

01; 09

© 1991 г.

## КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК КАНАЛЬНЫХ ВОЛНОВОДОВ

Е. А. Божевольная, С. И. Божевольный

Для определения модовых характеристик канальных волноводов с произвольным профилем показателя преломления предложен комбинированный метод, использующий итерационный метод вычисления эффективного показателя преломления моды при ступенчатой аппроксимации профиля волновода. Показано, что метод обладает достаточно высокой точностью и быстродействием. Представлены результаты расчета характеристик канальных  $Ti : LiNbO_3$  волноводов в широком диапазоне нормированных параметров.

### Введение

Разработка и оптимизация интегрально-оптических устройств требует определения характеристик канальных волноводов при различных параметрах волноводных структур. Предложено большое число разнообразных методов расчета волноводных характеристик [1-4, 7-12], однако необходимость создания достаточно точного, по возможности универсального и быстрого метода по-прежнему существует. Причем последнее качество определяет пригодность метода для решения оптимизационных задач, где требуется многократное вычисление волноводных характеристик. Для широко используемых канальных  $Ti : LiNbO_3$  волноводов предложены быстрые квазианалитические методы расчета, основанные на аппроксимации профиля показателя преломления функциями, допускающими точное решение волнового уравнения [1, 2]. Однако точность этих методов определяется соответствием модельного профиля реальному профилю показателя преломления, что накладывает существенные ограничения на область их применения.

Метод эффективного показателя преломления [3], точность которого высока вдали от модовой отсечки [2, 4], позволяет находить решение двумерного волнового уравнения для канального волновода путем последовательного решения одномерных задач. Экономичный метод решения одномерного уравнения на основе вычисления поправки к собственному значению однородной краевой задачи [5, 6] был предложен для анализа планарных волноводов с произвольным распределением показателя преломления [7, 8]. В этом методе поле моды находится прямым интегрированием волнового уравнения для пробного значения постоянной распространения, после чего вычисляется поправка первого порядка к этому значению. Такой итерационный процесс быстро сходится и является стабильным [5, 7]. Однако непосредственное использование данного метода для анализа канальных волноводов в приближении метода эффективного показателя преломления требует вычисления профиля эффективного волновода в большом количестве точек, что приводит к резкому увеличению объема вычислений. С другой стороны, методы, использующие ступенчатую аппроксимацию профиля показателя преломления, обеспечивая высокую точность вычислений при относительно небольшом ( $\sim 20$ ) числе слоев, однако при этом решение находится перебором всевозможных значений постоянной распространения [9, 10].

В настоящей работе для определения характеристик канальных волноводов в приближении метода эффективного показателя преломления предлагается

комбинированный метод, использующий итерационный процесс вычисления поправки к постоянной распространения и ступенчатую аппроксимацию профиля показателя преломления. Метод излагается для произвольного профиля показателя преломления волновода с использованием нормированных параметров, что существенно расширяет область применения получаемых результатов. Точность метода оценивается путем сопоставления с известными результатами, полученными методом конечных элементов для планарного [11] и канального [12] волноводов. Предложенный метод используется для определения характеристик канальных  $Ti : LiNbO_3$  волноводов в широком диапазоне нормированных параметров.

### Расчет характеристик планарных волноводов

Решение одномерного волнового уравнения является ключевым в методе эффективного показателя преломления для определения характеристик канальных волноводов. Поэтому рассмотрим вначале подробно предлагаемый комбинированный метод для анализа планарных волноводов. Пусть распределение показателя преломления по поперечной координате  $y$  описывается соотношением

$$n(y) = \begin{cases} n + \Delta n f\left(\frac{y}{D}\right), & y \geq 0, \\ n_c, & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $n$  и  $n_c$  — показатели преломления подложки и покровного слоя;  $\Delta n$  — максимальное приращение показателя преломления волновода, которое, для простоты будем предполагать, достигается на поверхности  $f(0)=1$  и  $f(\infty)=0$ ;  $D$  — характерная глубина волновода.

Введем широко используемые нормированные волноводные параметры [13]:

$$V \simeq \frac{2\pi}{\lambda} D \sqrt{2n\Delta n}, \quad b \simeq \frac{n^* - n}{\Delta n}, \quad a \simeq \frac{n^2 - n_c^2}{2n\Delta n}, \quad (2)$$

где  $\lambda$  — длина волны в вакууме,  $n^*$  — эффективный показатель преломления волноводной моды.

