01

КОМПАКТНЫЙ АНАЛОГ ГЕТЕРОГЕННОЙ СИСТЕМЫ СО СТРУКТУРОЙ ШАХМАТНОГО ПОЛЯ

Ю. П. Емец, Ю. В. Обносов

Исследуется распределение тока в плоской квадратной пластине с кусочно-однородной электропроводной средой. Такая пластина представляет собой элементарную ячейку неограниченной гетерогенной системы со структурой шахматного поля при некоторой ориентации в ней протекания внешнего тока. Показано, что распределение тока в ячейке периодически повторяет картину поля гетерогенной системы и позволяет аналитически изучать ее параметры и характеристики.

Введение

Свойства неоднородных сред вследствие обычно их сложного строения исследуются преимущественно приближенными методами. В этом отношении большой теоретический интерес вызывают точно разрешимые модели. К числу одной из важных (подробное изучение которой начато лишь сравнительно недавно) необходимо отнести плоскую двухкомпонентную среду со структурой шахматного поля, светлые и темные клетки которой отождествляются с различными материалами, например имеющими разные удельные электрические сопротивления. Такая система, в качестве которой в практическом воплощении выступают пленки и покрытия, имеет критическую концентрацию компонентов и моделирует фазовый переход металл—диэлектрик: при неограниченном возрастании удельного электрического сопротивления одного из двух материалов протекание тока в среде прерывается. Если одномерная среда с периодическим расположением различных материалов в зависимости от направления внешнего тока образует систему с последовательным или параллельным соединением элементов, т. е. в целом предстает анизотропной, то композит с двоякопериодическим расположением компонентов в среднем изотропен и его можно рассматривать как систему со смешанным (последовательно-параллельным) соединением двух материалов.

Эффективные параметры и средние значения электрического поля рассматриваемого композита были определены точно с помощью преобразований симметрий, характеризующих распределение тока в системе [1]. В дальнейшем строгий анализ системы, основанный на решении краевой задачи о распределении тока, позволил дать четкую физическую интерпретацию преобразованиям симметрий как линейным соотношениям между векторами плотности тока в комплексно-сопряженных точках смежных ячеек [2].

Необходимо отметить, что постановка краевой задачи для системы, состоящей из бесконечного числа ячеек, затруднена. В силу двоякопериодичности достаточно, по всей видимости, ограничиться рассмотрением только двух смежных ячеек, имеющих разные удельные электрические сопротивления. Но даже эта начальная стадия исследования задачи требует непростого математического обоснования, поскольку граничные соотношения записываются для клеток, имеющих только один участок соприкасания, и в общей постановке получается краевая задача сопряжения со сдвигом. Последнюю, однако, удается свести к относительно более простой задаче — задаче Маркушевича, которая полностью поддается исследованию и в конечном итоге позволяет получить искомое решение в замкнутом виде [2].

Расчетная модель

Сложности, возникающие при исследовании неограниченной гетерогенной системы со структурой шахматного поля, легко преодолеваются, если свести изучение ее характеристик и свойств к расчету двухмерного поля в пластине, показанной на рис. 1. Эта пластина представляет собой квадратную ячейку, заполненную двумя материалами с разными удельными электрическими сопротивлениями ρ_1 и ρ_2, занимающими ровно половину квадрата (треугольные подобласти). На двух противоположных сторонах квадрата ab и dc расположены электроды, которыми к ячейке подводится внешний ток. Две другие стороны ad

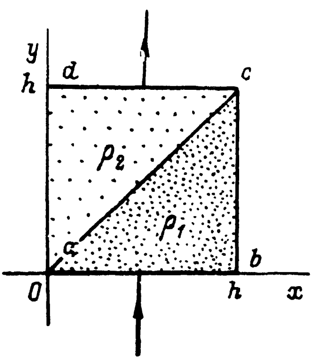

Рис. 1.

