

01; 09

© 1991 г.

О ДИФРАКЦИИ СКАЛЯРНЫХ ВОЛН НА КОНЦЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА С ПЛОСКИМ ФЛАНЦЕМ

А. И. Полетаева, Н. П. Занадворов

Предложен метод решения стационарной задачи дифракции, основанный на сшивании частных решений в подобластях и сводящий проблему к интегральному уравнению 2-го рода, допускающему эффективное численное решение в длинноволновом пределе. Приведены рассчитанные зависимости коэффициентов прохождения и отражения.

Точные решения задач дифракции волн на системах типа волноводов с фланцами представляют интерес, например, для оценки эффективности ввода и вывода излучения через торцы слабонаправляющих волноводов в оптике, в некоторых антенных устройствах и т. д. Известные решения такого типа [1-4] получены для плоского случая методом факторизации, применение которого к задачам с цилиндрической симметрией зачастую весьма затруднительно. Кроме того, для однозначного выбора из семейства решений, получаемых этим методом, необходимо явное использование условий на ребре [5]. Представляет, по-видимому, определенный интерес развитие метода решения подобных краевых задач, сводящего проблему к интегральному уравнению 2-го рода, свойства решения которого таковы, что условия на ребре выполняются автоматически (аналогично ситуации, имеющей место в методе парных уравнений [6]), что и составляет предмет настоящей работы.

Пусть на систему, показанную на рис. 1, падает слева плоская волна e^{ikx} (зависимость всех величин от времени выбирается в виде $e^{-i\omega t}$). Задача отыскания поля сводится к решению уравнения Гельмгольца

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U = 0. \quad (1)$$

Ограничившись для простоты случаем нулевых граничных условий на поверхности волновода и фланца, запишем решение поставленной задачи в областях I и II в виде

$$U_I = e^{ikx} - e^{-ikx} + \int_0^\infty A(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-iz\sqrt{k^2 - \lambda^2}} d\lambda, \quad (2)$$

$$U_{II} = \sum_{n=1}^\infty a_n J_0(\lambda_n r) e^{iz\sqrt{k^2 - \lambda_n^2}}, \quad (3)$$

где $A(\lambda)$ — амплитуда волн непрерывного спектра; a_n — амплитуды волн, возбуждаемых в волноводе; $\lambda_n R$ — нули функции Бесселя нулевого знака; под корнем квадратным понимается та его ветвь, для которой

$$\sqrt{k^2 - \lambda^2} = +i\sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad \lambda > k \quad (4)$$

(такой выбор обеспечивает ограниченность решения при $|z| \rightarrow \infty$).

Для выполнения граничных условий и условий непрерывности U и $\partial U/\partial z$ при $z=0$ искомые величины должны удовлетворять уравнениям

$$\int_0^{\infty} A(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = \begin{cases} 0, & r > R, \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r), & r < R, \end{cases} \quad (5)$$

$$\int_0^{\infty} \sqrt{k^2 - \lambda^2} A(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{k^2 - \lambda_n^2} J_0(\lambda_n r) = 2k, \quad r < R. \quad (6)$$

Предлагается (и в этом состоит суть развиваемого метода) отыскивать неизвестные коэффициенты a_n и функцию $A(\lambda)$ в виде интегральных представлений, близких к использовавшимся в работах [7, 8],

$$a_n = \frac{\lambda_n \xi_n}{\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}} \int_0^R g(t) \sin(t \sqrt{\lambda_n^2 - k^2}) dt, \quad (7)$$

$$A(\lambda) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \int_0^R g(t) \sin(t \sqrt{\lambda^2 - k^2}) dt, \quad (8)$$

где $\xi_n = 2/\lambda_n R^2 J_1^2(\lambda_n R)$, а $g(t)$ — неизвестная функция, предполагаемая непрерывной на $[0, R]$.