Тогда величина электрического поля  $E$  для  $TE$ -мод удовлетворяет следующим уравнениям [11, 13]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E}{dy'^2} + V^2 [f(y') - b] E &= 0, & y' > 0, \\ \frac{d^2 E}{dy'^2} - V^2 [a + b] E &= 0, & y' < 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $y' = y/D$  — нормированная координата по глубине волновода.

Для решения уравнений (3) с помощью итерационного процесса вычисления поправки к величине  $b$  [5-8] предлагается использовать ступенчатую аппроксимацию профиля волновода (рис. 1), где высота  $i$ -й ступеньки  $f_i = 1/2 (f(y'_{i-1}) + f(y'_i))$  и  $(N+1)$ -й слой простирается до бесконечности ( $f_{N+1} = 0$ ). В этом случае удобно ввести следующие обозначения [9]:

$$u_i = V \sqrt{f_i - b} \quad \text{и} \quad w_i = V \sqrt{b - f_i}. \quad (4)$$

Наиболее целесообразно точку согласования  $y_i$  решений (3), получающихся при интегрировании слева  $E^a$  и справа  $E^b$ , выбрать на границе слоев  $y_i = y'_i$ , так что  $f_{i+1} < b < f_i$  (рис. 1). Тогда поле слева ( $0 < y' < y'_i$ ) можно представить на  $i$ -м слое в виде [9]

$$E_i^a(y') = A_i \cos(u_i(y' - y'_{i-1})) + B_i \sin(u_i(y' - y'_{i-1})). \quad (5)$$

Используя непрерывность поля и его производной при смене слоя, последовательно определяются коэффициенты  $A_{i+1}$ ,  $B_{i+1}$  через  $A_i$ ,  $B_i$ . При этом коэффициенты  $A_1$ ,  $B_1$  находятся из согласования с полем  $E$  при  $y' < 0$

$$E_1^0(y) = A_1 \exp(V\sqrt{a+by'}), \quad (6)$$

где выбор  $A_1$  является произвольным и, если  $A_1 = \sqrt{(1-b)/(a+b)}$ ,  $B_1 = 1$ .

Аналогичным образом, начиная с поля  $E$  при  $y' > y'_N$

$$E_{N+1}^r(y') = A \exp(-V\sqrt{b}(y' - y'_N)), \quad (7)$$

где коэффициент  $A$  можно положить равным единице, и последовательно переходя с  $(i+1)$ -го слоя на  $i$ -й слой, легко определяются коэффициенты  $A_i$ ,  $B_i$  в выражении для поля справа ( $y'_i < y' < y'_N$ ) на  $i$ -м слое

$$E_i^r(y') = A_i \exp(w_i(y' - y'_i)) + B_i \exp(-w_i(y' - y'_i)). \quad (8)$$

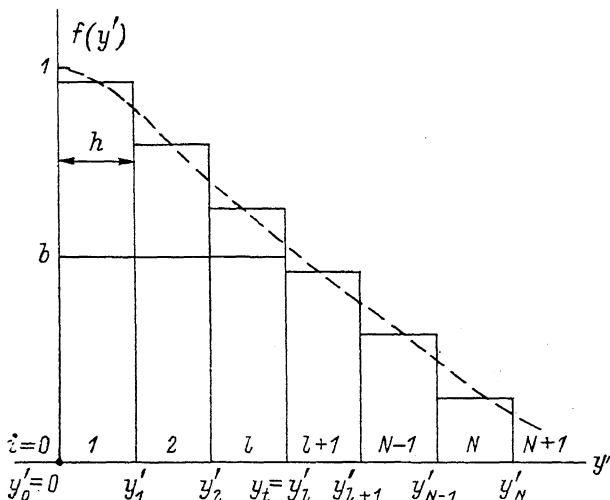


Рис. 1. Ступенчатая аппроксимация профиля показателя преломления планарного волновода.

Можно показать подобно сделанному в работе [6, 8], что поправка первого порядка  $\delta b$  к нормированной величине  $b$  эффективного показателя преломления определяется следующим образом:

$$\delta b = \frac{1}{V^2} \frac{\frac{E'_{in}}{E_{in}} - \frac{E'_{out}}{E_{out}}}{\int_{-\infty}^{y'_l} [E^r(y')]^2 dy' + \int_{y'_l}^{+\infty} [E^r(y')]^2 dy'}{\frac{(E_{out})^2}{(E_{in})^2}},$$

$$E_{out} = E_l^r(y_l), \quad E'_{out} = \left(\frac{dE^r}{dy'}\right)_{y_l}, \quad E_{in} = E_{l+1}^r(y_l), \quad E'_{in} = \left(\frac{dE^r}{dy'}\right)_{y_l}. \quad (9)$$

При этом все величины, входящие в соотношения (9), нетрудно выразить аналитически через коэффициенты  $A_i$ ,  $B_i$ , что уменьшает погрешность вычисления поправки  $\delta b$  по сравнению с методами [7, 8], использующими непосредственное интегрирование уравнений (3).

