

04

© 1991 г.

РЕЛАКСАЦИЯ ЭНЕРГИИ ЭМИТТИРОВАННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В ПРИКАТОДНОЙ ОБЛАСТИ СЛАБОИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ

М. С. Бенилов, А. В. Ляшко

Рассматривается задача о расчете изотропной части функции распределения электронов вблизи эмиттирующего катода в слабоионизованной плазме в условиях, когда релаксация энергии электронов происходит на электрон-нейтральных столкновениях, а толщина прикатодного слоя объемного заряда существенно превышает длину энергетической релаксации. В случаях, когда отношение работы электрического поля на длине энергетической релаксации к тепловой энергии эмиттированных электронов является малым или большим, построено асимптотическое решение данной задачи, при промежуточных значениях указанного отношения получено численное решение. Найдена связь между потоком эмиссии и концентрацией электронов на больших расстояниях от поверхности катода, которая имеет смысл граничного условия для гидродинамических уравнений.

Введение

В связи с расчетом протекания тока в прикатодных областях различных газоразрядных устройств возникает вопрос о макроскопических граничных условиях на эмиттирующих катодах. Очевидно, для вывода этих условий необходимо решение кинетических уравнений для функции распределения электронов вблизи поверхности катода. Ранее такой вывод проводился для случая, когда толщина прикатодного слоя объемного заряда существенно меньше длины свободного пробега электронов [1, 2]. В данной работе рассматривается противоположный случай: предполагается, что степень ионизации достаточно мала, давление высокое и толщина слоя объемного заряда существенно превышает не только длину свободного пробега, но также и длину энергетической релаксации электронов. Такая ситуация реализуется, например, в условиях плазмы продуктов сгорания в каналах магнитогидродинамических генераторов.

1. Рассмотрим стационарную прикатодную область слабоионизованной плазмы высокого давления. Будем полагать, что катод эмиттирует электроны, распределение которых изотропно и имеет масштаб скорости u — тепловую скорость, соответствующую температуре поверхности катода T ($u = (2kT/m_e)^{1/2}$, где k — постоянная Больцмана, m_e — масса электрона). Будем считать также, что электрическое поле в прикатодной области не очень велико и его работа на длине свободного пробега электронов существенно меньше kT (имеется в виду длина свободного пробега, оцененная по скорости u). Учитывая также малость δ — параметра, характеризующего передачу энергии от электронов к нейтральным частицам (для упругих столкновений этот параметр равен удвоенному отношению массы электрона к массе нейтральной частицы, для неупругих — той же величине, умноженной на коэффициент неупругих потерь), можно ожидать, что распределение электронов, возвращающихся на катод вследствие рассеяния на нейтралах, мало отличается от распределения эмиттированных электронов. В такой ситуации функция распределения во всей рассматриваемой области, вплоть до поверхности катода, в первом приближении изотропна.

Пренебрежем изменениями функции распределения в направлениях вдоль поверхности по сравнению с изменениями в направлении по нормали. Будем

полагать, что релаксация электронной энергии происходит на электрон-нейтральных столкновениях, роль межэлектронных столкновений не существенна; плотность и температура нейтральных частиц, а также распределение электрического поля на рассматриваемых расстояниях пространственно однородны. Уравнение для главной, изотропной, части функции распределения электронов $f_0 = f_0(C, y)$ (см., например, [3, 4]) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{C^2}{3v_{en}} \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} + \frac{eEC}{3m_e v_{en}} \frac{\partial^2 f_0}{\partial y \partial C} + \frac{eE}{3m_e C^2} \frac{\partial}{\partial C} \left(v_{en} C^3 \frac{\partial f_0}{\partial y} \right) + \frac{e^2 E^2}{3m_e^2 C^2} \frac{\partial}{\partial C} \left(\frac{C^2}{v_{en}} \frac{\partial f_0}{\partial C} \right) + St = 0.$$

где C — модуль скорости электронов, y — расстояние от поверхности катода, v_{en} — частота упругих столкновений электрон-нейтрал, e — заряд электрона, E — модуль напряженности электрического поля (которое направлено к поверхности), St — интеграл столкновений.

Для определенности будем рассматривать модельный интеграл столкновений следующего вида:

$$St = \frac{1}{C^2} \frac{\partial}{\partial C} \left[\frac{\delta}{2} v_{en} C^3 \left(f_0 + \frac{kT}{m_e C} \frac{\partial f_0}{\partial C} \right) \right] \quad (1)$$

(температура нейтралов здесь считается равной температуре поверхности катода), зависимости частоты упругих столкновений и (имея в виду моделирование энергообмена электронов с молекулами с возбуждением вращательных и колебательных уровней) параметра δ от скорости предположим, следуя [4, 5], степенными $v_{en} = v_0 (C/u)^{2p}$, $\delta = \delta_0 (C/u)^{2q}$, где v_0, δ_0, p, q — заданные постоянные, $0 \leq p \leq 1/2, q > -2p - 1$. Отметим, что вопрос об обобщении результатов на случай более общих зависимости $v_{en}(C)$ и интеграла столкновений обсуждается в разделе 5.

