

## К ВОПРОСУ О ТЕПЛОМ САМОВОЗДЕЙСТВИИ И НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОТДАЧЕ ПРИ КОНЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ АКУСТИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ

*Л. К. Зарембо, Е. К. Гусева, С. В. Титов, К. Э. Тоом*

Дана теория нелинейной теплоотдачи равномерно нагреваемого источником постоянной мощности тела. Результаты теории проверялись при возбуждении вызывающих саморазогрев колебаний акустических резонаторов. Высокая чувствительность метода позволила обнаружить нелинейные поправки к закону теплоотдачи при ничтожно малых ( $\sim$ несколько градусов) нагревах.

Известно, что стержневые акустические резонаторы в процессе испытания на динамическую прочность (обычно при амплитудах деформации  $\sim 10^{-4}$ ) сильно нагреваются. Аналогичные резонансные системы в области меньших, но конечных амплитуд ( $\sim 10^{-5} - 10^{-6}$ ) использовались для прецизионных исследований структурных особенностей твердых тел: амплитудно-зависимого внутреннего трения и дефекта модуля, определяемого эффективными модулями упругости четвертого порядка [1-5]. В этих работах наблюдались медленные уходы резонансной частоты, гистерезисные явления. При этом, как правило, не учитывался акустический саморазогрев резонатора. Вместе с тем уход резонансной частоты при увеличении амплитуды колебаний обусловлен не только нелинейностью  $\Delta f_{нл}$ , но и саморазогревом  $\Delta f_{т}$ . Инерционность этих процессов различна. Время изменения  $\Delta f_{нл}$  имеет порядок времени установления стационарных колебаний резонатора  $\tau_q \approx 2Q/\omega$ , где  $Q$  — добротность резонатора,  $\omega$  — резонансная частота. В указанных выше работах  $\tau_q$  не превышало долей секунды, вместе с тем наблюдавшиеся времена изменения частоты резонанса были на четыре порядка большими, что свидетельствовало о значительном влиянии саморазогрева.

В данной работе теоретически и экспериментально анализируются некоторые особенности саморазогрева резонаторов. При условии  $L^2/\chi < \rho CV/\alpha S = \tau_0$ , где  $L$  — характерный размер резонатора,  $\chi$  — коэффициент температуропроводности материала резонатора,  $\rho$  — плотность,  $C$  — теплоемкость,  $\alpha$  — коэффициент линейной теплоотдачи,  $V$  и  $S$  — объем и площадь поверхности резонатора,  $\tau_0$  — время тепловой релаксации в режиме линейной теплоотдачи, температура резонатора  $T$  может считаться постоянной. Процесс квазистационарного нагрева источником постоянной плотности мощности  $q$  с последующим выключением источника в момент времени  $t_1$  дается уравнением

$$\rho CV \frac{dT}{dt} = -\alpha S (T - T_0) - \beta S (T - T_0)^2 + qV [\theta(t) - \theta(t - t_1)], \quad (1)$$

где  $\theta(z)$  — единичная функция Хевисайда, равная 0 при  $z < 0$  и 1 при  $z > 0$ .

В (1) учтена нелинейность теплоотдачи,  $\beta$  — коэффициент нелинейной теплоотдачи. Далее считается, то интервал нагрева  $t_1$  существенно больше характерного времени установления стационарного состояния. Введем обозначения  $\xi = T - T_0$  ( $T_0$  — начальная температура),  $\xi_{ст}^0 = q\tau_0/\rho C$  — стационарный

нагрев в условиях линейной теплоотдачи,  $\varphi = (1 + 4\beta \xi_{\text{ст}}^0 / \alpha)^{1/2} = (1 + 4z)^{1/2}$ , тогда решение (1) при  $z > -(1/4)$  с начальными условиями  $\xi(0) = 0$  имеет вид

$$\xi = \begin{cases} \frac{2\xi_{\text{ст}}^0 (1 - e^{-t\varphi/\tau_0})}{1 + \varphi - (1 - \varphi) e^{-t\varphi/\tau_0}}, & 0 \leq t \leq t_1, \\ \frac{4\xi_{\text{ст}}^0}{(\varphi + 1)^2 e^{(t-t_1)/\tau_0} - (\varphi - 1)}, & t \geq t_1. \end{cases} \quad (2), (3)$$

