1991 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 61, в. 4
1991 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 61, N 4

01

МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА, ДОПУСКАЮЩАЯ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

В. П. Демуцкий, Р. В. Половин

На одной модели динамической системы аналитически исследован характер хаотизации. Показано, что затухание корреляций происходит по экспоненциальному закону. Скорость затухания корреляций пропорциональна фазовому объему. Скорость затухания не стремится к нулю при стремлении к нулю объема начальной или конечной области. В общем случае скорость затухания корреляции зависит от формы начальной и конечной областей. Эта зависимость исчезает, если система инвариантна относительно обращения времени. При этом скорость затухания корреляции пропорциональна наибольшему показателю Ляпунова.

Введение

Вопрос о возникновении хаоса в динамической системе с малым числом степеней свободы является весьма актуальным [1-6]. Примеры динамического хаоса обнаружены практически во всех разделах физики [7-14].

Теоретические исследования хаотизации обычно проводятся с помощью ЭВМ. Однако ЭВМ малопригодны для исследования поведения системы на бесконечно большом интервале времени. Аналитические результаты были получены лишь в отдельных случаях [15]. Поэтому остался открытым ряд существенных вопросов.

По какому закону происходит затухание корреляций? Является ли этот закон экспоненциальным $\exp(-\alpha N)$ или более медленным $\exp(-\alpha N^{\gamma})$ $(\gamma < 1)$ или даже степенным $N^{-\tau}$?

В случае экспоненциального закона чему равна скорость перемешивания α? Пропорциональна ли она наибольшему показателю Ляпунова или КС энтропии? Пропорциональна ли скорость перемешивания α размерности неустойчивого подпространства или размерности всего фазового пространства?

Зависит ли скорость перемешивания от размеров начальной неопределенности и точности измерительного прибора? Стремится ли скорость перемешивания к нулю, когда величина начальной неопределенности стремится к нулю, или точность измерительного прибора стремится к бесконечности? Если при этом скорость перемешивания стремится к нулю, то по какому закону?

Зависит ли скорость перемешивания α от выбора начальной и конечной областей фазового пространства? Если зависит, то какое следует наложить дополнительное условие на динамическую систему, чтобы эта зависимость исчезла?

Ответам на эти вопросы для случая одной точно решаемой модели и посвящена настоящая работа.

Описание модели

В настоящей работе найдено аналитическое выражение для скорости хаотизации в случае отображения T, нелинейного в d-мерном единичном кубе, но линейного на d-мерном торе

$$\mathrm{x}^{(N+1)} = T\mathrm{x}^{(N)}, \tag{1}$$

т. е.

$$x_i^{(N+1)} = \{\alpha_{ij} x_j^{(N)}\}, \tag{2}$$

$\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ — вектор состояния, α_{ij} — заданные константы, $\{q\}$ означает дробную часть q, по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до d. Подчеркнем, что преобразование (2) является нелинейным, так как оно неинвариантно относительно замены $\mathbf{x}^{(N)} \to C\mathbf{x}^{(N)}$ ($C=\mathrm{const}$).

Мы полагаем, что фазовый объем сохраняется

$$\det \alpha_{ij} = 1. \tag{3}$$

При $d=2$ эта модель численно исследовалась в работе [16].

Процесс хаотизации проявляется в перемешивании фазового объема. Это означает следующее: при $N \to \infty$ произвольная (достаточно простая) кусочно-непрерывная функция распределения $f(\mathbf{x}, N)$ стремится к равномерному распределению

$$\lim_{N\to\infty} f(\mathbf{x}, N) = \mathrm{const}. \tag{4}$$

Так как фазовый объем является единичным кубом, то const в формуле (4) равна единице.

Заметим, что δ-образная функция распределения

$$f(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \tag{5}$$

соответствующая точно определенному начальному состоянию $\mathbf{x}_0$, не стремится ни к какому пределу. Однако физический смысл имеет не точно заданное начальное состояние $\mathbf{x}_0$, а состояние, усредненное по некоторой начальной области Γ_i конечного объема V_i.

Согласно формуле (4), вероятность $P(\Gamma_f, N)$ попадания вектора состояния в произвольную область фазового пространства Γ_f при перемешивании равна ее объему V_f.

Перемешивание можно представить как затухание корреляций

$$\lim_{N\to\infty} C[N] = 0. \tag{6}$$

Здесь

$$C[N] = \langle \chi(\mathbf{x}) T^N f(\mathbf{x})\rangle - \langle \chi(\mathbf{x})\rangle \langle T^N f(\mathbf{x})\rangle, \tag{7}$$

$\chi(\mathbf{x}, \Gamma_f)$ — характеристическая функция области Γ_f

$$\chi(\mathbf{x}, \Gamma_f) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathbf{x} \in \Gamma_f, \\ 0, & \text{если } \mathbf{x} \notin \Gamma_f. \end{cases} \tag{8}$$

Угловые скобки в (6) означают усреднение по фазовому объему

$$\langle \varphi \rangle = \int_\Gamma \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{9}$$

Γ — d-мерный единичный куб, $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i=1, 2, \ldots, d$, φ — произвольная функция.