Сформулируем граничные условия. В соответствии со сказанным выше данное уравнение в рамках рассматриваемой модели применимо вплоть до поверхности катода; функция распределения на этой поверхности определяется ее эмиссионными свойствами и в рамках рассматриваемой постановки задачи может считаться известной. Соответствующее граничное условие запишем в виде

$$f_0(C, 0) = \frac{2j_{em}}{\pi u^3} \varphi \left(\frac{C^2}{u^2} \right).$$

Здесь j_{em} — заданный параметр, имеющий смысл плотности тока эмиссии; φ — заданная функция, удовлетворяющая условию нормировки

$$\int_0^{\infty} x \varphi(x) dx = 1.$$

В дальнейшем, учитывая требование сходимости интеграла в правой части, будем считать, что функция $\varphi(x)$ при $x \rightarrow \infty$ убывает быстрее, чем x^{-2} .

На больших расстояниях от катода функция распределения становится пространственно однородной; при больших значениях C эта функция затухает

$$\frac{\partial f_0}{\partial y}(C, \infty) = 0; f_0(\infty, y) = 0.$$

Граничное условие при $C \rightarrow 0$ должно быть сформулировано [6] с учетом уравнения непрерывности потока электронов, которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{dJ_e}{dy} = 0, J_e = -\frac{4\pi}{3} \int_0^{\infty} \left(C^4 \frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{eEC^3}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial C} \right) \frac{dC}{v_{en}}, \quad (2)$$

где J_e — плотность (макроскопического) потока электронов.

Упомянутое граничное условие будет

$$\frac{eEC^3}{3m_e v_{en}} \frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{e^2 E^2 C^2}{3m_e^2 v_{en}} \frac{\partial f_0}{\partial C} + \frac{\delta}{2} v_{en} C^3 \left(f_0 + \frac{kT}{m_e C} \frac{\partial f_0}{\partial C} \right) \rightarrow 0.$$

Преобразуем поставленную задачу к безразмерным переменным

$$\beta^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^s \frac{\partial g}{\partial \xi} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^s \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) + \beta \xi^s \frac{\partial^2 g}{\partial \xi \partial \eta} + \xi^s \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} + 3 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\xi^{r+s} \left(\frac{\partial g}{\partial \xi} + g \right) \right] = 0, \quad (3)$$

$$g(\xi, 0) = \varphi(\xi); \quad \frac{\partial g}{\partial \eta}(\xi, \infty) = 0; \quad g(\infty, \eta) = 0; \quad (4)$$

$$\xi \rightarrow 0: \beta \xi^s \left(\beta \frac{\partial g}{\partial \xi} + \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) + 3 \xi^{r+s} \left(\frac{\partial g}{\partial \xi} + g \right) \rightarrow 0,$$

$$\xi = \frac{C^2}{u^2}, \quad \eta = \frac{\nu_0 \delta_0^{1/2} y}{u}, \quad g = \frac{\pi u^4 f_0}{2 j_{em}}, \quad \beta = \frac{2eE}{\nu_0 m_e \delta_0^{1/2} u},$$

$$s = \frac{3}{2} - p, \quad r = 2p + q. \quad (5)$$

Отметим, что использованный для нормировки расстояния масштаб $u/(\nu_0 \delta_0^{1/2})$ имеет смысл длины энергетической релаксации электронов, оцененной по скорости u . Параметр β характеризует отношение работы электрического поля на этом масштабе к тепловой энергии kT .

После того как задача (3)–(5) решена, можно найти распределение концентрации электронов

$$n_e(\eta) = 4 \frac{j_{em}}{u} \int_0^\infty g(\xi, \eta) \xi^{1/2} d\xi. \quad (6)$$

Особый интерес представляет значение $n_e(\infty)$: связь этого значения с величиной j_{em} имеет смысл макроскопического граничного условия на поверхности катода (т. е. граничного условия на поверхности катода для гидродинамических уравнений).

Отметим, что, хотя влияние эффектов нелокальности на изотропную часть функции распределения исследовалось неоднократно (см., например, обзоры [4, 7]), данная задача, насколько известно авторам, ранее в литературе не рассматривалась.

2. Построим сначала асимптотическое решение в предельном случае $\beta \rightarrow 0$. В этом случае члены уравнения (3) и граничного условия (5), содержащие множитель β , малы и могут быть опущены. Иными словами, приложенное электрическое поле является слабым и в первом приближении не влияет на вид функции распределения. В частности, пространственно однородная функция распределения близка к максвелловской.

