

01; 10

© 1990 г.

ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

В. А. Балакирев

Исследовано взаимодействие цепочки осцилляторов, образованных релятивистскими частицами или сгустками частиц, движущихся во внешних полях и совершающих в них поперечные колебания. Показано, что взаимодействие частиц посредством собственного электромагнитного излучения может приводить к хаотическому движению осцилляторов.

В настоящее время уделяется много внимания изучению хаотического движения заряженных частиц в электромагнитных полях [1-7]. При этом рассмотрение, как правило, ограничивалось случаем заданных внешних полей. В данной работе показано, что причиной возникновения хаотического движения частиц (сгустков) может быть их взаимодействие посредством собственного излучения. Отметим, что хаотическая динамика электронных автогенераторов и усилителей исследована в работе [8, 9].

Рассмотрим в качестве примера конечную последовательность частиц или точечных сгустков частиц, движущихся в электрическом или магнитном ондуляторе. Сгустки можно считать точечными, если их размеры существенно меньше длины волны излучения. Электронные сгустки, двигаясь в ондуляторе, будут совершать вынужденные поперечные колебания. Сформированные таким образом осцилляторы излучают электромагнитные волны, которые будут оказывать воздействие на другие сгустки. В релятивистской области энергии максимум интенсивности излучения приходится на направление движения, поэтому взаимодействие сгустков в этом случае носит односторонний характер. Данный сгусток оказывает воздействие только на сгустки, движущиеся перед ним. В сопутствующей системе отсчета анизотропия излучения осциллятора отсутствует (диаграмма направленности излучения симметрична). Однако возникает выделенное направление, обусловленное распространением волны накачки и соответственно анизотропия пондеромоторной силы. Пондеромоторная сила в направлении движения частиц существенно превышает значение этой силы в противоположном направлении.

Поперечное электромагнитное поле, возбуждаемое точечным сгустком, описывается неоднородным волновым уравнением, которое имеет следующий вид:

$$\Delta E_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j_x}{\partial t}, \quad (1)$$

где

$$j_x = -q\dot{\xi}(t) \delta(x - x_0 - \xi(t)) \delta(y - y_0) \delta(z - z_L(t)) \quad (2)$$

— поперечная плотность тока сгустка, $q = eN_b$ — заряд, N_b — число частиц в сгустке, $\dot{\xi} = d\xi/dt$ — поперечная скорость, $\xi = a \sin \omega_0 t$ — поперечное смещение, a — амплитуда смещения, ω_0 — частота осцилляций сгустка в ондуляторе, $z_L(t, z_0, x_0, y_0)$ — продольная координата сгустка в лагранжевом описании, z_0, x_0, y_0 — начальные продольные и поперечные координаты.

Решение уравнения (1), полученное в дипольном приближении, а также в приближении медленного изменения продольной скорости сгустков имеет вид

$$E_x = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t},$$

$$A_x = -\frac{qa\omega_0}{4\pi c} e^{ik_0\gamma_0^2 \sqrt{\frac{r_\perp^2}{\gamma_0^2} + (z-z_{J1})^2} + ik_0\beta\gamma_0^2(z-z_{J1}) - i\omega_0 t} \frac{1}{\sqrt{\frac{r_\perp^2}{\gamma_0^2} + (z-z_{J1})^2}}. \quad (3)$$

В формуле (3) использованы следующие обозначения: $r_\perp = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, $k_0 = \omega_0/c$, $\beta_0 = v_0/c$, $\gamma_0 = (1-\beta_0^2)^{-1/2}$, v_0 — начальная продольная скорость сгустка.

Формула (3) определяет излучение отдельной заряженной частицы или точечного сгустка, движущихся в продольном направлении по произвольному закону $z_1(t)$. Излучение системы сгустков находится простым суммированием полей (3). Подставив полученное таким путем поле суммарного электромагнитного излучения, а также внешнее поле ондулятора в уравнения движения для каждого сгустка, получим самосогласованную систему нелинейных уравнений движения, описывающих коллективное взаимодействие сгустков. Отметим, что в случае возбуждения отдельными частицами (сгустками) продольных колебаний плазмы такой подход использован в работе [8].

На оси движения осциллятора ($i_1=0$) выражение для электрического поля (3) существенно упрощается

$$E_x = -\frac{qa\omega_0}{4\pi c^2} \frac{1}{|z-z_{J1}|} \begin{cases} \omega_+ \exp[ik_+(z-z_0-\Delta_{||})-i\omega_+t], & z > z_{J1}, \\ \omega_- \exp[-ik_-(z-z_0-\Delta_{||})-i\omega_-t], & z < z_{J1}, \end{cases} \quad (4)$$

где $\Delta_{||}$ — продольное смещение осциллятора ($z_{J1} = z_0 + v_0 t + \Delta_{||}$), $\omega_\pm = \omega_0 / (1 \mp \beta_0)$, $k_\pm = k_0 / (1 \mp \beta_0)$.