Пробное значение  $b_0$  можно определить с помощью приближенного метода ВКБ, как это предлагается в работе [7]. Для профилей показателя преломления, близких к гауссовому, целесообразно использовать приближенную формулу, полученную в работе [14],

$$b_m^0 = 1 - \frac{2m+1}{V} + \frac{6m^2+6m+3}{8V^2}, \quad (10)$$

где  $m=1, 2, 3, \dots$  — номер моды; величина  $D$  для вычисления нормированной частоты  $V$ , согласно (2), определяется как глубина волновода, на которой функция профиля  $f(y')$  уменьшается в  $e$  раз.

Следует отметить, что итерационный процесс сходится (через 3—6 итераций) к ближайшей моде практически при любом начальном значении  $b_0$  ( $0 < b_0 < 1$ ), поэтому для нахождения основной моды можно использовать пробное значение  $b_0 = 0.95$ .

Погрешность предлагаемого комбинированного метода при определении характеристик планарных волноводов складывается из погрешности, возникающей при замене гладкого профиля волновода ступенчатым, и погрешности итерационного процесса, связанной с приближенной формулой (первого порядка) для расчета поправки  $\delta b$ . Как показано в работах [7, 9, 10], этими погрешностями можно в практических случаях пренебречь. Для проверки точности комбинированного метода были рассчитаны характеристики основной моды волновода с гауссовым распределением показателя преломления ( $f(y') = \exp(-y'^2)$ ) для различного числа  $N$  слоев ступенчатой аппроксимации с равным шагом  $h = 2/N$ . При этом итерационный процесс прекращался в случае, если  $\delta b < 10^{-4}$ . Результаты расчетов ( $b$  (КМ)) приведены в таблице вместе с извест-

Нормированные значения эффективного показателя преломления, рассчитанные комбинированным методом ( $b$  (КМ)) и методом конечных элементов ( $b$  (МКЭ)) [11] для планарного волновода с гауссовым распределением показателя преломления

| $v$ | $b$ (КМ) |          |          | $b$ (МКЭ) |
|-----|----------|----------|----------|-----------|
|     | $N = 10$ | $N = 20$ | $N = 40$ |           |
| 1.8 | 0.0089   | 0.0086   | 0.0086   | 0.0094    |
| 2.0 | 0.0372   | 0.0368   | 0.0367   | 0.0377    |
| 3.0 | 0.2267   | 0.2266   | 0.2266   | 0.2267    |
| 4.0 | 0.3741   | 0.3744   | 0.3745   | 0.3745    |
| 5.0 | 0.4778   | 0.4783   | 0.4786   | 0.4786    |

ными результатами, полученными методом конечных элементов ( $b$  (МКЭ)) [11]. Видно, что для мод, находящихся вдали от отсечки, хорошая точность достигается уже при  $N = 20$ . Для слабонаправляемых мод погрешность связана с необходимостью «обрыва» профиля волновода при ступенчатой аппроксимации и резко возрастает, если  $b \leq f_N$ .

### Расчет характеристик канальных волноводов

Рассмотрим канальный волновод, сформированный в подложке с показателем преломления  $n$  и покрытый слоем с показателем преломления  $n_c$  (рис. 2). Представим распределение показателя преломления волноводной области подложки в следующем виде:

$$n(x, y) = n + \Delta n f\left(\frac{x}{W}, \frac{y}{D}\right), \quad (11)$$

где  $W$  и  $D$  — характерные размеры волновода по ширине и глубине.

Амплитуда  $E$   $X$ -компоненты электрического поля для квази- $TE$  мод удовлетворяет с учетом соотношений (2) следующему волновому уравнению:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y'^2} + V^2 [f(x', y') - b] E = 0, \quad (12)$$

где  $r = W/D$ ,  $x' = x/W$  и  $y' = y/D$  — нормированные переменные.