Для нахождения величины $n_e(\infty)$ достаточно заметить, что из соотношений (2) в первом приближении с учетом первых двух граничных условий (4) можно получить

$$\int_0^\infty \xi^s g(\xi, \eta) d\xi = \int_0^\infty \xi^s \varphi(\xi) d\xi. \quad (7)$$

Для функции распределения на больших расстояниях от поверхности с использованием этого соотношения находим в первом приближении

$$g(\xi, \infty) = \frac{e^{-\xi}}{\Gamma(s+1)} \int_0^\infty x^s \varphi(x) dx,$$

где Γ — гамма-функция.

Искомое граничное условие в первом приближении имеет вид

$$n_e(\infty) = \frac{2\pi^{1/2}}{\Gamma(s+1)} \frac{j_{em}}{u} \int_0^\infty \xi^s \varphi(\xi) d\xi. \quad (8)$$

Отметим, что в частном случае, когда распределение эмиттированных электронов является максвелловским ($\varphi = e^{-\xi}$), функция распределения в рассма-

триваемой области меняется мало и в первом приближении совпадает с функцией распределения эмиттированных электронов. В этом частном случае нетрудно получить искомое граничное условие во втором приближении

$$n_e(\infty) = \frac{2\pi^{1/2} j_{em}}{u} \left\{ 1 + \frac{\beta^2}{3(1-r)} \left[\frac{\Gamma(5/2-r)}{\Gamma(3/2)} - \frac{\Gamma(2+s-r)}{\Gamma(1+s)} \right] \right\}. \quad (9)$$

3. Построим теперь асимптотическое решение в пределе $\beta \rightarrow \infty$, при этом для краткости ограничим рассмотрение случаем $p < 1/2$. Преобразуем задачу (3)—(5) к новым независимым переменным $h = e^{-\beta\eta}$, $z = \beta\eta$ (величина h имеет смысл нормированной полной энергии электрона)

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[(h+r)^s \frac{\partial g}{\partial z} \right] + \frac{3}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial h} \left[(h+z)^{r+s} \left(\frac{\partial g}{\partial h} + g \right) \right] = 0, \quad (10)$$

$$g(h, 0) = \varphi(h); \quad z \rightarrow \infty: \frac{\partial g}{\partial h} - \frac{\partial g}{\partial z} \rightarrow 0; \quad g(\infty, z) = 0; \quad (11)$$

$$h \rightarrow -z: \beta^2 (h+z)^s \frac{\partial g}{\partial z} + 3(h+z)^{r+s} \left(\frac{\partial g}{\partial h} + g \right) \rightarrow 0. \quad (12)$$

Для решения рассматриваемой задачи будем использовать метод сращиваемых асимптотических разложений [8]. Асимптотическая структура решения

схематически показана на рис. 1. Асимптотическое разложение, справедливое в области h и z порядка единицы, $h > 0$, $z \geq 0$, ищем в виде

$$g = g_1(h, z) + \dots \quad (13)$$

Подставляя это разложение в уравнение (10) и удерживая главные члены, для функции g_1 получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[(h+z)^s \frac{\partial g_1}{\partial z} \right] = 0. \quad (14)$$

Общее решение этого уравнения будет

$$g_1 = (h+z)^{1-s} F_1(h) + F_2(h),$$

где $F_1(h)$, $F_2(h)$ — произвольные функции.

Положим вторую из этих функций равной нулю; как будет видно из последующего, такой выбор обеспечивает возможность построения непротиворечивого замкнутого асимптотического решения рассматриваемой задачи. Определяя первую функцию из первого граничного условия (11), для g_1 находим

$$g_1 = \left(\frac{h}{h+z} \right)^{s-1} \varphi(h). \quad (15)$$

Рассмотрим возможность применения полученного решения при $z \gg 1$, для чего подставим это решение в уравнение (10) и сопоставим второй член левой части этого уравнения, опущенный при записи уравнения (14), с (удержанным) первым членом, точнее, со слагаемыми, которые получаются при раскрытии квадратных скобок в этом члене. Нетрудно видеть, что упомянутые слагаемые при $z \rightarrow \infty$ убывают обратно пропорционально z , тогда как второй член растет пропорционально z^{r+1} . Следовательно, разложение (13) применимо при $z \ll \beta^{2/(r+2)}$.