Точное значение стационарного нагрева из (2)

$$\xi_{\text{ст}} = \frac{2\xi_{\text{ст}}^0}{1 + \varphi}. \quad (4)$$

Решения для нагрева (2) и охлаждения (3) «спиты» в соответствии с (4). Легко видеть, что переход к линейной теплоотдаче ( $z \rightarrow 0$ ,  $\varphi \rightarrow 1$ ) дает

$$\xi = \begin{cases} \xi_{\text{ст}}^0 (1 - e^{-t/\tau_0}), & 0 \leq t \leq t_1, \\ \xi_{\text{ст}}^0 e^{(t-t_1)/\tau_0}, & t \geq t_1. \end{cases} \quad (5), (6)$$

Различие в линейной ( $z=0$ ) и нелинейной (при разных  $z$ ) теплоотдачах при нагреве и охлаждении показаны на рис. 1 в безразмерных координатах  $\xi/\xi_{\text{ст}}$ ,  $t/\tau_0$  при  $z > 0$  и  $z < 0$ . В условиях слабой нелинейности ( $0 < z \leq 1$ ) для времен  $t \leq \tau_0/(2z)$  нагрев идет быстрее, чем в линейном случае, характерное время релаксации перенормируется]

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{z}{2}\right), \quad (7)$$

стационарный нагрев в соответствии с (4) становится меньше линейного. Отсюда следует, что в момент времени

$$t_0 = \frac{\tau_0}{2\varphi} \ln 0.5 \simeq |0.35 \frac{\tau_0}{\varphi}$$

нагрев будет таким же, как и в случае линейной теплоотдачи (на рис. 1 это маскируется изменением масштаба по оси координат). Следует подчеркнуть, что при нелинейной теплоотдаче время тепловой релаксации становится зависящим от мощности источника. В линейном случае (5), (6) цикл нагрева и охлаждения имеют одинаковое характерное время  $\tau_0$ . В нелинейном случае из (3) следует, что при охлаждении время тепловой релаксации не перенормируется, хотя в начальной стадии процесс охлаждения при  $z > 0$  протекает быстрее, чем при линейной теплоотдаче.

В заключении этого раздела остановимся на ограничениях решения (2), (3). Очевидно, что при положительных  $z > 1$  в уравнении теплового баланса необходимо учитывать члены более высокого порядка, чем квадратичные. Что касается знака  $\beta$ , то при  $\beta > 0$  (и следовательно,  $z > 0$ ) процесс физически оправдан: нагрев тормозится нелинейным усилением теплоотдачи, что приводит к выходу на стационарный режим. При  $\beta < 0$ , наоборот, нагрев сопровождается ослаблением теплоотдачи и потенциально возникает возможность тепловой неустойчивости. При  $z > -1/4$ , однако, неустойчивость еще не развивается, имеет место выход на стационарный режим. При  $z < -1/4$  возникает тепловая неустойчивость, в рамках рассматриваемой модели приводящая к бесконечному разогреву. Поскольку  $z$  зависит еще и от мощности источника, то режимы с  $\beta < 0$  могут реализоваться в каких-либо специальных случаях, в которых нагрев сопровождается выделением теплоизолирующей оболочки, например при взрыве. Рассмотрение этой более сложной модели выходит за рамки данной работы. Итак, решения (2), (3) ограничены условием  $-1/4 < z < 1$ . В рассматриваемом ниже эксперименте это условие может считаться выполненным, так как  $z \simeq 0.1$ .

В эксперименте проводилось исследование резонансных колебаний поликристаллических пластин мелкозернистого феррограната размером  $32 \times 13 \times 2$  мм на автоматизированной акустической установке [6]. Измерительная

система состояла из задающего управляемого синтезатора частоты в области частот  $\sim 10^5$  Гц, стабильность которого  $\sim 10^{-7}$ . Для возбуждения и приема колебаний резонатора применялись ЭМА преобразователи. Возбуждение колебаний производилось на первой планарной моде на частоте 97023 Гц (для разных образцов эти частоты несколько различались). Принятый сигнал после усиления измерительным усилителем поступал на линейный детектор, после чего сравнивался на компараторе с напряжением цифроаналогового преобразователя. Центральный процессор осуществлял программное управление измерительной системой,