Для решения уравнения (12) в приближении метода эффективного показателя преломления [3] поле моды представляется в виде  $E(x', y') = X(x') \times Y(y', x')$  и уравнение (12) заменяется системой двух уравнений [2, 4]

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y'^2} + V^2 [f(x', y') - b^*(x')] Y = 0, \quad (13a)$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x'^2} + r^2 V^2 [b^*(x') - b] X = 0, \quad (136)$$

где функция  $b^*(x')$  дает профиль симметричного эффективного волновода.

Уравнение (13а) решается комбинированным методом аналогичного уравнению (3) для набора значений переменной  $x'$ , что позволяет получить ступенчатую аппроксимацию профиля эффективного волновода  $b^*(x')$ . При этом, определив пробное значение  $b_0^*$  величины  $b^*$  для первого  $x'$  согласно соотношению (10) или другим образом, в качестве пробных значений  $b_0^*$  для остальных  $x'$  наиболее целесообразно брать величину  $b^*$ , вычисленную на предыдущем шаге,

что уменьшает число итераций до 1—3 и резко сокращает время вычислений.

Решение уравнения (136) также производится комбинированным методом и особенно облегчается для функций  $f(x', y')$ , четных относительно переменной  $x'$ . В этом случае (наиболее часто встречающемся на практике) уравнение рассматривается при  $x' \geq 0$  и при интегрировании слева полагается либо  $A_1=1, B_1=0$  для четных мод, либо  $A_1=0, B_1=1$  для нечетных мод. Следует заметить, что

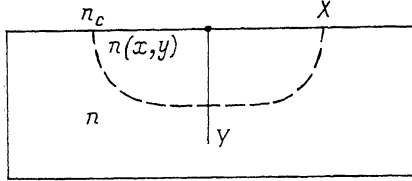


Рис. 2. Подложка с каналным волноводом.

при нахождении четных мод мы имеем дело с неоднородными граничными условиями в отличие от рассматриваемого в работах [6—8] случая однородного уравнения и однородных граничных условий. Можно строго показать, что и для ненулевого граничного условия (но только с одной стороны) при нулевой граничной производной поправка  $\delta b$  определяется соотношением (9), где нижний предел интеграла —  $-\infty$  заменяется на нуль (для четных и нечетных мод). Фактически это уже использовалось в работе [5], однако математическое обоснование метода вычисления поправки, приведенное в [6], не включает данный случай. В качестве пробного значения  $b_0$  при вычислении эффективного показателя преломления  $b$  планарного симметричного волновода можно использовать приближенную формулу для тонкопленочного волновода [14]

$$b_m^0 = \left(1 - \frac{K^2}{V_0^2}\right) b_c^*,$$

$$K = \frac{m\pi}{2} + \frac{1}{V_0} (\sqrt{1 + 2V_0(V_0 - 0.5m\pi)} - 1), \quad (14)$$

где  $m=0, 1, 2, \dots$  — номер моды;  $V_0$  — соответствующая нормированная частота и в нашем случае  $V_0=0.5rV\sqrt{b_c^*}$ ,  $b_c^*$  — некоторое среднее по ширине  $W$  значение показателя преломления эффективного волновода.

Погрешность предлагаемого комбинированного метода при определении характеристик канальных волноводов складывается из погрешности, связанной с определением характеристик планарного волновода, и погрешности метода эффективного показателя преломления, которая возникает из-за предположения о малости производной  $dY/dx'$ . Как показано в первой части нашей работы, погрешность первого типа пренебрежимо мала уже при  $N=20$  числе слоев. Хорошая точность метода эффективного показателя преломления для мод, находящихся вдали от отсечки, подтверждена многими работами [2, 4]. Для проверки точности комбинированного метода в целом были рассчитаны характеристики основной моды канального волновода со следующим распределением показателя преломления [12]:

$$n(x, y) = n + \Delta n \frac{L^2 - x^2 - y^2}{L^2},$$

$$L^2 = \begin{cases} D^2 + x^2, & y > x, \\ D^2 + y^2, & y < x, \end{cases} \quad (15)$$

где  $x \in [-D, D]$  и  $y \in [0, D]$ ,  $\Delta n=0.06$ ,  $n(x, y)=n_c=1.0$  для  $y < 0$  и  $n(x, y)=n=1.47$  (показатель преломления подложки) для всех остальных значений переменных  $x, y$ .

Полученный для одинакового числа слоев  $N=20$  по ширине и глубине волновода график зависимости  $b(V)$  приведен на рис. 3 (штриховая линия) вместе с графиком, рассчитанным методом конечных элементов (сплошная линия) [12]. Таким образом, относительная погрешность комбинированного метода становится существенной вблизи отсечки при  $b < 0.1$  (рис. 3).

