

01; 04; 09

© 1990 г

К ВОПРОСУ О ПРОХОЖДЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ ПЛАЗМУ С БЫСТРО РАСТУЩЕЙ КОНЦЕНТРАЦИЕЙ

Л. Г. Глазов, А. А. Рухадзе

На основе простых моделей исследованы характерные особенности прохождения электромагнитной волны через слой плазмы с быстро растущей концентрацией. Показано, что прохождение волны через плазму продолжается некоторое время после достижения концентрацией критического значения. Поэтому, в частности, результирующая плотность плазмы при пробе газа среднего давления сверхсильной СВЧ волной может существенно превышать критическую.

Введение

Широко известно решение задачи о прохождении электромагнитной волны через слой плазмы с постоянной концентрацией [1, 2]. Характерным эффектом в этом случае при достаточной толщине слоя является полное отражение волны, если $\omega_p > \omega_0$. Настоящая работа посвящена исследованию в одномерном случае (рис. 1) прохождения волны через слой плазмы, концентрация которой растет не слишком медленно по сравнению с периодом колебаний поля волны.

Будем считать падающую волну монохроматической и линейно поляризованной ($E \parallel z$)

$$E_{\text{пад}}(x, t) = E_0 \exp[-i\omega_0(t - x/c)]. \quad (1)$$

Запишем уравнения для полей падающей и отраженной волн ($E^-, x \leq 0$), прошедшей через плазменный слой волны ($E^+, x \geq L$)

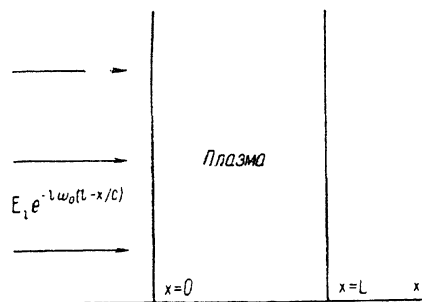


Рис. 1. Прохождение волны через плазменный слой. Геометрия задачи.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E^\pm}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E^\pm}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

и для поля в плазме ($0 \leq x \leq L$)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E^p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E^p}{\partial x^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j_x}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

где j_x — компонента плотности тока.

Из уравнений Максвелла следует требование непрерывности E и $\partial E/\partial x$ на поверхностях плазменного слоя.

Будем считать, что частицы плазмы движутся строго вдоль вектора E волны. Такая ситуация имеет место 1) при прохождении волны через первоначально холодную бесстолкновительную плазму, рост концентрации которой определяется, например, внешним ионизатором, 2) при пробе газового слоя малого и среднего давления сверхсильной СВЧ волной [3, 4]. Тогда уравнение (3) принимает вид

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E^p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E^p}{\partial x^2} + \frac{1}{c^2} \omega_p^2(x, t) E^p = 0, \quad (3')$$

$\omega_p(x, t) = [4\pi e^2 n(x, t)/m]^{1/2}$ — плазменная частота.

Для полного определения задачи необходимо знать зависимость ω_p от E , которая, вообще говоря, нелинейна и нелокальна по времени. Ниже рассмотрены две простые модельные задачи, допускающие аналитическое решение и дающие возможность исследовать качественные изменения характера прохождения волны через плазму при быстром росте концентрации последней.

Чтобы не усложнять задачу рассмотрением эффектов, связанных с распространением в плазме фронта волны, будем считать, что в момент «включения» волны концентрация плазмы была пренебрежимо малой. Это равносильно тому, что волна «включена» в бесконечно далеком прошлом, а концентрация плазмы стремится к нулю при $t \rightarrow -\infty$. Такая постановка задачи однозначно определяет асимптотическое начальное условие: при $t \rightarrow -\infty$ волна проходит через плазму без деформации.

1. Экспоненциальный рост концентрации

Прежде всего рассмотрим случай экспоненциального роста концентрации с заданной частотой ионизации:

$$\omega_p^2(x, t) = \omega_{p0}^2 e^{\gamma t}, \quad \omega_{p0}, \gamma = \text{const}, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (4)$$

Будем искать решение в виде

$$E^{+, -, p}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{+, -, p}(x) \exp[(n\gamma - i\omega_0)t]. \quad (5)$$