Исходя из вышесказанного, введем в рассмотрение второе асимптотическое разложение, которое справедливо в области $h=0(1)$, $z=0(\beta^{2/(r+2)})$, $-\infty < h < \infty$, $z_2 = z/\beta^{2/(r+2)} > 0$ и имеет вид

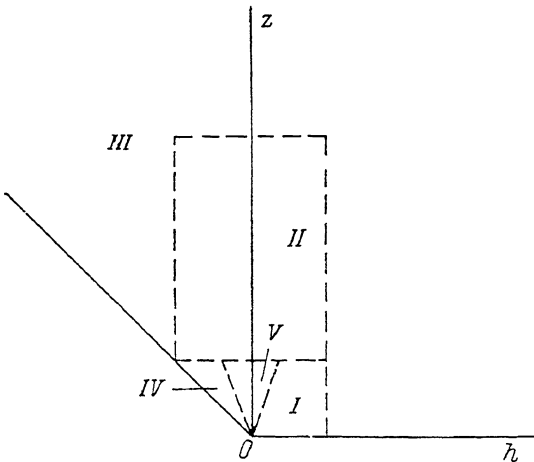


Рис. 1. Асимптотическая структура решения в пределе $\beta \rightarrow \infty$.

I—V — области применимости разложений (13), (16), (21), (27), (29) соответственно.

$$g = \beta^{-2m} g_2(h, z_2) + \dots, \quad (16)$$

где $m = (s-1)/(r+2)$ (отметим, что $0 < m < 1/2$).

Для функции g_2 получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z_2} \left(z_2^s \frac{\partial g_2}{\partial z_2} \right) + 3z_2^{r+s} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\partial g_2}{\partial h} + g_2 \right) = 0. \quad (17)$$

Для формулировки граничного условия для функции g_2 при $z_2 \rightarrow 0$ предположим, что в области h и z порядка единицы, $h < 0$, функция g имеет порядок $O(1)$. Тогда, используя условие сращивания разложений (13) и (16), искомое граничное условие можно записать в виде

$$z_2 \rightarrow 0: g_2 = \Phi(h) \frac{1}{z_2^{s-1}} + \dots; \quad \Phi(h) = \begin{cases} h^{s-1} \varphi(h), & h > 0, \\ 0, & h < 0. \end{cases} \quad (18)$$

Решение уравнения (17), удовлетворяющее этому граничному условию и условию затухания на бесконечности, может быть найдено с помощью преобразования Фурье и имеет вид

$$g_2 = \frac{z_2^{(1-s)/2}}{\pi \Gamma(m)} \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha) \gamma^m K_m(2\gamma z_2^{r/2+1}) e^{-i\alpha h} d\alpha, \quad (19)$$

где K_m — модифицированная функция Ганкеля, $\gamma = \gamma(\alpha)$ — однозначная ветвь функции $[3(\alpha^2 + i\alpha)]^{1/2} / (r+2)$, непрерывная при действительных α и имеющая неотрицательную действительную часть; функция $B(\alpha)$ дается формулой

$$B(\alpha) = \int_0^{\infty} h^{s-1} \varphi(h) e^{i\alpha h} dh.$$

Рассмотрим вопрос об асимптотике найденного решения при предельном переходе $z_2 \rightarrow \infty$, $h = k_0 z_2^w$ (k_0, w — некоторые постоянные, $w \geq 0$), причем из всех возможных предельных переходов этого вида для наших целей наибольший интерес представляет тот, при котором асимптотика немонотонна по h (имеет максимум). Анализ показывает, что такой переход реализуется при $k_0 < 0$, $w = r+2$, а соответствующая асимптотика имеет вид

$$g_2 = \frac{3^m B(0)}{(r+2)^{2m} \Gamma(m)} \frac{1}{(-h)^{m+1}} \exp\left[-\frac{3z_2^{r+2}}{(r+2)^2 (-h)}\right] + \dots \quad (20)$$

Нетрудно видеть, что это выражение (точнее говоря, описываемая этим выражением асимптотика функции $g_2 z_2^{r+s+1}$, которая при рассматриваемом предельном переходе имеет порядок единицы) достигает максимального значения в точке $-h/z_2^{r+2} = 3(m+1)^{-1}(r+2)^{-2}$ и стремится к нулю при $-h/z_2^{r+2} \rightarrow 0$, $-h/z_2^{r+2} \rightarrow \infty$. Таким образом, при $z_2 \rightarrow \infty$ функция распределения локализована в области $-h=0$ (z_2^{r+2}).

Очевидно, полученное решение при увеличении z_2 остается применимым до тех пор, пока в указанной области локализации справедливо неравенство $|h| \ll z$, использованное при записи уравнения (17). Следовательно, применимость разложения (16) ограничена условием $z_2 \ll \beta^{2/[(r+1)(r+2)]}$ ($z \ll \beta^{2/(r+1)}$).