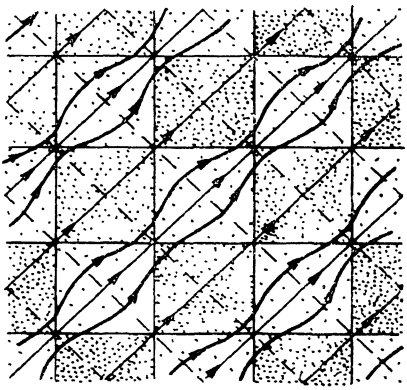

Рис. 2.

и bc контактируют с диэлектриками. Полное сопротивление такой ячейки (сопротивление между электродами) определяется формулой $R=\sqrt{\rho_1\rho_2}$, что в точности совпадает с выражением эффективного удельного сопротивления системы с шахматным строением, причем распределение тока в квадрате представляет собой фрагмент картины распределения тока во всем неоднородном материале.

К использованию ячейки указанного вида в качестве расчетной модели неограниченного по размерам композита можно прийти следующими простыми рассуждениями. Пусть в неоднородной системе рассматриваемого вида вектор внешнего тока направлен вдоль диагонали квадратов. Тогда в композите с двоякопериодической структурой следует ожидать картину распределения тока, качественно показанную на рис. 2, где траектории протекания тока — сплошные линии со стрелками. В силу симметрии текстуры линии тока, проходящие вдоль диагоналей, должны быть прямыми. Пунктирными линиями на рис. 2 показаны эквипотенциали, по соображениям симметрии на диагоналях они также будут прямыми. Таким образом, линии протекания и эквипотенциали на диагоналях квадратных ячеек образуют прямолинейную ортогональную сетку. Эти чисто умозрительные рассуждения получают строгое обоснование точным решением краевой задачи [2].

Используя известные свойства плоского электрического поля в проводниках о том, что эквипотенциали совпадают с границей идеально проводящего электрода, а линии протекания тока повторяют контур диэлектриков, между соседними прямолинейными отрезками линий протекания и эквипотенциалей можно выделить квадратную ячейку, заштрихованную на рис. 2 и изолированно представленную на рис. 1. Распределение тока в ячейке зеркальным отображением относительно ее прямолинейных граничных участков дает картину электрического поля в двух смежных ячейках, которая двоякопериодически повторяется по всей системе. Вполне очевидно, что задача физического моделирования и теоретического исследования электрического поля в неограниченной среде существенно упрощается, если ее удается свести к изучению поля в отдельно выделенной ячейке конечных размеров.

Краевая задача и ее решение

В расчетах плоского распределения тока удобно использовать комплексное представление векторов плотности тока и напряженности электрического поля

$$j(z) = j_x - ij_y, \quad E(z) = E_x - iE_y \, (z = x + iy). \tag{3.1}$$

Согласно исходным уравнениям поля ($\mathrm{div}\mathbf{J}=0$ и $\mathrm{rot}\mathbf{E}=0$), эти векторы везде, кроме границ раздела сред, являются аналитическими функциями и связаны законом Ома

$$j(z) = \rho E(z). \tag{3.2}$$

При условиях омического контакта на идеально проводящих электродах ($L' = ab + dc$) касательная составляющая вектора напряженности электрического поля, а на диэлектрических участках границы ($L'' = ad + bc$) нормальная к ним компонента вектора плотности тока равны нулю

$$E_{xk}(t) = 0, \ t \in L'; \ j_{xk}(t) = 0, \ t \in L'' \ (k = 1, 2). \tag{3.3}$$

Индексы 1 и 2 присваиваются полевым величинам в треугольных областях соответственно с удельными сопротивлениями ρ_1 и ρ_2 (рис. 1).

На границе разнородных сред ($L'' = ac$) касательные компоненты вектора электрического поля и нормальные составляющие вектора плотности тока непрерывны

$$E_{\tau}(t) = E_{\tau 2}(t), \quad t_{n1}(t) = j_{n2}(t), \ t \in L'''. \tag{3.4}$$

В обозначениях векторов тока $j_k(z)$ граничные соотношения (3. 3) и (3. 4) на основании формул (3. 1) и (3. 2) записываются так:

$$\begin{gathered} \mathrm{Re}\, j_k(t) = 0, \quad t \in L' + L'', \\ j_1(t) = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2\rho_1} j_2(t) + \frac{\rho_1 - \rho_2}{2\rho_1} \overline{j_2(t)}, \ t \in L'''. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Это — граничные соотношения однородной краевой задачи Маркушевича с разрывными коэффициентами.