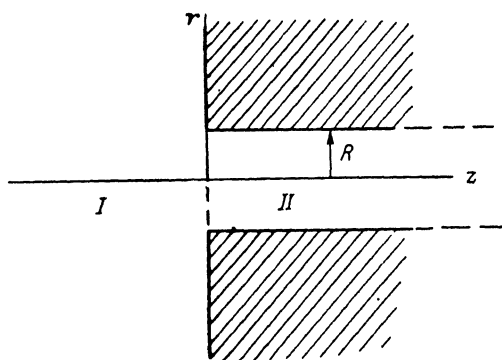


Рис. 1.

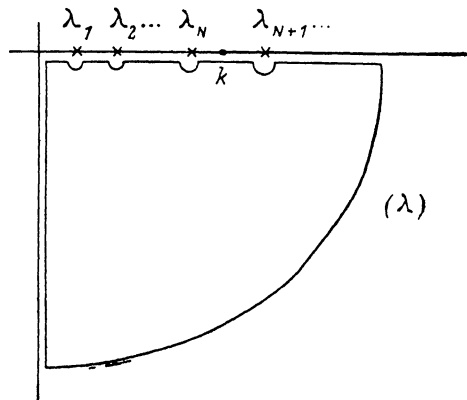


Рис. 2.

Легко показать, что уравнение (5) удовлетворяется такой подстановкой тождественно в силу соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} J_0(\lambda r) \sin(t \sqrt{\lambda^2 - k^2}) d\lambda &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \xi_n}{\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}} J_0(\lambda_n r) \sin(t \sqrt{\lambda_n^2 - k^2}) = \\ &= \frac{\text{ch}(k \sqrt{t^2 - r^2})}{\sqrt{t^2 - r^2}} \Theta(t - r), \end{aligned} \quad (9)$$

следующего из разложения правой части в интеграл Ханкеля и ряд Фурье-Бесселя соответственно (здесь $\Theta(x)$ — ступенчатая функция).

Уравнение (6) после интегрирования по $r dr$ приводится к виду

$$\int_0^R g(t) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n J_1(\lambda_n r) \sin(t \sqrt{\lambda_n^2 - k^2}) + \int_0^{\infty} J_1(\lambda r) \sin(t \sqrt{\lambda^2 - k^2}) d\lambda \right\} dt = -ikr. \quad (10)$$

Для вычисления ряда в ядре (10) рассмотрим, следуя [9], интеграл в комплексной плоскости переменной λ с разрезом от k до $+\infty$ по контуру, показанному на рис. 2,

$$\int_c \frac{J_0(\lambda R) - iY_0(\lambda R)}{J_0(\lambda R)} J_1(\lambda r) \sin(t\sqrt{\lambda^2 - k^2}) d\lambda (\equiv 0), \quad (11)$$

где $Y_0(\lambda R)$ — функция Неймана, а число N определяется из соотношения $\lambda_N < k < \lambda_{N+1}$ и равно числу распространяющихся в волноводе собственных мод.

Выбирая $\arg \sqrt{\lambda^2 - k^2} = 0$ на нижнем берегу разреза, можно показать, что в соответствии с правилом знаков (4) $\arg \sqrt{\lambda^2 - k^2} = -(\pi/2)$ на мнимой оси и на отрезке $[0, k]$. С учетом этого вычисление интеграла (11) и отделение в результате вещественной и мнимой частей дает формулу

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \xi_n J_1(\lambda_n r) \sin(t\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}) = \int_k^{\infty} J_1(\lambda r) \sin(t\sqrt{\lambda^2 - k^2}) d\lambda + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_0(\lambda R)}{I_0(\lambda R)} I_1(\lambda r) \operatorname{sh}(t\sqrt{\lambda^2 + k^2}) d\lambda - \int_0^k \frac{Y_0(\lambda R)}{J_0(\lambda R)} J_1(\lambda r) \operatorname{sh}(t\sqrt{k^2 - \lambda^2}) d\lambda, \quad (12)$$

переходящую в известную формулу суммирования Сривастава [9] при $k \rightarrow 0$. Необходимо отметить, что здесь (как и везде в дальнейшем) интегралы по отрезку $(0, k)$ от выражений, содержащих $J_0(\lambda R)$ в знаменателе при $k > \lambda_1$, должны пониматься, конечно, в смысле главного значения.

