1 в виде

$$\Phi_1(r, z) = \Phi_{10}(r, z) + Q_0(\xi, z) + \frac{\Phi_{11}(r, z)}{\delta_0} + \frac{Q_1(\xi, z)}{\delta_{11}} + O(\delta_0^{-2}), \quad (\text{П1})$$

$$T_1(r, z) = T_{10}(r, z) + \Pi_0(\xi, z) + \frac{T_{11}(r, z)}{\delta_0} + \frac{\Pi_1(\xi, z)}{\delta_{11}} + O(\delta_0^{-2}), \quad (\text{П2})$$

где $\xi = r/\sqrt{\delta_0}$; $O(\delta_0^{-2})$ — символ, означающий порядок отброшенных членов ряда.

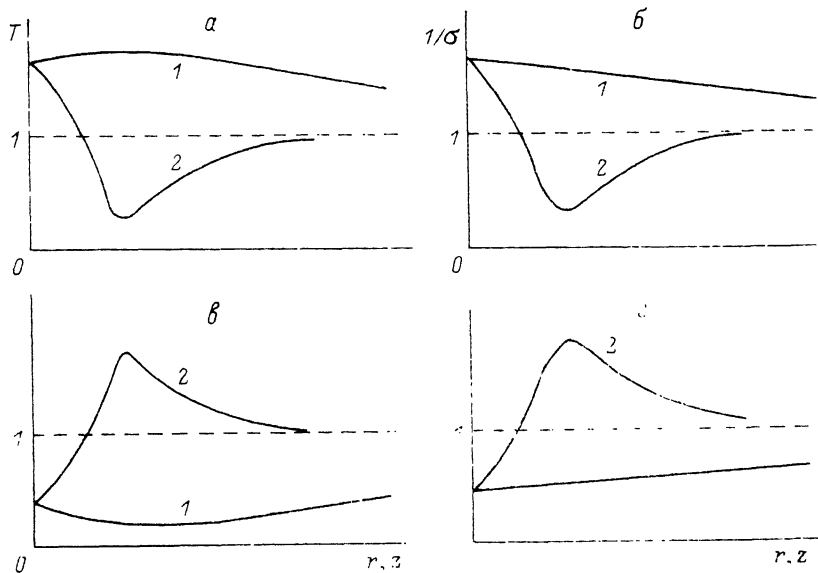


Рис. 3. Распределение температуры T и электропроводности $1/\sigma$ по осям r (1) и z (2) при $a > 0$ (а, б) и $a < 0$ (в, г).

Подставляя эти ряды в (8)–(10) и приравнивая члены с одинаковыми степенями δ_0 , получим уравнения

$$\nabla^2 \Phi_{10} + \nabla_z^2 Q_0 = -(\nabla_z T_{10} + \nabla_z \Pi_0 + \nabla_z \Omega), \quad (\text{П3})$$

$$\nabla_z \Phi_{10} + \nabla_z Q_0 + T_{10} + \Pi_0 + \Omega \cdot 0.5 = 0, \quad (\text{П4})$$

$$\nabla^2 \Phi_{11} + \nabla_z^2 Q_1 + \nabla_z^2 Q_0 = -(\nabla_z T_{11} + \nabla_z \Pi_1), \quad (\text{П5})$$

$$\nabla^2 T_{10} + \nabla_z^2 \Pi_0 = 2\nabla_z \Phi_{11} + 2\nabla_z Q_1 + 2T_{11} + 2\Pi_1, \quad (\text{П6})$$

где для краткости обозначены операторы

$$\nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \nabla_z^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\nabla_\xi^2 = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right), \quad \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}.$$

Так как по условию Q_0 , Q_1 , Π_0 , Π_1 не зависят от r , а Φ_{10} , Φ_{11} , T_{10} , T_{11} не зависят от ξ , то уравнения (П3)–(П6) расщепляются на

$$\nabla^2 \Phi_{10} = -\nabla_z T_{10} - \nabla_z \Omega, \quad (\text{П7})$$

$$\nabla_z \Phi_{10} + T_{10} = -0.5 \cdot \Omega, \quad (\text{П8})$$

$$\nabla_z^2 Q_0 = -\nabla_z \Pi_0, \quad (\text{П9})$$

$$\nabla_z Q_0 + \Pi_0 = 0, \quad (\text{П10})$$

$$\nabla_z^2 Q_1 + \nabla_z \Pi_1 + \nabla_z^2 Q_0 = 0, \quad (\text{П11})$$

$$\nabla_z^2 \Pi_0 = 2\nabla_z Q_1 + 2\Pi_1 \quad (\text{П12})$$

и еще два уравнения для определения Φ_{11} и T_{11} .

Из уравнения (П7), (П8) находим

$$\Phi_{10} = -\frac{z}{4} e^{-z^2} E_i(-r^2) + f_{01}(z) \ln r + f_{02}(z), \quad (\text{П13})$$

$$T_{10} = \frac{1-2z^2}{4} e^{-z^2} E_i(-r^2) - \frac{e^{-r^2-z^2}}{2} - \frac{df_{01}}{dz} \ln r - \frac{df_{02}}{dz}, \quad (\text{П14})$$

где $E_i(-x)$ — интегральная показательная функция; $f_{01}(z)$, $f_{02}(z)$ — пока не определенные функции z .

Система уравнений (П9), (П10) вырождается в одно уравнение

$$\nabla_z Q_0 + \Pi_0 = 0. \quad (\text{П15})$$

Для однозначности определения Q_0 и Π_0 подставляем это уравнение в систему уравнений (П11), (П12), которая может теперь иметь решение, если

$$\nabla_z^2 Q_0 + \frac{1}{2} \nabla_z^3 \Pi_0 = 0. \quad (\text{П16})$$

Из системы уравнений (П15), (П16) при условии конечности решения на бесконечном удалении от центра определяем

$$Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz} q(x) K_0\left(\frac{x^2}{\sqrt{2}} \xi\right) dx, \quad (\text{П17})$$

$$\Pi_0 = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz} xq(x) K_0\left(\frac{x^2}{\sqrt{2}} \xi\right) dx, \quad (\text{П18})$$

где $K_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя 2-го рода, $q(x)$ — пока не определенная функция.

Полученные решения (П13), (П14), (П17), (П18) подставляем в (П1), (П2), отбрасываем слагаемые, пропорциональные δ_0^{-1} , и из условий конечности Φ_1 и T_1 в центре и обращения в нуль их на бесконечности находим функции $f_{01}(z)$, $f_{02}(z)$, $q(x)$. В результате получаем (11) для T_1 и аналогичное для Φ_1 .

Список литературы

- [1] Байков А. П., Герасимов Л. С., Искольдский А. М. // ЖТФ. 1975. Т. 15. Вып. 1. С. 49—55.
- [2] Заседко Л. Н., Назаров Л. Л., Резцов В. Ф. // ПМТФ. 1984. № 5. С. 3—7.
- [3] Шейхалиев Ш. М. // ТВТ. 1982. Т. 20. № 3. С. 598—601.
- [4] Helsing J., Axell J., Grimvall G. // Phys. Rev. B. 1989. Vol. 39. N 13. P. 9231—9235.
- [5] Söderberg M. // Phys. Rev. B. 1987. Vol. 35. N 1. P. 352—357.
- [6] Васильева А. Б., Бутузов В. М. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
- [7] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.

Новосибирский
электротехнический институт

Поступило в Редакцию
9 апреля 1990 г.
В окончательной редакции
8 июля 1991 г.