Дополнительно может быть задано интегральное условие в форме

$$J = \int_0^h j_{y1}(x, 0)\, dx \tag{3.6}$$

или

$$J = \int_0^h j_{y2}(x, h)\, dx,$$

где величина полного тока J, протекающего через электрод, считается известной; h — длина стороны квадрата.

Решение краевой задачи (3. 5), (3. 6) несложно получить, если воспользоваться преобразованием симметрии

$$j_1(z) = -\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}\, \overline{j_2(i\bar{z})}, \tag{3.7}$$

которое устанавливает линейное соотношение между векторами тока $j_1(z)$ и $j_2(z)$ в точках, зеркально симметричных относительно отрезка прямой ac. Пояснения операций сопряжения показаны на рис. 3.

Линейное соотношение (3.7) вытекает из граничных условий (3. 5). Действительно, в силу первого равенства (3. 5)

$$\operatorname{Im} j_k^2(t)=0, \quad t \in L'+L''. \tag{3.8}$$

Возведение в квадрат левой и правой частей второго условия (3. 5) дает

$$j_1^2(t)=\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2\rho_1}\right)^2 j_2^2(t)-\left(\frac{\rho_1-\rho_2}{2\rho_1}\right)^2 \overline{j_2^2(t)}+2i\,\frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{4\rho_1^2}\, j_1(t)\,\overline{j_2(t)}, \quad t \in L''.$$

Прибавление к этому равенству комплексно-сопряженного с ним равенства позволяет получить соотношение

$$\operatorname{Re} j_1^2(t)=\frac{\rho_2}{\rho_1}\operatorname{Re}\overline{j_2^2(t)}, \quad t \in L''. \tag{3.9}$$

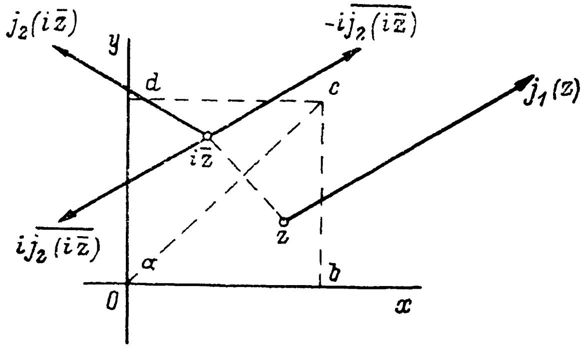

Рис. 3.

Теперь в треугольнике abc (рис. 1) можно ввести аналитическую функцию

$$F(z)=j_1^2(z)-\frac{\rho_2}{\rho_1}\overline{j_2^2(i\bar z)}. \tag{3.10}$$

Для определения функции $F(z)$ имеем краевую задачу

$$\begin{gathered}\operatorname{Im} F(t)=0, \quad t \in L'+L'',\\ \operatorname{Re} F(t)=0, \quad t \in L'''.\end{gathered} \tag{3.11}$$

Любое нетривиальное решение задачи (3. 11) по крайней мере в одной из угловых точек a, b, c треугольника abc будет иметь полюс не ниже 2-го порядка. На самом же деле токи $j_1(z)$ и $\overline{j_2(i\bar z)}$ не могут иметь в указанных точках полюсы 1-го порядка, поэтому, согласно представлению (3. 10), должно быть $F(z)\equiv 0$. Тогда из формулы (3. 10) следуют два соотношения

$$j_1(z)=\pm\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}\;\overline{j_2(i\bar z)}, \tag{3.12}$$

одно из которых совпадает с вышеприведенным (3. 7), а второе отвечает случаю, когда вектор внешнего тока в системе (рис. 2) направлен вдоль другой диагонали квадратов, соответственно тогда электроды в ячейке на рис. 1 должны быть размещены на отрезках ad и bc в отличие от принятой схемы. Таким образом, выбор положительного или отрицательного знака в соотношениях (3.12) определяется принятым направлением протекания внешнего тока вдоль одной из двух диагоналей квадратов в неоднородной системе.