Область Γ_f в формуле (8) играет роль «измерительного прибора», определяющего степень перемешивания. Точность этого прибора характеризуется величиной $1/V_f$. Эта точность тем выше, чем меньше объем V_f.

Заметим, что в евклидовом пространстве $-\infty < x_i < \infty$ все точки поверхности куба являются точками разрыва преобразования (2). Однако если отождествить точки с координатами x_i и x_i+1, то преобразование (2) становится непрерывным. При этом фазовое пространство из d-мерного куба превращается в d-мерный тор. Согласно соображениям, приведенным в работе [17], в этом случае следует ожидать, что корреляции затухают по экспоненциальному закону.

Если в (2) все коэффициенты α_{ij} — целые числа, то операция взятия дробной части коммутирует с преобразованием

$$\mathbf{x}^{(N)} \to \mathbf{x}^{(N+1)}. \tag{10}$$

В этом случае при вычислении $\mathbf{x}^{(N)}$ можно отбросить знак дробной части, восстановив его только в конечном результате. Это позволяет свести нелинейное преобразование (1) к линейному

$$x_i^{(N+1)} = \alpha_{ij} x_j^{(N)}, \tag{11}$$

для решения которого можно воспользоваться хорошо разработанными методами [18].

Вычисление корреляций

Переходя к вычислению корреляции (7), рассмотрим два частных случая: 1) грубое начальное состояние и точный «измерительный прибор»

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon^i} \text{ при } x_1^i - \dfrac{\varepsilon^i}{2} \leqslant x_1 \leqslant x_1^i + \dfrac{\varepsilon^i}{2};\ 0 \leqslant x_j \leqslant 1 \quad (j = 2, \ldots, d), \\ 0 \text{ вне этой области}, \end{cases} \tag{12}$$

Γ_f определяется соотношениями

$$x_l^f - \frac{\varepsilon_l^f}{2} \leqslant x_l \leqslant x_l^f + \frac{\varepsilon_l^f}{2}\ (l = 1, 2, \ldots, d); \tag{13}$$

2) точное начальное состояние и грубый «измерительный прибор»

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\prod\limits_{l=1}^{d} \varepsilon_l^i} & \text{при } x_l^i - \dfrac{\varepsilon_l^i}{2} \leqslant x_l \leqslant x_l^i + \dfrac{\varepsilon_l^i}{2}, \\ 0 & \text{вне этой области}, \end{cases} \tag{14}$$

Γ_f определяется соотношениями

$$\begin{gathered} 0 \leqslant x_j \leqslant 1, \quad j = 1, 2, \ldots, d-1, \\ x_d^f - \frac{\varepsilon^f}{2} \leqslant x_d \leqslant x_d^f + \frac{\varepsilon^f}{2}. \end{gathered} \tag{15}$$

В первом случае разложим начальную функцию распределения (12) в ряд Фурье

$$f(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(m) \exp(2\pi i m x_1), \tag{16}$$

где

$$F(m) = \frac{\sin(\pi m \varepsilon^i)}{\pi m \varepsilon^i} \exp(-2\pi i m x_1^i).$$

Заметим, что

$$Tf(\mathbf{x}) = f(T^{-1}\mathbf{x}), \tag{17}$$

поэтому

$$T^N f(\mathbf{x}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(m) \prod_{l=1}^{d} \exp[2\pi i m (\alpha^{-N})_{1l}\, x_l]. \tag{18}$$

Элементы матрицы $(\alpha^{-N})_{kl}$ имеют вид [18]

$$(\alpha^{-N})_{kl} = \frac{1}{\Delta} \sum_{p=1}^{d} B_{kp} \Delta_{lp} \lambda_p^{-N}. \tag{19}$$

Здесь

$$B_{kp} = \sum_{j=1}^{d} D_{jk}^{(p)},$$

где $D_{jk}^{(p)}$ — алгебраическое дополнение к элементу $(j,\ k)$ матрицы

$$(\alpha^{-1})_{jk} - \lambda_p^{-1}\delta_{jk}.$$

Далее, Δ_{lp} — алгебраическое дополнение к элементу $(l,\ p)$ матрицы B_{lp}, а $\Delta = \det B_{lp}$, λ_p — собственные значения матрицы α_{jk}.