Для однозначного определения функций $E_n^{+, -, p}(x)$ необходимо учесть граничные условия непрерывности E и $\partial E/\partial x$ на границах плазменного слоя, а также потребовать, чтобы при $x < 0$ вправо распространялась только падающая волна $E_{n\text{вх}}$, а при $x > L$ не было волн, распространяющихся влево. Тогда для $E_n(x)$ получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} E_0^{+, -, p}(x) &= E_i \exp(-z_0 x), \\ E_n^-(x) &= C_n \exp(z_n x), \quad n > 0, \\ E_n^+(x) &= B_n \exp(-z_n x), \quad n > 0, \end{aligned}$$

$$E_n^p(x) = \sum_{m=0}^n \alpha_{nm} [A_m \exp(z_m x) + P_m \exp(-z_m x)], \quad n > 0. \quad (6)$$

Здесь

$$\alpha_{nm} = \left(\frac{\omega_{p0}}{\gamma}\right)^{2(n-m)} \frac{(-1)^{n-m} \Gamma(1+2m-2i\omega_0/\gamma)}{(n-m)! \Gamma(n+m+1-2i\omega_0/\gamma)}, \quad z_n = \frac{-i\omega_0 + n\gamma}{c},$$

а константы A_n, P_n, C_n, B_n определяются рекуррентными соотношениями

$$P_n = -\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_{nm} \{(1 - z_m/z_n) A_m + (1 + z_m/z_n) P_m\},$$

$$A_n = -\frac{1}{2} \exp(-z_n L) \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_{nm} \{(1 + z_m/z_n) \exp(z_m L) A_m + (1 - z_m/z_n) \exp(-z_m L) P_m\},$$

$$C_n = \frac{1}{2} [1 - \exp(-z_n L)] \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_{nm} \{(1 + z_m/z_n) A_m + (1 - z_m/z_n) P_m\},$$

$$B_n = \exp(z_n L) \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_{nm} \left\{ \frac{1}{2} [\exp(z_m L) - \exp(-z_n L)] (1 - z_m/z_n) A_m + \right. \\ \left. + [\exp(-z_m L) - \exp(-z_n L)] P_m \right\}, \quad (7)$$

где $P_0 = B_0 = E_i$, $A_0 = C_0 = 0$.

Соотношения (7) сильно упрощаются в случае широкого слоя

$$\exp[-\gamma L/c] \ll 1. \quad (8)$$

Тогда

$$P_n = -\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_{nm} (1 + z_m/z_n) P_m, \quad A_n \sim \exp(-z_n L) \simeq 0, \\ C_n = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_{nm} (1 - z_m/z_n) P_m, \quad B_n = \alpha_{n0} \exp[n\gamma L/c] \cdot E_i. \quad (7')$$

При выполнении условия (8) легко суммируется ряд (5) для поля прошедшей через слой волны

$$E^+(x, t) = E_i \exp[-i\omega_0(t - x/c)] \cdot F_{-2i\omega_0/\gamma} \left\{ \frac{\omega_{p0}}{\gamma} \exp\left[\gamma\left(t - \frac{x-L}{c}\right)/2\right] \right\} = \\ = E_i \left(\frac{2\omega_{p0}}{\gamma}\right)^{2i\omega_0/\gamma} \Gamma\left(1 - \frac{2i\omega_0}{\gamma}\right) J_{-2i\omega_0/\gamma} \left\{ \frac{2\omega_{p0}}{\gamma} \exp\left[\gamma\left(t - \frac{x-L}{c}\right)/2\right] \right\} \exp(i\omega_0 L/c), \quad (9)$$

где J_ν — функция Бесселя, а

$$F_{-i\nu}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(1 - i\nu)}{n! \Gamma(n - i\nu + 1)} a^{2n}. \quad (10)$$

Поле волны в плазме на достаточном удалении от границы раздела $x = 0$ ($\exp(-\gamma L/c) \ll 1$) имеет вид

$$E^p(x, t) = E_i \exp[-i\omega_0(t - x/c)] \cdot F_{-2i\omega_0/\gamma} \left(\frac{\omega_p(t)}{\gamma}\right) = \\ = E_i \left(\frac{2\omega_{p0}}{\gamma}\right)^{2i\omega_0/\gamma} \Gamma\left(1 - \frac{2i\omega_0}{\gamma}\right) \exp(i\omega_0 x/c) J_{-2i\omega_0/\gamma} \left(\frac{2\omega_p(t)}{\gamma}\right). \quad (11)$$