С помощью соотношения (3.7) исходная задача Маркушевича (3.5) преобразуется в условия краевой задачи Гильберта в треугольнике abc

$$\left\{\begin{aligned}&\operatorname{Re} j_1(t)=0, \quad t \in L'+L'',\\ &\operatorname{Im}\{e^{-(i\pi/2)(1-\gamma)} j_1(t)\}=0, \quad t \in L''',\end{aligned}\right. \tag{3.13}$$

де

$$\gamma = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{2\sqrt{\rho_1 \rho_2}}\right) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{\Delta}{\sqrt{1-\Delta^2}}\right).$$

Здесь Δ — относительное удельное электрическое сопротивление

$$\Delta = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}, \quad -1 \leqslant \Delta \leqslant 1. \tag{3.14}$$

Краевая задача (3. 13) решается, например, методом конформных отображений. Последовательность выполнения отображений показана на рис. 4. Заключительное отображение дается функцией

$$\zeta = i\left[\frac{2 - \operatorname{sn}^2\left(\frac{Kz}{h}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{Kz}{h}\right)}\right]^{\gamma} = 2^{\gamma} i\left[\frac{\operatorname{dn}\left(\frac{Kz}{h}\right)}{\operatorname{sn}\left(\frac{Kz}{h}\right)}\right]^{2\gamma}, \tag{3.15}$$

где K — полный эллиптический интеграл 1-го рода с модулем $k = 1/\sqrt{2}$

$$K(k) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right),$$

$\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

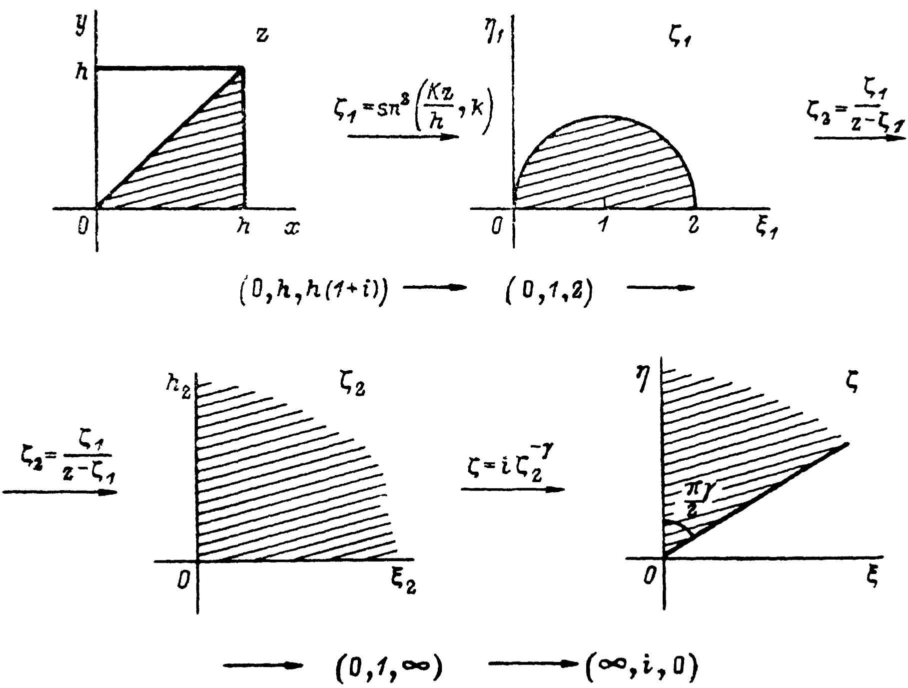

Рис. 4.