При выборе Γ_f в виде (13) получим выражение для корреляции

$$C_1 = \frac{2}{\pi^{d+1}\varepsilon^i \prod_{j=1}^{d} (\alpha^{-N})_{1j}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{d+1}} \cos\left\{2\pi m \left[\sum_{j=1}^{d} (\alpha^{-N})_{1j} x_j^f - x_1^i\right]\right\} \times$$

$$\times \sin(\pi m \varepsilon^i) \cdot \prod_{l=1}^{d} \sin[\pi m (\alpha^{-N})_{1l}\, \varepsilon_l^f]. \tag{20}$$

Во втором (14), (15) случае получим

$$C_2 = \sum_{m_1 \ldots m_d = -\infty}^{\infty}{}' \frac{\sin(\pi m_d^{(N)} \varepsilon^f)}{\pi m_d^{(N)}} \exp[2\pi i m_d^{(N)} x_d^f], \tag{21}$$

где суммирование производится по всем m_j, удовлетворяющим условиям

$$m_1^{(N)} = m_2^{(N)} = \ldots = m_{d-1}^{(N)} = 0. \tag{22}$$

Здесь

$$m_j^{(N)} = \sum_{k=1}^{d} m_k (\alpha^{-N})_{kj} \tag{23}$$

и

$$F(m_1 \ldots m_d) \frac{1}{\pi^d} \prod_{l=1}^{d} \frac{\sin(\pi m_l \varepsilon_l^i)}{\pi m_l \varepsilon_l^i} \exp(-2\pi i m_l x_l^i). \tag{24}$$

Соотношения (23) осуществляют отображение целочисленного d-мерного вектора $(m_1 \ldots m_d)$ в целочисленный вектор $(m_1^{(N)} \ldots m_d^{(N)})$. Это отображение в силу (3) взаимно однозначно

$$m_j = \sum_{k=1}^{d} m_k^{(N)} (\alpha^{(N)})_{kj}. \tag{25}$$

Поэтому в (21) суммирование по $m_1 \ldots m_d$ при условии (22) можно заменить суммированием по $m_d^{(N)} \equiv m$

$$C_2 = \frac{2}{\pi^{d+1} \prod_{l=1}^{d} \varepsilon_l^i (\alpha^N)_{dl}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{d+1}} \cos\left\{2\pi m \left[\sum_{k=1}^{d} (\alpha^N)_{dk}\, x_k^i - x_d^f\right]\right\} \times$$

$$\times \sin(\pi m \varepsilon^f) \cdot \prod_{j=1}^{d} \sin[\pi m (\alpha^N)_{dj}\, \varepsilon_j^i]. \tag{26}$$

Здесь использовано вытекающее из (22), (25) соотношение $m_j = m\,(\alpha^N)_{dj}$.

Преимущество рассматриваемых моделей состоит в том, что ряды, входящие в формулы для корреляций (20), (26), можно просуммировать в замкнутом виде [19].

Двумерное фазовое пространство

При $d=2$ и $N \gg 1$ выражение для C_1 принимает вид

$$C_1 = \frac{\mathrm{sh}^2 L}{3\varepsilon^i (\alpha_{22} - e^{-L})\, d_{12}} \exp(-2LN) \sum_{+-} [\{a_u\}(1 - 3\{a_u\} + 2\{a_u\}^2) -$$

$$- \{a_g\}(1 - 3\{a_g\} + 2\{a_g\}^2)], \tag{27}$$

где L — наибольший показатель Ляпунова, a_g означает различные алгебраические суммы вида

$$p \pm \frac{1}{2}\varepsilon^i \pm \frac{1}{2}(\alpha^N)_{22}\varepsilon_1^f \pm \frac{1}{2}(\alpha^N)_{12}\varepsilon_2^f \tag{28}$$

с четным числом минусов, a_u — то же самое с нечетным числом минусов. Далее,

$$p = (\alpha^N)_{22}x_1^f - (\alpha^N)_{12}x_2^f - x_1^i. \tag{29}$$

Изменения величин a_g и a_u при переходе от N к $N+1$ по порядку величины равны этим величинам. Поэтому дробные части в формуле (27) беспорядочно изменяются с ростом N, оставаясь заключенными между нулем и единицей. Находя верхний и нижний пределы суммы в (27), получим для корреляции C_1 мажоранту

$$|C_1| \leqslant \frac{4\,\mathrm{sh}^2 L}{9\sqrt{3}\,\varepsilon^i\,|(a_{22}-e^{-L})a_{12}|}\exp(-2LN). \tag{30}$$

Аналогично находим мажоранту для C_2

$$|C_2| \leqslant \frac{4\,\mathrm{sh}^2 L}{9\sqrt{3}\,\varepsilon_1^i\varepsilon_2^i\,|(a_{22}-e^{-L})a_{21}|}\exp(-2LN). \tag{31}$$

Предэкспоненциальные множители в формулах (30), (31) остаются конечными при $\varepsilon^i \to 0$ и $\varepsilon^f \to 0$. Это означает, что скорость перемешивания не зависит ни от размеров начальной неопределенности, ни от точности измерительного прибора.