### Нормированные характеристики канальных $\text{Ti} : \text{LiNbO}_3$ волноводов

Канальные волноводы, полученные путем термодиффузии титана в шлобат лития, являются наиболее распространенными в интегральной оптике как базовые

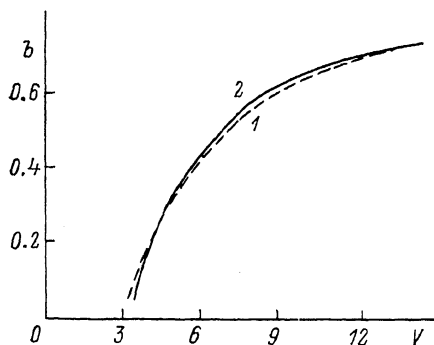


Рис. 3. Сравнение результатов расчета канального волновода с профилем (15) комбинированным методом (1) и методом конечных элементов (2) [12].

элементы различного рода устройств для оптических систем связи и обработки информации [15, 16]. Поэтому в качестве приложения данного комбинированного метода были рассчитаны нормированные характеристики таких вол-

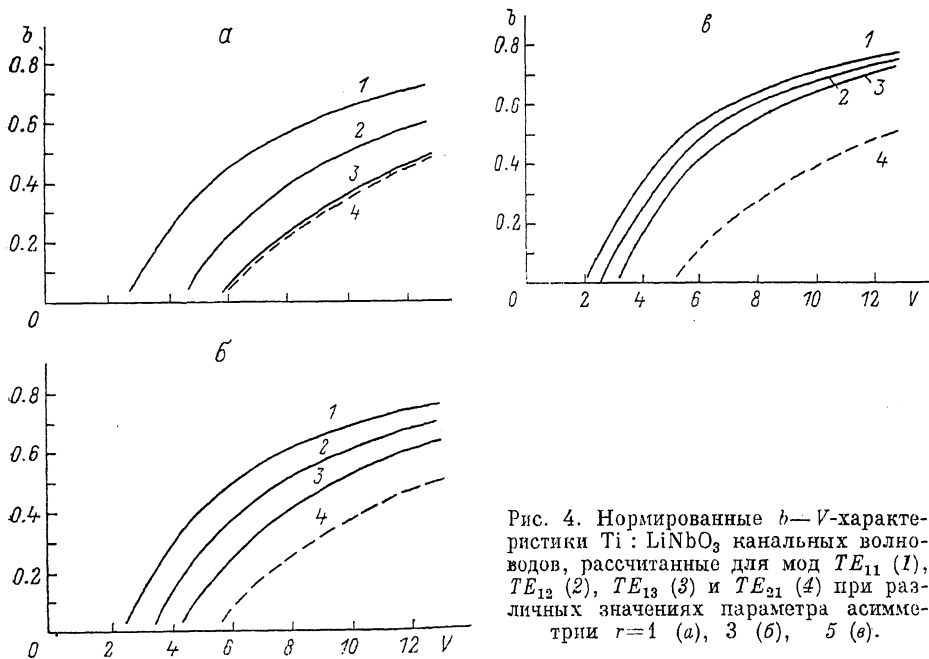


Рис. 4. Нормированные  $b-V$ -характеристики  $\text{Ti} : \text{LiNbO}_3$  канальных волноводов, рассчитанные для мод  $TE_{11}$  (1),  $TE_{12}$  (2),  $TE_{13}$  (3) и  $TE_{21}$  (4) при различных значениях параметра асимметрии  $r=1$  (а), 3 (б), 5 (в).

новодов в приближении изотропной диффузии [16] и пренебрежении величиной поля моды на поверхности волновода ( $a = \infty$ ). Последнее предположение справедливо с хорошей точностью [2, 9, 11, 16] и позволяет использовать полученные результаты как для квази- $TE$ , так и для квази- $TM$  мод. Профиль показателя преломления канальных  $\text{Ti} : \text{LiNbO}_3$  волноводов и связь его параметров с технологическими параметрами процесса изготовления волноводов известны с достаточной определенностью [2, 16]. При этом функция распределения показателя преломления в нормированных переменных (11, 12) записывается следующим образом:

$$f(x', j') = \frac{\exp(-y'^2)}{2 \operatorname{erf}(0.5r)} \{ \operatorname{erf}[r(x' + 0.5)] - \operatorname{erf}[r(x' - 0.5)] \}. \quad (16)$$