На основании формулы (3. 15) записывается выражение для вектора плотности тока в треугольнике abc (рис. 1)

$$j_1(z) = iC\left[\frac{\operatorname{dn}\left(\frac{Kz}{h};\ k\right)}{\operatorname{sn}\left(\frac{Kz}{h};\ k\right)}\right]^{2\gamma}. \tag{3.16}$$

Здесь C — действительная постоянная. Пользуясь свойствами преобразования функций Якоби, можно получить равенство

$$\overline{j_1(iz)} = e^{-i\pi(1-\gamma)} j_1(z). \tag{3.17}$$

С другой стороны, из соотношения (3. 7) следует, что

$$j_2(z) = -\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\, \overline{j_1(i\bar{z})}. \tag{3.18}$$

Последнее равенство с учетом предыдущих формул (3. 16) и (3. 17) позволяет получить выражение для вектора плотности тока в треугольнике acd (рис. 1)

$$j_2(z) = iCe^{i\pi\gamma}\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\left[\frac{\operatorname{dn}\left(\frac{Kz}{h};\ k\right)}{\operatorname{sn}\left(\frac{Kz}{h};\ k\right)}\right]^{2\gamma}. \tag{3.19}$$

Формулы (3. 16) и (3. 19) дают искомое решение задачи о распределении тока в квадратной ячейке с кусочно-однородной средой при смешанном соединении удельных сопротивлений (рис. 1). Неопределенная в этих формулах действительная постоянная C находится из интегрального условия (3. 6), где используется выражение (3. 16). Вычисление интеграла в соотношении (3. 6) дает следующее значение числа C:

$$C = J\,\frac{2^{-1/2+\gamma}}{\pi\sqrt{\pi}\,h}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)}. \tag{3.20}$$

Определением постоянной полностью завершается решение полевой задачи. Остается только обратить внимание на тот факт, что полученные формулы записаны для вектора плотности тока в комплексной форме, аналитическое представление которого (3. 1) отличается от соответствующего вектора в физической плоскости комплексным сопряжением, поэтому описываемая им картина распределения тока зеркально-симметрична истинному распределению тока. При необходимости переход к физическому полю осуществляется применением операции комплексного сопряжения к вектору $j(z)$.

Некоторые интегральные характеристики

Зная распределение тока во всей области рассматриваемой квадратной ячейки, несложно вычислить ее интегральное сопротивление R. Последнее определяется из интегрального закона Ома

$$U = RJ, \tag{4.1}$$

где U — напряжение между электродами, а J — полный ток электродов.

Напряжение U можно получить, находя разность потенциалов вдоль одной из сторон квадрата, например ad (рис. 1),

$$U = \int_0^h E_{y2}(0,\ y)\,dy = \rho_2\int_0^h j_{y2}(0,\ y)\,dy \tag{4.2}$$

или на другой его стороне bc

$$U = \int_h^{h(1+i)} E_{y1}(h,\ y)\,dy = \rho_1\int_h^{h(1+i)} j_{y1}(h,\ y)\,dy.$$

Соотношение (4. 2) с подынтегральным выражением (3. 19) имеет представление

$$U = C\sqrt{\rho_1\rho_2}\,\frac{\pi\sqrt{\pi}h}{2^{-1/2+\gamma}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)}. \tag{4.3}$$

Подстановка выражения (3. 20) в формулу (4. 3) дает соотношение

$$U=\sqrt{\rho_1\rho_2}\,J. \tag{4.4}$$

Сравнение формул (4. 1) и (4. 4) показывает, что интегральное сопротивление исследуемого двухкомпонентного композита со смешанным (т. е. последовательно-параллельным) соединением элементов имеет выражение

$$R=\sqrt{\rho_1\rho_2}. \tag{4.5}$$

Выражение (4. 5) является также значением эффективного удельного электрического сопротивления гетерогенной системы со структурой шахматного поля, т. е.

$$R=\rho_{\mathrm{eff}}. \tag{4.6}$$

Равенство (4. 6) обосновывается тем, что рассматриваемая квадратная ячейка выступает в качестве простейшего периодического элемента всей неоднородной системы и метод вычисления ее сопротивления R по сути равносилен определению величины ρ_{eff}.