2. Ионизация волной: неоднородный профиль концентрации

Рассмотрим модель, в которой ионизирующая способность движущихся в поле сверхсильной волны частиц плазмы не зависит от их скорости, т. е. в каждой точке плазмы концентрация экспоненциально растет во времени. Однако плотность плазмы будет неоднородна по пространственной координате, так как ионизационные процессы в произвольной точке x запаздывают по отношению к $x=0$ на время x/c (считаем концентрацию плазмы в момент «включения» волны исчезающе малой). Таким образом, будем считать

$$\omega_p^2(x, t) = \omega_{p0}^2 \exp[\gamma(t - x/c)]. \quad (12)$$

Переходя в (2), (3') к переменным x , $\tau = t - x/c$, имеем систему уравнений

$$\left\{ \frac{2}{c} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} E^\pm = 0, \\ \left\{ \frac{2}{c} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\omega_{p0}^2}{c^2} e^{\gamma \tau} \right\} E^p = 0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 E^-(0, \tau) &= E^p(0, \tau), \quad E^p(L, \tau) = E^+(L, \tau), \\
 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{c\partial \tau} \right\} E^-(x, \tau)|_{x=0} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{c\partial \tau} \right\} E^p(x, \tau)|_{x=0}, \\
 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{c\partial \tau} \right\} E^+(x, \tau)|_{x=L} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{c\partial \tau} \right\} E^p(x, \tau)|_{x=L}.
 \end{aligned} \quad (14)$$

Ищем решение системы (13) в виде (5) ($t \rightarrow \tau$). С учетом замечаний, сделанных в разделе 1, получаем общее решение

$$\begin{pmatrix} E^+(x, \tau) \\ E^p(x, \tau) \end{pmatrix} = E_i e^{-i\omega_0 t} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{\omega_{p0}^2 e^{\gamma L}}{2c\gamma} \right]^n \frac{\Gamma(1 - i\omega_0/\gamma)}{\Gamma(n+1 - i\omega_0/\gamma)} \begin{pmatrix} E_n(1) \\ E_n(x/L) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где функции $E_n(y)$, $0 \leq y \leq 1$ определяются рекуррентным соотношением

$$E_n(y) = \int_y^1 E_{n-1}(y') \exp[2z_n L(y - y')] dy' + \int_0^y E_{n-1}(y') dy', \quad E_0(y) \equiv 1. \quad (16)$$

Решение при $x < 0$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 E^-(x, \tau) &= E_i \exp(-i\omega_0 \tau) + E_i \exp[-i\omega_0(t + x/c)] \times \\
 &\times \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{\omega_{p0}^2}{2c\gamma} \exp\{\gamma(t + x/c)\} \right]^n \frac{\Gamma(1 - i\omega_0/\gamma)}{\Gamma(n+1 - i\omega_0/\gamma)} E_n(0).
 \end{aligned} \quad (17)$$

Второй член в (17) описывает поле отраженной волны.

Выражение для поля прошедшей через плазменный слой волны упрощается в случае широкого слоя ($\exp[-2\gamma L/c] \ll 1$, $x \gg c/\omega_0$) и имеет вид

$$\begin{aligned}
 E^+(x, \tau) &= E_i \exp(-i\omega_0 \tau) \cdot F_{-i\omega_0/\gamma} \left\{ \left(\frac{L}{2c\gamma} \right)^{1/2} \omega_{p0} \exp(\gamma\tau/2) \right\} = \\
 &= E_i \Gamma\left(1 - \frac{i\omega_0}{\gamma}\right) \left[\frac{L\omega_{p0}^2}{2c\gamma} \right]^{i\omega_0/\gamma} J_{-i\omega_0/\gamma} \left\{ \left(\frac{L}{c2\gamma} \right)^{1/2} \omega_{p0} \exp(\gamma\tau/2) \right\} \exp(-i\omega_0\tau/2).
 \end{aligned} \quad (18)$$

Для поля же в плазме на достаточном удалении от границы раздела $x = 0$ ($\exp(-2\gamma x/c) \ll 1$) получаем

$$\begin{aligned}
 E^p(x, \tau) &= E_i \exp(-i\omega_0 \tau) F_{-i\omega_0/\gamma} \left\{ \left(\frac{x}{2c\gamma} \right)^{1/2} \omega_{p0} \exp(\gamma\tau/2) \right\} = \\
 &= E_i \Gamma\left(1 - i\omega_0/\gamma\right) \left[\frac{x\omega_{p0}^2}{c\gamma} \right]^{i\omega_0/\gamma} J_{-i\omega_0/\gamma} \left\{ \left(\frac{x}{c\gamma} \right)^{1/2} \omega_{p0} \exp(\gamma\tau/2) \right\} \exp(-i\omega_0\tau/2).
 \end{aligned} \quad (19)$$