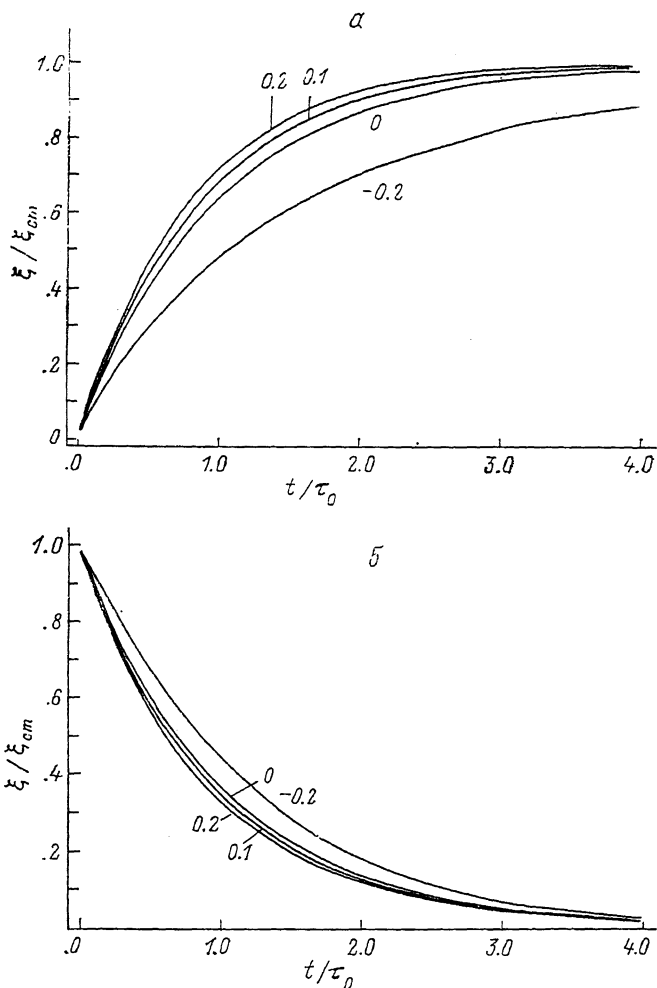


Рис. 1. Процессы нагрева (а) и охлаждения при разных  $z$  (б).

программируемую обработку информации и связь с оператором посредством дисплея. Пластины закреплялись в узловых точках на пересечении диагоналей больших плоскостей с помощью фторопластовых упоров; это крепление вносило меньшие потери, чем крепление струнами и иглами. Добротность образцов была  $\sim 10^4$ . Легко показать, что возможность отслеживания ухода частоты  $\Delta f$  определяется минимальным измеримым относительным изменением амплитуды  $(\Delta x)/x$

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_{\min} = \frac{1}{Q} \left[ \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{x} \right]^{1/2}.$$

Это в наших условиях при  $(\Delta x)/x \approx 5 \cdot 10^{-3}$  давало возможность определять уход резонансной частоты  $\sim 1$  Гц. Термостабилизация для целей нашего эксперимента, естественно, не проводилась, однако медленный дрейф температуры

в лабораторном помещении не превышал  $\sim 0.1$  К (контроль проводился независимо с помощью нетермостатированного кварцевого генератора). За время проведения одного измерения ( $\sim$  нескольких  $\tau_0 \approx 3.6$  мин) медленный дрейф окружающей температуры позволял проводить измерения с точностью до 1 Гц.

Исследование проводилось следующим образом: резонансная частота колебаний пластины определялась при достаточно малой амплитуде деформации ( $\sim 10^{-6}$ ), при которой саморазогрев приводил к уходу резонансной частоты менее чем на 1 Гц. Затем амплитуда возбуждения увеличивалась (по оценкам до  $\sim 10^{-5}$ ), в результате чего возникали измеримые нелинейный  $\Delta f_{нл}$  и температурный  $\Delta f_t$  уходы частоты. Поскольку в наших условиях  $\tau_0 \approx 3 \cdot 10^{-2}$  с, а время тепловой релаксации на четыре порядка больше, то начальный скачок  $\Delta f = \Delta f_{нл}$  исключался из измерения. Экспериментальные результаты показаны на рис. 2.

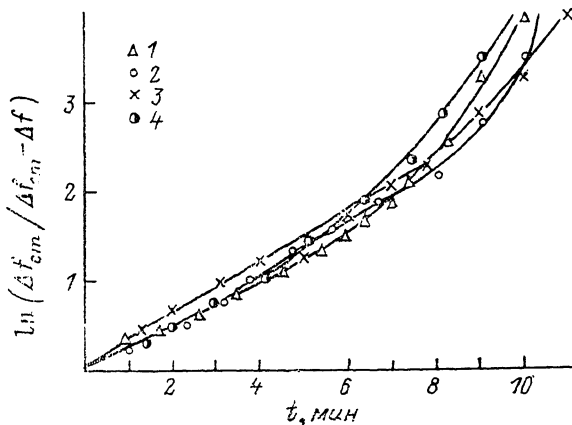


Рис. 2. Экспериментальная зависимость нагрева для четырех пластин мелкозернистого феррограната.