По определению параметр ρ_{eff} характеризует средние свойства неоднородного материала и отвечает усредненному закону Ома

$$\langle E\rangle=\rho_{\mathrm{eff}}\langle j\rangle. \tag{4.7}$$

В данном случае, на первый взгляд, усреднение (обозначаемое, как принято, угловыми скобками) должно проводиться по области двух полных квадратов, имеющих разные удельные сопротивления ρ_1 и ρ_2. Однако при направлении вектора внешнего тока вдоль одной из диагоналей квадратов в каждом из них устанавливается картина распределения тока, зеркально-симметричная относительно двух диагоналей, поэтому фактически можно выделить только по четверти области смежных квадратов, что и образует ячейку, представленную на рис. 1. Средние величины векторов напряженности поля и плотности тока, фигурирующие в соотношении (4. 7), эквивалентны напряжению U на ячейке и полному току J, протекающему через нее.

Кусочно-однородный квадрат со смешанным соединением сопротивлений обладает следующим интересным свойством: протекание в нем тока сопровождается равным нагревом светлой и темной областей независимо от того, какие они имеют удельные электрические сопротивления. Действительно, с помощью преобразования симметрии (3. 7) легко доказывается, что в точках, симметричных относительно прямой ac, джоулев нагрев одинаков

$$\rho_1|j_1|^2=\rho_1 j_1(z)\,\overline{j_1(z)}=\rho_2\overline{j_2(i\bar z)}\,j_2(i\bar z)=\rho_2|j_2|^2, \tag{4.8}$$

а следовательно, и в целом энергия диссипирует в треугольных областях abc и abd поровну.

Полученный результат в полной мере относится и к гетерогенной системе, имеющей структуру шахматного поля, в которой в светлых и темных клетках также диссипируют равные энергии и они нагреваются одинаково.

При этом следует иметь в виду, что по отношению к неоднородной системе указанное свойство справедливо лишь при условии, когда вектор внешнего тока J направлен вдоль диагонали квадратов (любой из них), поскольку только в этом случае устанавливается картина распределения тока (рис. 2), характеризуемая преобразованием симметрии (3. 7), позволившим доказать равенство (4. 8). При любом другом направлении вектора J симметрии поля, определяемые соотношениями (3. 12), отсутствуют; не вполне очевидна тогда и связь ячейки, показанной на рис. 1, с гетерогенной системой, представленной на рис. 2. Электрические характеристики неоднородной среды, следовательно, зависят от направления в ней вектора внешнего тока. Что же касается эффективного удельного сопротивления $\rho_{\mathrm{eff}}=\sqrt{\rho_1\rho_2}$, то этот параметр остается справедливым при любом направлении вектора J, так как неоднородная система в целом изотропна и ее средние свойства не зависят от выбора направления протекания внешнего тока.

Формула $\rho_{eff}=\sqrt{\rho_1\rho_2}$ и равенство (4. 8) были первоначально установлены в [1], причем при их получении также использовались преобразования симметрии, которые вводились в качестве исходных посылок в проведенных исследованиях. В указанной работе [1] рассматривалась случайно неоднородная среда с половинным составом компонентов, находящихся в геометрически эквивалентных условиях. Для гетерогенной системы со структурой шахматного поля соотношения симметрий получают строгое обоснование, при этом доказывается, что имеется не одно, а два преобразования симметрий (3. 12), отличающихся друг от друга знаками. Важно подчеркнуть, что эти преобразования, как уже отмечалось, имеют место только в частных случаях. Если направление вектора внешнего тока не совпадает с диагоналями квадратов, то симметрия распределения тока (3. 12) не проявляется и равенство (4. 8), указывающее на одинаковый нагрев светлых и темных ячеек, невозможно. В этой связи возникает вопрос, в какой мере справедливо применение преобразований симметрий к случайно неоднородным средам. Ответ на этот вопрос можно, по-видимому, получить обращаясь к опытным данным.

Список литературы

[1] *Дыхне А. М.* // ЖЭТФ. 1970. Т. 59. Вып. 7. С. 110—115.
[2] *Емец Ю. П.* Электрические характеристики композиционных материалов с регулярной структурой. Киев: Наукова думка, 1986. 191 с.

Институт электродинамики АН УССР
Киев

Поступило в Редакцию
27 февраля 1989 г.