Исходя из вышесказанного, введем в рассмотрение третье асимптотическое разложение, которое справедливо в области h и z порядка $\beta^{2/(r+1)}$, $0 \leq z_3 = z/\beta^{2/(r+1)}$, $-z_3 \leq h_3 = h/\beta^{2/(r+1)}$, $h_3^2 + z_3^2 \neq 0$ и имеет вид

$$g = \beta^{-2s/(r+1)} g_3(h_3, r_3) + \dots \quad (21)$$

Для функции g_3 получаем задачу

$$\frac{\partial}{\partial z_3} \left[(h_3 + z_3)^s \frac{\partial g_3}{\partial z_3} \right] + 3 \frac{\partial}{\partial h_3} \left[(h_3 + z_3)^{r+s} g_3 \right] = 0, \quad (22)$$

$$h_3 < 0, z_3 \rightarrow -h_3: (h_3 + z_3)^s \frac{\partial g_3}{\partial z_3} + 3(h_3 + z_3)^{r+s} g_3 \rightarrow 0; \quad (23)$$

$$h_3 \rightarrow 0-0, z_3 \rightarrow 0: g_3 = \frac{3^m B(0)}{(r+2)^{2m} \Gamma(m) (-h_3)^{m+1}} \exp \left[-\frac{3z_3^{r+2}}{(r+2)^2 (-h_3)} \right] + \dots; \quad (24)$$

$$h_3 > 0: g_3(h_3, 0) = 0; \quad z_3 \rightarrow \infty: \frac{\partial g_3}{\partial h_3} - \frac{\partial g_3}{\partial z_3} \rightarrow 0. \quad (25)$$

При формулировке первого граничного условия (25) учитывалось, что при $h=0$ ($\beta^{2/(r+1)}$) значения функции $\varphi(h)$ имеют порядок малости 0 ($\beta^{-4/(r+1)}$) более высокий, чем порядок малости первого члена разложения (21).

Оставляя подробный анализ задачи (22)–(25) за рамками данной работы, выпишем лишь асимптотику ее решения при $z \rightarrow \infty$

$$g_3 = \frac{(s-1) B(0)}{\Gamma[s/(r+1)+1]} \left(\frac{3}{r+1} \right)^{s/(r+1)} \exp \left[-\frac{3(h_3 + z_3)^{r+1}}{r+1} \right] + \dots \quad (26)$$

Четвертое асимптотическое разложение, справедливое в области h и z порядка единицы, $h < 0, z \geq -h$, ищем в виде

$$g = \beta^{-2m} g_4(h, z) + \dots \quad (27)$$

Для функции g_4 получаем уравнение, аналогичное (14) (вместо индекса 1 будет индекс 4), и граничные условия

$$z \rightarrow -h: (h+z)^s \frac{\partial g_4}{\partial z} \rightarrow 0; \quad z \rightarrow \infty: g_4 \rightarrow D(h),$$

$$D(h) = \frac{3^m}{\pi^{1/2} (r+2)^{2m} \Gamma(m)} \int_0^\infty t^{s-1} (t-h)^{-m-1/2} e^{(t-h)/2} K_{m+1/2} \left(\frac{t-h}{2} \right) \varphi(t) dt. \quad (28)$$

Отметим, что второе граничное условие (28) получено из сращивания разложения (27) с разложением (16) (функция $D(h)$ представляет главный член асимптотики функции g_2 в пределе $z_2 \rightarrow 0$, h порядка единицы и отрицательно); функция $D(h)$ монотонно возрастающая. Решение полученной задачи будет

$$g_4 = D(h).$$

Нетрудно видеть, что разложения (13) и (27) не допускают непосредственного сращивания. Следовательно, необходимо ввести в рассмотрение (по крайней мере одно) промежуточное асимптотическое разложение, описывающее область малых $|h|$ и z порядка единицы. Можно ожидать, что эта промежуточная асимптотика может быть при помощи соответствующего предельного перехода получена из решения (16), (19), поскольку неравенство $|h| \ll z$, использованное при записи уравнения (17) и граничного условия (18), в данной области остается справедливым. Анализ выражения (19) в пределе $z_2 \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ показывает, что вид искомой промежуточной асимптотики в случаях $r < 0, r=0, r > 0$ оказывается существенно разным. За недостатком места приведем результаты только для первого случая, который является наиболее простым. В этом случае искомая асимптотика описывается одним асимптотическим разложением, которое справедливо в области $h=0$ (β^{-1}), $z=0$ (1), $-\infty < h_5 = \beta h < \infty, z > 0$ и имеет вид

$$g = \frac{1}{\beta^{s-1}} \frac{\Gamma(s) \varphi(0)}{\pi} z^{(s-1)r/2} \int_{-\infty}^\infty \left[\frac{\gamma_2^m K_m(2\gamma_2)}{\Gamma(m)} \times \right. \\ \left. \times \exp \left(-i\sigma \frac{h_5}{z^{1+r/2}} \right) - \frac{1}{2} \right] \frac{d\sigma}{(-i\sigma)^s} + \dots, \quad \gamma_2 = \frac{3^{1/2}}{r+2} |\sigma|. \quad (29)$$