Наконец, вычисляя интеграл

$$\int_k^{\infty} J_1(\lambda r) \sin t\sqrt{\lambda^2 - k^2} d\lambda = \frac{t \cos(k\sqrt{r^2 - t^2})}{r\sqrt{r^2 - t^2}} \Theta(r - t) \quad (13)$$

и воспользовавшись формулой обращения Сонина [10], получим для определения $g(t)$ интегральное уравнение 2-го рода

$$g(t) = f(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^R H(x, t) g(x) dx \quad (14)$$

со свободным членом $f(t) = \frac{2}{\pi i} \operatorname{sh} kt$ и ядром

$$H(x, t) = i \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_n \xi_n}{\sqrt{k^2 - \lambda_n^2}} \operatorname{sh}(x\sqrt{k^2 - \lambda_n^2}) \operatorname{sh}(x\sqrt{k^2 - \lambda_n^2}) + \int_0^k \left[i + \frac{Y_0(\lambda R)}{J_0(\lambda R)} \right] \operatorname{sh}(x\sqrt{k^2 - \lambda^2}) \operatorname{sh}(t\sqrt{k^2 - \lambda^2}) \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_0(\lambda R)}{I_0(\lambda R)} \operatorname{sh}(x\sqrt{\lambda^2 + k^2}) \operatorname{sh}(t\sqrt{\lambda^2 + k^2}) \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2}}. \quad (15)$$

Из симметричности ядра и легко проверяемой положительной определенности его мнимой части следует, что если уравнение (14) разрешимо, то разрешимо однозначно. Несложный анализ показывает, что ядро (15) непрерывно во всех точках квадрата $x, t \in [0, R]$ $[0, R]$, кроме угла $x=t=R$, где оно имеет сильную особенность

$$H(x, t) \sim \frac{1}{2\pi[(R-x) + (R-t)]}, \quad x, t \rightarrow R. \quad (16)$$

Интегральное уравнение 2-го рода с ядром, имеющим такую особенность, возникает, например, при решении краевой задачи для уравнения Лапласа в сходной области [11]; выкладки, аналогичные проведенным в этой работе,

позволяют показать, что уравнение (14) действительно имеет непрерывное на $[0, R]$ решение $g(t)$, причем

$$g(t) \sim (R-t)^{1/2}, \quad t \rightarrow R. \quad (17)$$

Подставляя эту асимптотику в формулы (7), (8) и (2), (3), можно убедиться, что $\partial U / \partial z|_{z=0} \sim B(r) r^{-1/2}$, $r \rightarrow R$ в полном согласии с условием Мейкснера

на прямоугольном ребре. Совершенно аналогично может быть рассмотрена и «обратная» задача об излучении из волновода рис. 1 m -й нормальной волны единичной амплитуды, распространяющейся в волноводе справа налево. Решение ее ищется в виде

$$V_I(r, z) = \int_0^\infty B(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-iz\sqrt{k^2 - \lambda^2}} d\lambda, \quad (18)$$

$$V_{II}(r, z) = \sum_{n=1}^\infty b_n J_0(\lambda_n r) e^{iz\sqrt{k^2 - \lambda_n^2}} + J_0(\lambda_m r) e^{-iz\sqrt{k^2 - \lambda_m^2}}, \quad (19)$$

а коэффициенты b_n и амплитуда $B(\lambda)$ представляются формулами (7), (8) с заменой $A(\lambda) \rightarrow B(\lambda)$ и $a_n \rightarrow b_n + \delta_{mn}$; задача сводится к уравнению (14) с тем же ядром и свободным членом $f(t) = (2/\pi i) \operatorname{sh} t \sqrt{k^2 - \lambda_m^2}$.