1—4 — образцы.

средний коэффициент линейной теплоотдачи  $\alpha = 13$  Вт/м<sup>2</sup>·К; ошибка не превышает 5%. Отклонение графика рис. 2 от линейной зависимости при увеличении нагрева обусловлено экспонентой в  $\Phi(r, t)$  и свидетельствует о том, что  $\beta > 0$ . Как следует из (2), это отклонение четче всего наблюдается в области нагрева, близкого к стационарному. Из-за большого разброса результатов для разных образцов удалось лишь оценить порядок  $\beta \approx 0.4$  Вт/м<sup>2</sup>·К<sup>2</sup>. Для более точного определения  $\beta$  необходима более высокая точность определения изменения температуры (или, что то же самое, резонансной частоты) в области стационарной температуры; в условиях эксперимента изменения температуры определялись с точностью  $\sim 0.05$  К. Отметим, что контроль нагрева пластины проводился также термопарой, один спай которой находился на поверхности образца. В стационарном режиме  $\xi_{ст} \approx 3^\circ$ , что, если иметь в виду температурный коэффициент частоты феррограната, согласуется с величиной ухода резонансной частоты ( $\Delta f_{ст} = \sim 40$  Гц).

Подводя итог, следует сказать, что рассмотренный акустический метод является в случае достаточно акустически добротных материалов прецизионным методом определения параметров теплоотдачи. В этом методе удачно сочетаются возможности регулируемого нагрева и контроля изменения температуры с высокой точностью. Благодаря высокой чувствительности метода уже при малых нагревах, не превышающих нескольких градусов, удалось обнаружить отклонения от линейного закона теплоотдачи, определить знак и оценить величину квадратичного коэффициента теплоотдачи. Проведенный теоретический анализ показывает, что от знака этого коэффициента зависит устойчивость процесса нагрева. В рамках квадратичной теплоотдачи определены условия, при которых тепловой процесс не выходит на стационарный режим и сопровождается неограниченным нагревом.

Несколько слов следует сказать о характере теплообменного процесса в рассматриваемом случае. Помимо фонового теплообмена на границе неподвижных сред имеет место еще и конвективный теплообмен из-за возникающих

При  $z \ll 1$  из (2)

$$\ln \left[ \frac{\Delta f_{ст}}{\Delta f_{ст} - \Delta f} \right] \approx \frac{t}{\tau_0} + \Phi(z, t).$$

Здесь

$$\Phi(z, t) = \frac{1+z}{1+2z} e^{2zt/\tau_0}; \quad \Delta f = \gamma f_0,$$

где  $\gamma$  — температурный коэффициент частоты,  $f_0$  — собственная частота резонатора при  $T_0$ .

Определенное по линейному участку графика рис. 2  $\tau_0$  составляет  $3.6 \pm 0.1$  мин. Для феррограната  $\rho = 5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $C = 564$  Дж/кг·К и измеренный

в тонком пограничном акустическом слое вихревых шлихтинговских течений. Возможной причиной нелинейности теплоотдачи может быть как тот, так и другой виды теплообмена. Для пограничных течений это возможно вблизи точек неустойчивости акустических вихрей, при этом характер течения может измениться при незначительных изменениях из-за нагрева параметров среды.

#### Список литературы

- [1] *Hiki Y.* // J. Phys. Soc. Jap. 1958. Vol. 13. P. 1138—1153.
- [2] *Chambers R. H., Smoluchowski R.* // Phys. Rev. 1960. Vol. 117. T. 725—744.
- [3] *Thompson D. O., Holmes D. K.* // J. Appl. Phys. 1959. Vol. 30. P. 525—572.
- [4] *Платков В. Я., Старцев В. И.* // Релаксационные явления в твердых телах. М.: Металлургия, 1968. С. 499—503.
- [5] *Kawai J., Ogawa T.* // Phys. Stat. Sol. 1983. Vol. 76. P. 375—385.
- [6] *Гусева Е. К., Титов С. В., Тоом К. Э.* // Дефектоскопия. 1990. Вып. 12. С. 25—27.

Московский государственный  
университет им. М. В. Ломоносова  
Ленинградский электротехнический институт  
им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступило в Редакцию  
4 октября 1990 г.