Таким образом, построение асимптотического решения задачи (10)–(12) в пределе $\beta \rightarrow \infty$ завершено. Нетрудно видеть, что вид полученного решения во многом связан с выбором $F_2 \equiv 0$, сделанным при выводе выражения (15): если принять $F_2 \neq 0$, то область применимости второго асимптотического разложения (разложения (16)) принимает вид $z=0$ ($\beta^{2/(r+s+1)}$), исчезает коэффициент β^{-2m} в первом члене этого разложения, меняется асимптотика функции

g_2 при $z_2 \rightarrow 0$, и т. д. Поэтому то обстоятельство, что построение замкнутого непротиворечивого решения оказалось возможным, свидетельствует о правильности сделанного выбора.

Физический смысл асимптотических результатов вполне ясен. Линейный масштаб в области I определяется условием равенства работы электрического поля на этом масштабе величине тепловой энергии kT и составляет $kT/(eE)$. Скорости электронов в этой области порядка u . Поскольку указанный масштаб существенно меньше локальной длины энергетической релаксации, равной $u/(\nu_0 \delta_0^{1/2})$, то энергообмен электронов с нейтралами в этой области заморожен.

По мере удаления от поверхности катода энергия (кинетическая) электронов увеличивается, а разброс по энергии сохраняет порядок kT — происходит формирование пучка. В области II на функцию распределения этого пучка начинает оказывать влияние на энергообмен с нейтралами. Линейный масштаб в данной области определяется условием равенства энергии, отданной электронами за время дрейфа через эту область, величине kT и составляет $\beta^{2/(r+2)} kT/(eE)$. Энергия электронов в данной области равна $eEy + 0$ (kT). Существенны оба члена модельного интеграла столкновений (1) (имеются в виду слагаемые в круглых скобках). Отметим, что в данной области исчезает влияние характера распределения эмиттированных электронов: если в граничное условие (18) функция $\varphi(h)$ входит непосредственно, то в асимптотике (20) ее влияние проявляется только интегрально, через коэффициент B (0).

По мере дальнейшего удаления от поверхности катода потери электронной энергии продолжают увеличиваться, энергетический спектр пучка смещается в область отрицательных значений полной энергии и расширяется. В области III ширина спектра становится сравнимой с энергией электронов, в этой области происходят релаксация пучка и переход к пространственно однородной функции распределения (которой соответствует первый член асимптотики (26)); отметим, что экспоненциальный множитель в этом члене совпадает с соответствующим множителем в выражении для локальной функции распределения в [4, 5]). Энергия электронов в этой области сравнима со средней энергией, соответствующей пространственно однородной функции распределения, и имеет порядок $\beta^{2/(r+1)} kT$. Линейный масштаб в данной области равен $\beta^{(1-r)/(1+r)} u/(\nu_0 \delta_0^{1/2})$ и совпадает с локальной длиной энергетической релаксации. Существенным является только первый член модельного интеграла столкновений.

В области IV функция распределения зависит только от полной энергии электронов и в первом приближении совпадает с асимптотикой функции распределения в области II . Дрейфовый перенос электронов в области IV направлен к поверхности катода и в первом приближении уравновешен диффузионным переносом в обратном направлении (подынтегральное выражение в (2) в первом приближении равно нулю).

Если в областях I, IV энергообмен электронов с нейтралами в первом приближении заморожен, то в промежуточной между ними области V второй член модельного интеграла столкновений становится существенным. Отметим автономный характер решения (29).

Выражение для концентрации электронов, соответствующей пространственно однородной функции распределения, можно записать в виде

$$n_e(\infty) = \frac{8(s-1)B(0)}{3} \frac{e}{m_e \nu_0 \mu_e} \frac{j_{em}}{u}, \quad (30)$$

$$\mu_e = \frac{2s\Gamma[s/(r+1)]}{3\Gamma[3/(2r+2)]} \left[\frac{\beta^2(r+1)}{3} \right]^{-p/(r+1)} \frac{e}{m_e \nu_0}. \quad (31)$$

Введенная здесь величина μ_e имеет смысл подвижности электронов, соответствующей пространственно однородной функции распределения. Нетрудно видеть, что зависимость $n_e(\infty)$ от E определяется зависимостью $\mu_e(E)$. В частности, при $p=0$ (частота столкновений электрон—нейтрал не зависит от скорости), когда μ_e не зависит от E , величина $n_e(\infty)$ также не зависит от E

$$n_e(\infty) = \frac{4B(0)}{3} \frac{j_{em}}{u}.$$

При $p > 0$ зависимость $n_e(\infty)$ от E является возрастающей. Приведем еще выражение для плотности потока электронов

$$J_e = \frac{8(s-1)B(0)}{3} \frac{eE}{m_e v_0 u} j_{em}. \quad (32)$$

Очевидно, этот поток формируется в области I , непосредственно прилегающей к поверхности катода.