3. Обсуждение результатов

Полученные выше формулы показывают, что в условиях быстрого роста концентрации характер прохождения волны через плазму принципиально изменяется по сравнению со стационарным случаем. «Индикатором» может служить зависимость от времени напряженности поля при $x=L$, которая при $\exp(-\gamma L/c) \ll 1$ определяется формулами при $\omega_p^2(x, t) = \omega_{p0}^2 \exp(\gamma t)$

$$E(L, t) = E_i \exp[-i\omega_0(t - L/c)] \cdot F_{-2i\omega_0/\gamma} \left[\frac{\omega_{p1}}{\gamma} \exp(\gamma t/2) \right],$$

при $\omega_p^2(x, t) = \omega_{p0}^2 \exp[\gamma(t - x/c)]$

$$E(L, t) = E_i \exp[-i\omega_0(t - L/c)] \cdot F_{-i\omega_0/\gamma} \left\{ \left(\frac{L}{2c\gamma} \right)^{1/2} \omega_{p0} \exp[\gamma(t - L/c)/2] \right\}.$$

На этапах, когда квадрат аргумента функции F мал по сравнению с единицей, волна проходит через плазму без существенной деформации. По мере роста концентрации «амплитуда» волны на выходе из плазмы постепенно уменьшается, однако при достаточно больших γ в течение некоторого времени она значительно и на этапах, когда плотность плазмы уже превзошла критическую. На рис. 2,

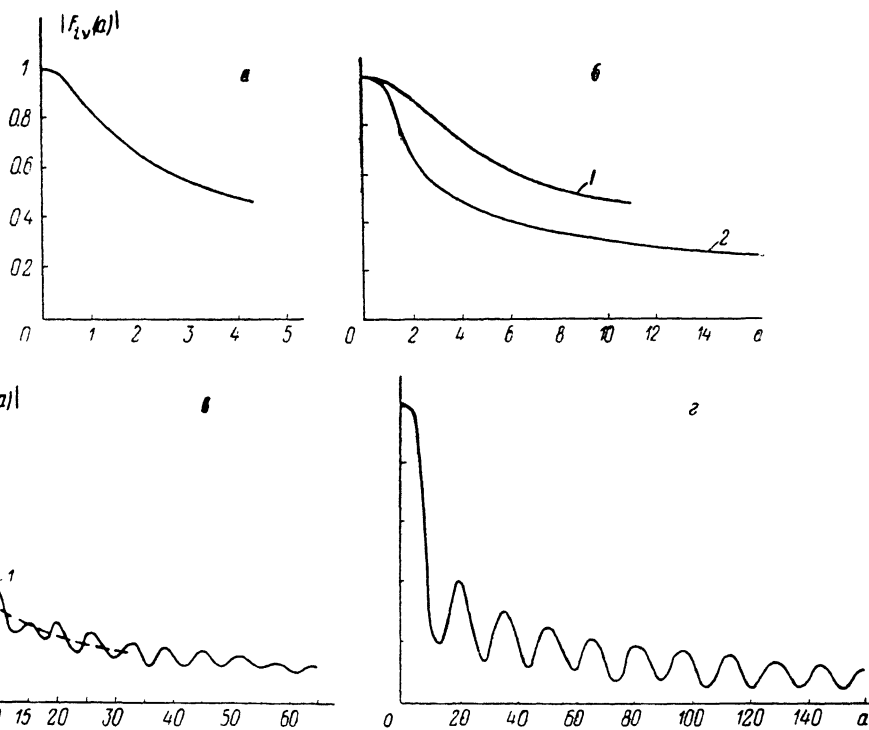


Рис. 2.

v : а — 10; б — 4 (1), 2 (2); в — 0.5 (1), 1 (2); г — 0.2.

а—г приведены графики функции $|F_{1v}(a)|$ для различных v , соответствующих по порядку величины, в частности, пробое газов средних давлений в сверхсильных СВЧ полях [3, 4]. Нетрудно видеть, что при $\gamma \sim \omega_0$ «амплитуда» волны при $x=L$ падает менее чем на порядок при концентрации плазмы в несколько десятков критических. Поэтому, в частности, результирующая концентрация плазмы при пробое газа среднего давления сверхсильной СВЧ волной может достигать значений $\omega_p \sim 10^2 \omega_0^2$.

Список литературы

- [1] Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967.
- [2] Кондратенко А. Н. Проникновение поля в плазму. М.: Атомиздат, 1979.
- [3] Арутюнян И. Г., Рухадзе А. А. // Кр. сообщения по физике. 1978. № 9. С. 12—18.
- [4] Глазов Л. Г., Игнатьев А. В., Рухадзе А. А. // Высокочастотный разряд в волновых полях. Горький, 1988. С. 198—211.

Институт общей физики АН СССР
Москва

Поступило в Редакцию
12 апреля 1989 г.