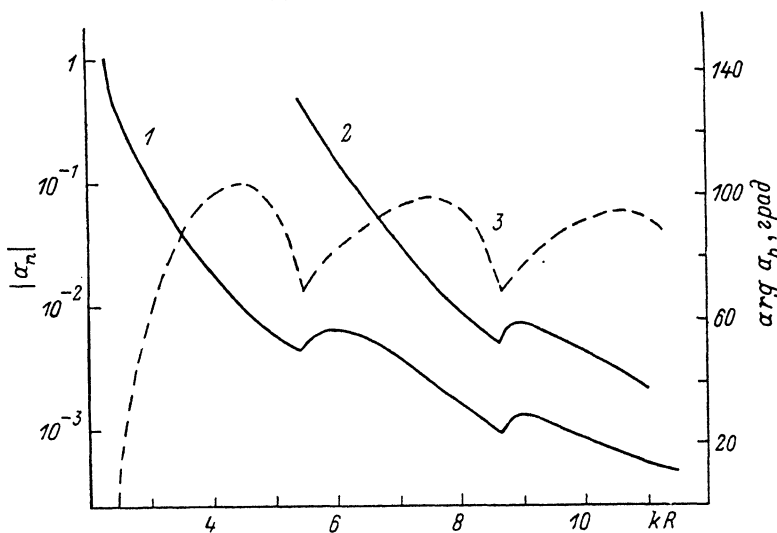


Рис. 3. Амплитуды и фазы коэффициентов отражения в задаче об излучении первой собственной моды.

По найденному решению этого уравнения можно восстановить не только амплитуды отраженных собственных мод, но и некоторые интегральные характеристики задачи. В частности, подстановка (8) в (18) и перемена порядка интегрирования дают выражение для $V(r, z)$ при $z < 0$

$$V_{II} = \int_0^R g(t) \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} J_0(\lambda r) \sin t \sqrt{\lambda^2 - k^2} e^{-iz\sqrt{\lambda^2 - k^2}} d\lambda dt. \quad (20)$$

Вычисляя внутренний интеграл, получим

$$V_{II} = \frac{1}{2i} \int_0^R g(t) \left[\frac{e^{-ik\zeta_-}}{\zeta_-} - \frac{e^{-ik\zeta_+}}{\zeta_+} \right] dt, \quad (21)$$

где $\zeta_{\pm} = \sqrt{r^2 + (z \pm it)^2}$.

Введя еще сферические координаты $\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$, $\cos \theta = z/\rho$ и разложив подынтегральное выражение в (21) по обратным степеням ρ , найдем формулу для главного члена асимптотики интенсивности излученного из волновода поля в дальней зоне

$$|V_{II}|_{\rho \rightarrow \infty}^2 \sim \rho^{-2} \left| \int_0^R g(t) \operatorname{sh}(kt \cos \theta) dt \right|^2. \quad (22)$$

Рассмотрим теперь величину

$$q_z(r, z) = -\operatorname{Im} \left(V^* \frac{\partial V}{\partial z} \right), \quad (23)$$

пропорциональную z -компоненте плотности потока излучения, и определим ее значение в плоскости $z=0$

$$q_z(r, 0) = \begin{cases} 0, & r > R, \\ -\operatorname{Im} \int_0^\infty \sqrt{\lambda^2 - k^2} B(\lambda) J_0(\lambda r) \int_0^\infty B^*(\mu) J_0(\mu r) d\mu d\lambda, & r < R. \end{cases} \quad (24)$$

Подставляя вместо $B^*(\mu)$ ее интегральное представление (8), интегрируя полученное равенство по площади выходного отверстия и меняя, где надо, по-