4. Рассмотрим (безразмерную) величину $n_e(\infty)u/j_{em}$ как функцию параметра β . Как видно из (6), при $\beta=0$ (1) эта функция имеет порядок единицы. Из (8) следует, что значение этой функции при $\beta \rightarrow 0$ также имеет порядок единицы. При $\beta \rightarrow \infty$ эта функция при $p=0$ также стремится к конечному значению; например, если распределение эмиттированных электронов максвелловское, то это значение составляет одну треть от значения при $\beta \rightarrow 0$. В случае $p > 0$ эта функция при $\beta \rightarrow \infty$ существенно превышает единицу и имеет порядок $\beta^{2p/(r+1)}$.

Как показывают числовые оценки, коэффициент при β^2 в формуле (9) может принимать отрицательные значения. Следовательно, зависимость величины $n_e(\infty)u/j_{em}$ от параметра β является в общем случае немонотонной.

Для определения значений $n_e(\infty)$ при β порядка единицы задача (3)–(5) в данной работе была решена численно. Использовалась разностная схема второго порядка точности с переменными шагами по обоим направлениям, система разностных уравнений решалась методом матричной прогонки [9]. Программа тестировалась на задаче о диффузии электронов вблизи поглощающей границы, полученные результаты с точностью до графика совпали с результатами численного решения, представленными в [10].

В случае достаточно больших β при численном решении задачи (3)–(5) возникают трудности, связанные с быстрым увеличением масштаба энергии электронов по мере удаления от поверхности катода. Поэтому при больших β задача (3)–(5) предварительно преобразовывалась к новой независимой переменной $\xi_1 = \xi/(\beta\eta + \text{const})$.

На рис. 2–4 представлены результаты расчетов для случая, когда распределение эмиттированных электронов максвелловское ($\varphi = e^{-\xi}$), $q=0$, $p=0$; $1/4$; $1/2$.

На рис. 2 представлена функция распределения на различных расстояниях от катода при $p=0$, $\beta=5$. Видно, что характер численного решения вполне согласуется с асимптотической теорией раздела 3.

На рис. 3 представлено распределение концентрации электронов при $p=1/2$. Интересно отметить немонотонный характер этого распределения в случае не слишком малых β .

На рис. 4 представлены нормированные значения величины $n_e(\infty)$ в зависимости от параметра β (сплошные линии). Штриховыми линиями показаны асимптотики (9), штрихпунктиром — асимптотики (30). Как и следовало ожидать, при $p=1/4$, $1/2$ данная зависимость немонотонна.

5. Рассмотрим возможность обобщения некоторых результатов изложенного выше асимптотического анализа. Формула (8) выведена без использования модельного интеграла столкновений (1); формула (30) может быть получена из выражения (32), которое в свою очередь является следствием решения в об-

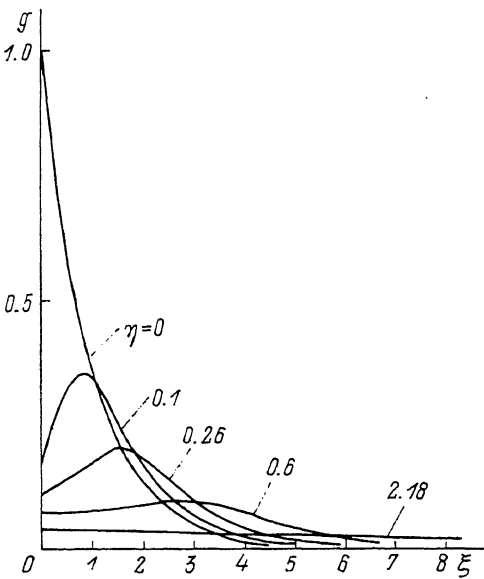


Рис. 2.

ласти I , где энергообмен электронов с нейтралами заморожен. Следовательно, справедливость формул (8), (30) не связана со сделанным выбором интеграла столкновений (в этой связи вполне понятным представляется отсутствие в указанных формулах параметра r). Можно поэтому ожидать, что эти формулы применимы и в рамках модели с интегралом столкновений более общего вида (подразумевается, что тождество $F_2 \equiv 0$ остается справедливым). Нетрудно получить обобщение этих формул также на случай более общей зависимости $\nu_{en}(C)$.