Основными элементами интегрально-оптических устройств являются одно-модовые канальные волноводы, однако в ряде случаев необходимо использовать двухмодовые [17] и трехмодовые [18] по ширине участки волноводных структур. На рис. 4 представлены зависимости нормированных величин эффективного показателя преломления от нормированной частоты  $V$  для первых трех мод ( $TE_{11}$ ,  $TE_{12}$ ,  $TE_{13}$ ) по ширине волновода и для второй моды ( $TE_{21}$ ) по глубине волновода при различных значениях параметра асимметрии  $r$ . Интересно отметить, что моды  $TE_{13}$  и  $TE_{21}$  для случая  $r=1$  являются практически вырожденными (рис. 4, а). Полученные результаты позволяют выбрать необходимые для заданного режима работы устройства параметры  $V$  и  $r$ , по которым можно определить параметры технологического процесса изготовления волноводных структур.

### Заключение

В настоящей работе для определения характеристик канальных волноводов с произвольным профилем в приближении метода эффективного показателя преломления предложен комбинированный метод, использующий итерационный процесс вычисления эффективного показателя преломления рассматриваемой моды и ступенчатую аппроксимацию профиля показателя преломления волновода. Расчетные соотношения приведены с использованием нормированных параметров, что существенно расширяет область применения результатов, получаемых этим методом. Проиллюстрирована хорошая точность метода в сравнении с известными, за исключением мод, находящихся вблизи отсечки. Следует отметить, что время вычисления эффективного показателя преломления и распределения поля моды канального волновода при использовании программы на языке FORTRAN-77 не превышало 1 мин для персонального компьютера IBM PC/AT или 3 с времени процессора VAX 8700.

Таким образом, предложенный метод при своей универсальности обладает достаточно высокой точностью и быстродействием, что позволяет эффективно его использовать для решения различного рода оптимизационных задач, где требуется многократное вычисление модовых характеристик волновода. Комбинированным методом рассчитаны нормированные  $b-V$ -характеристики канальных  $Ti : LiNbO_3$  волноводов для различных значений параметра асимметрии, по которым можно выбрать технологические параметры изготовления соответствующих волноводных структур.

### Список литературы

- [1] Mueller C. T., Garmire E. // Appl. Opt. 1985. Vol. 24. N 17. P. 2846—2850.
- [2] Strake E., Bava G. P., Montrosset I. // J. Lightwave Technol. 1988. Vol. 6. N 6. P. 1126—1134.
- [3] Hocker G. B., Burns W. K. // Appl. Opt. 1977. Vol. 16. N 1. P. 113—118.
- [4] De Velde K. V., Thienpont H., Green R. V. // J. Lightwave Technol. 1988. Vol. 6. N 6. P. 1153—1159.
- [5] Ridley E. C. // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1955. Vol. 51. N 6. P. 702—706.
- [6] Hartree D. R. Numerical analysis. England: Clarendon, 1958.
- [7] Baumert J. C., Hoffnagle J. A. // J. Lightwave Technol. 1986. Vol. 4. N 11. P. 1626—1630.
- [8] Cheng X., Tsai C. S. // J. Lightwave Technol. 1988. Vol. 6. N 6. P. 809—817.
- [9] Danielsen P. // IEEE J. Quantum Electron. 1984. Vol. 20. N 9. P. 1093—1097.
- [10] Chatak A. K., Thyagarajan K., Shenoy M. R. // J. Lightwave Technol. 1987. Vol. 5. N 5. P. 660—667.
- [11] Riviere L., Yi-Yan A., Carru H. // J. Lightwave Technol. 1985. Vol. 3. N 2. P. 368—377.
- [12] Yeh C., Ha K., Dong S. B., Brown W. P. // Appl. Opt. 1979. Vol. 18. N 10. P. 1490—1504.
- [13] Kogelnik H., Ramaswamy V. // Appl. Opt. 1974. Vol. 13. N 13. P. 1857—1867.
- [14] Lotspeich J. P. // Opt. Commun. 1976. Vol. 18. N 4. P. 567—572.
- [15] Garmire E. // J. Lightwave Technol. 1988. Vol. 6. N 6. P. 1105—1108.
- [16] Hutcheson L. D. Integrated Optical Circuits and Components. New York: Marcel Dekker, 1987.
- [17] Voges E., Neyer A. // J. Lightwave Technol. 1987. Vol. 5. N 9. P. 1229—1238.
- [18] Божевольный С. И., Радько П. С. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 11. С. 166—169.