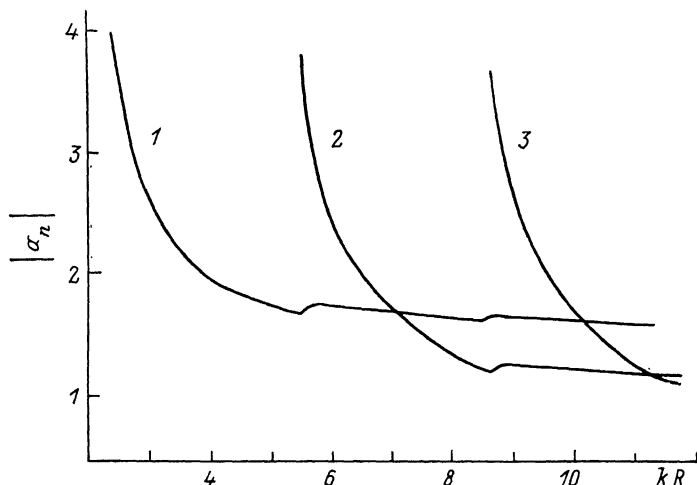


Рис. 4. Амплитуды коэффициентов прохождения в задаче о падении плоской волны.

рядки интегрирования, получим для полного потока излучения из волновода выражение вида

$$\begin{aligned} s &\sim \int_0^R q_z(r, 0) r dr = -\operatorname{Im} \int_0^\infty d\lambda \sqrt{\lambda^2 - k^2} B(\lambda) \int_0^R r dr J_0(\lambda r) \int_r^R g^*(t) \frac{\operatorname{ch} k \sqrt{t^2 - r^2}}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt = \\ &= -\operatorname{Im} \int_0^\infty d\lambda \sqrt{\lambda^2 - k^2} B(\lambda) \int_0^R g^*(t) \frac{\sin t \sqrt{\lambda^2 - k^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} dt = \\ &= -\operatorname{Im} \int_0^\infty B(\lambda) B^*(\lambda) \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{\lambda} d\lambda = \int_0^k \frac{\sqrt{k^2 - \lambda^2}}{\lambda} |B(\lambda)|^2 d\lambda = \int_0^k d\lambda \left| \int_0^R g(t) \operatorname{sh} \lambda t dt \right|^2. \end{aligned} \quad (25)$$

В качестве иллюстрации применения развитого метода на рис. 3, 4 приведены результаты расчета коэффициентов прохождения и (или) отражения нор-

мальных волн как функции параметра kR , основанного на численном решении уравнения (14). Несмотря на наличие особенности в ядре, такое численное решение не вызывает затруднений и не требует применения специальных квадратурных формул.

Интересно отметить в заключение, что часть ядра, выражаемая последним интегралом в (15) и имеющая асимптотику (16), не исчезает при переходе к безразмерным переменным и пределу $kR \rightarrow 0$ (что следует сразу хотя бы из соображений размерности). Это обстоятельство наводит на мысль о неоптимальности представлений (7), (8), а также соответствующих представлений статической задачи [11]. Поиск более удачных представлений может служить предметом дальнейших исследований по развитию метода; с точки зрения приложений интересным представляется обобщение описанного формализма на векторные задачи, в том числе с наклонным падением волны.

Список литературы

- [1] Воскресенский Г. В., Журов С. М. // РИЭ. 1976. Т. 21. № 7. С. 1390—1395.
- [2] Рикенглаз Л. Э. // ЖТФ. 1975. Т. 45. Вып. 9. С. 1793—1797.
- [3] Itoh T., Mittra R. // Proc. IEEE. 1971. Vol. 59. P. 1131—1133.
- [4] MacPhie R. H., Zaghoul A. J. // IEEE Trans. on Antennas Propag. 1980. Vol. AP-28. P. 497—503.
- [5] Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 327 с.
- [6] Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.
- [7] Ахиезер Н. И., Ахиезер А. И. // ДАН СССР. 1956. Т. 109. № 1. С. 53—56.
- [8] Зильбергейт А. С., Златина Н. И. // Изв. АН АрмССР. Сер. Механика. 1978. Т. 31. № 3. С. 18—30.
- [9] Seeddon I. Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory. Amsterdam, 1966. 283 p.
- [10] Сонин Н. Я. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. М.: Гостехиздат, 1954. 244 с.
- [11] Занадворов Н. П. // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 3. С. 566—572.

Поступило в Редакцию
13 марта 1989 г.
В окончательной редакции
11 октября 1989 г.