Выше предполагалось, что изменение электрического поля в рассматриваемой области мало. Это предположение обосновано при условии, что толщина прикатодного слоя объемного заряда существенно превышает локальную

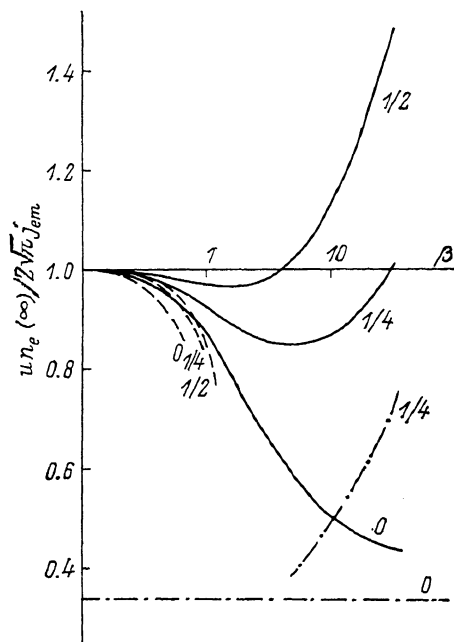
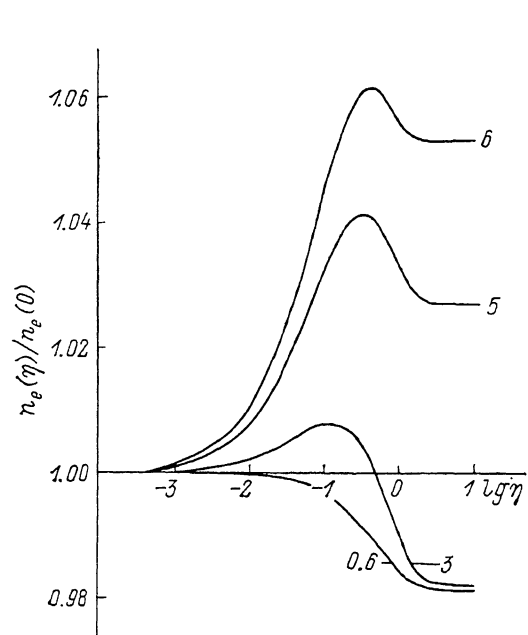


Рис. 3.

Цифры у кривых — значения β .

Рис. 4.

Цифры у кривых — значения r .

длину энергетической релаксации. Как известно, это же условие является условием локальности функции распределения электронов в прикатодном слое. Поэтому значения $n_e(\infty)$, найденные выше, являются естественными граничными условиями в рамках моделей с локальной функцией распределения.

Во многих случаях локальная длина энергетической релаксации не является малой в сравнении с толщиной слоя объемного заряда. В этой связи представляет интерес ввести в изложенный асимптотический анализ учет неоднородности электрического поля. Не рассматривая этого вопроса подробно, отметим следующее.

Поскольку падение напряжения в слое объемного заряда обычно существенно больше величины kT/e , то толщина этого слоя существенно превышает линейный масштаб в области I . Поэтому можно, по-видимому, надеяться, что решение в области I и, следовательно, соотношение (32) останутся справедливыми.

Если толщина слоя объемного заряда сравнима с линейным масштабом в области III , то модификации подлежит только решение в этой области; решения в областях I, II, IV, V остаются неизменными. В этой связи интересно отметить, что в работе [5] найдено автомодельное решение уравнения, являющегося аналогом уравнения (22) для случая неоднородного электрического поля. Хотя это решение, вообще говоря, и не удовлетворяет граничному условию (24),

его, по-видимому, можно рассматривать в качестве приближенного решения в области III, при этом нормировочный множитель в этом решении естественно определять из соотношения (32).

Список литературы

- [1] Бакиш Ф. Г., Юрьев В. Г. // ЖТФ. 1979. Т. 49. Вып. 5. С. 905—944.
- [2] Baksht F. G., Ivanov V. G., Yuryev V. G. // Inv. papers of XVIII Int. Conf. on Phenomena in Ionized Gases. Swansea, 1987. P. 206—218.
- [3] Митчнер М., Кругер Ч. Частично ионизованные газы. М.: Мир, 1976. 496 с.
- [4] Александров Н. Л., Кончаков А. М., Напартович А. П., Старостин А. Н. // Химия плазмы. Вып. 11. М.: Энергоатомиздат, 1984. С. 3—45.
- [5] Александров Н. Л., Волчек А. М., Дятко Н. А. и др. // Физика плазмы. 1988. Т. 14. № 3. С. 334—339.
- [6] Ruzicka T., Rohlena K. // Czech. J. Phys. 1972. Vol. 22B. N 10. P. 906—919.
- [7] Kitag K. // Phys. Rep. 1984. Vol. 112. N 5. P. 319—375.
- [8] Найфэ А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 53 с.
- [9] Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 616 с.
- [10] Lowke J. J., Parker J. H., Hall C. A. // Phys. Rev. 1977. Vol. 15A. N 3. P. 1237—1245.

Институт высоких температур АН СССР
Москва

Поступило в Редакцию
19 июня 1990 г.