Многомерное фазовое пространство

Перейдем теперь к d-мерному фазовому пространству. Ряд, входящий в формулу (20), ограничен

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{d+1}}\cos\left\{2\pi m\left[\sum_{j=1}^{d}(\alpha^{-N})_{1j}x_j^f - x_1^i\right]\right\}\cdot\sin(\pi m\varepsilon^i)\prod_{l=1}^{d}\sin[\pi m(\alpha^{-N})_{1l}\varepsilon_l^f]\right| \leqslant A, \tag{32}$$

где A — константа, не зависящая от N.

Поэтому при $N \gg 1$

$$|C_1| \leqslant \frac{2\Delta^d}{\pi^{d+1}\varepsilon^i\,(B_{11})^d\prod_{l=1}^{d}\Delta_{l1}}A\cdot\exp(-N|L_{\min}|d)\,(|\lambda_i|_{\min}\equiv|\lambda_1|). \tag{33}$$

Аналогично

$$|C_2| \leqslant B\exp(-NL_{\max}d), \tag{34}$$

где B — другая константа, не зависящая от N.

Мы видим, что скорость перемешивания зависит, вообще говоря, от Γ_i и Γ_f. Эта зависимость, однако, исчезает, когда показатели Ляпунова можно разбить на пары, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку,

$$L_i = -L_{d-i+1}. \tag{35}$$

Физически это означает, что рассматриваемая динамическая система инвариантна относительно обращения времени. При этом

$$L_{\min} = -L_{\max} \tag{36}$$

и в случаях (33) и (34) скорость перемешивания одинакова.

Выводы

1. Затухание корреляций происходит по экспоненциальному закону.
2. В динамической системе, инвариантной относительно обращения времени, скорость перемешивания пропорциональна наибольшему показателю Ляпунова (а не КС энтропии).

3. Скорость перемешивания пропорциональна полной размерности фазового пространства (а не размерности неустойчивого подпространства).

4. Скорость перемешивания не зависит ни от величины начальной неопределенности V_i, ни от точности измерительного прибора $1/V_f$ (при $V_i \to 0$ или $V_f \to 0$ предполагается, что предварительно сделан предельный переход $N \to \infty$).

5. Если динамическая система инвариантна относительно обращения времени, то скорость перемешивания не зависит ни от выбора начальной области Γ_i, ни от выбора конечной области Γ_f.

Эти утверждения доказаны для частного случая нелинейного преобразования (2), а также частных случаев ячеек в фазовом пространстве (12)—(15). Но можно высказать гипотезу, что эти выводы справедливы и для более широкого класса динамических систем.

Авторы благодарят А. И. Ахиезера и членов руководимого им семинара за ценные дискуссии.

Список литературы

[1] *Chirikov B. V.* // Phys. Rep. 1979. Vol. 52. N 5. P. 263—379.
[2] *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 269 с.
[3] *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
[4] *Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И.* // УФН. 1979. Т. 128. № 4. С. 579—624.
[5] *Манаков С. В.* // ЖЭТФ. 1974. Т. 67. Вып. 2. С. 543—555.
[6] *Неймарк Ю. И., Ланда П. С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Физматлит, 1987. 424 с.
[7] *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
[8] *Монин А. С.* // УФН. 1978. Т. 125. № 1. С. 97—122.
[9] *Сонечкин Д. М.* Стохастичность в моделях общей циркуляции атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1984.
[10] *Анищенко В. С.* Стохастические колебания в радиофизических системах. Ч. 1, 2. Саратов, 1985. 1986.
[11] *Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л.* Препринт Института ядерной физики СО АН СССР. № 82-120. Новосибирск, 1982. 32 с.
[12] *Шульга Н. Ф.* // Проблемы теоретической физики. Киев: Наукова думка, 1986. С. 298—313.
[13] *Болотин Ю. Л., Гончар В. Ю., Грановский М. Я.* и др. Регулярные и коллективные аспекты коллективной модели ядер. М., 1987. 29 с.
[14] Instabilifies in Active Optical Medium. J. Opt. Soc. Amer. 1985. Vol. B2. N 1.
[15] *Bunimovich L. A., Sinai Ya. G.* // Commun. Math. Phys. 1981. Vol. 78. N 4. P. 479—497.
[16] *Касати Дж.* // Тр. IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Киев: Наукова думка, 1984. С. 169—172.
[17] *Бунимович Л. А.* // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. Вып. 4. С. 1452—1471.
[18] *Шилов Г. Е.* Конечномерные линейные пространства. М.: Наука, 1969.
[19] *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. С. 53.

Харьковский государственный
университет им. А. М. Горького

Поступило в Редакцию
7 февраля 1990 г.
В окончательной редакции
4 июня 1990 г.