Из формулы (4) следует хорошо известный результат, что в релятивистской области энергии частота излучения вперед в $2\gamma_0^2$ раз превышает частоту осциллятора, а частота излучения в противоположном направлении примерно в 2 раза меньше ω_0 . Кроме этого, видно, что амплитуда излучения вперед в γ_0^2 раз превышает амплитуду излучения в обратном направлении. Поэтому в релятивистской области энергий излучением назад можно пренебречь. С учетом сказанного выражение для поля излучения системы сгустков, находящихся на одной оси, можно представить в виде

$$E_x^{tot}(z, t) = -\frac{qa\omega_0}{2\pi c^2} \omega_+ \sum_{\alpha=1}^N \theta(z-z_{J1\alpha}) \frac{\sin[k_+(z-z_{0\alpha}-\Delta_{||\alpha})-\omega_+t]}{|z-z_{J1\alpha}|}. \quad (5)$$

Здесь

$$\theta(z-z_{J1\alpha}) = \begin{cases} 1, & z > z_{J1\alpha}, \\ 0, & z < z_{J1\alpha}. \end{cases}$$

Суммирование ведется по сгусткам, N — число сгустков.

Подставив поле (5) в уравнения движения

$$\frac{d\gamma_{\mu}}{dt} = -\frac{e}{mc^2} \langle E_{x0t}(z_{J1\mu}, t) \rangle, \quad \frac{dz_{J1\mu}}{dt} = v_{J1\mu},$$

где угловые скобки означают усреднение по высокочастотным движениям, получим систему связанных нелинейных уравнений

$$\frac{d\gamma_{\mu}}{dt} = -\epsilon \sum_{\alpha=1}^N \theta(z_{J1\mu} - z_{J1\alpha}) \frac{\sin k_+(z_{J1\mu} - z_{J1\alpha})}{k_+(z_{J1\mu} - z_{J1\alpha})},$$

$$\frac{dz_{J1\mu}}{dt} = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_{\mu}^2}}, \quad (6)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \beta_{\perp}^2 N_b k_+ r_0 \omega_+, \quad \beta_{\perp} = \frac{a\omega_0}{c}, \quad r_0 = \frac{e^2}{mc^2}.$$

Уравнения (6) можно существенно упростить, если предположить, что энергия сгустков мало меняется $\gamma_0 \ll |\delta\gamma|$. Введем новые переменные

$$\xi_{\mu} = k_+ \Delta_{\mu\alpha}, \quad \tau = t \left(\frac{\varepsilon \omega_+}{d^2 \beta_{\perp}^2 \gamma_0^2} \right)^{1/2}.$$

В этих переменных с учетом сделанных предложений система уравнений (6) принимает вид

$$\frac{d^2 \xi_{\mu}}{d\tau^2} = - \sum_{\alpha} f_{\alpha} \left(L_{\mu\alpha} + \frac{\xi_{\mu} - \xi_{\alpha}}{2\pi} \right) \frac{\sin(\xi_{\mu} - \xi_{\alpha})}{\frac{L_{\mu\alpha}}{d} + \frac{\xi_{\mu} - \xi_{\alpha}}{d}}. \quad (7)$$

Здесь $L_{\mu\alpha} = L_{\mu} - L_{\alpha}$, $L_{\mu} = s_{\mu} \lambda$, s_{μ} — ближайшее целое число к $(z_{\mu 0} - z_{10})/\lambda$, λ — длина волны, $z_{\mu 0}$ — начальная продольная координата осциллятора, d — среднее расстояние между сгустками. Из системы уравнений (7) следует, что первый сгусток движется в продольном направлении равномерно (действием силы радиационного трения пренебрегаем). На второй сгусток действует поле излучения первого сгустка и т. д. Предполагая, что смещения сгустков ξ_{μ} существенно меньше расстояний до их ближайших соседей в случае в среднем периодически расположенных сгустков с периодом d , кратным λ .

$$L_{\mu\alpha} = (\mu - \alpha) d, \quad \xi_{\mu 0} = \xi_{\mu} (\tau = 0) < \pi$$

система уравнений (7) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi_2}{d\tau^2} &= - \sin \xi_2, \\ \frac{d^2 \xi_n}{d\tau^2} &= - \frac{1}{n-1} \sin \xi_n - \sum_{n'=2}^{n-1} \frac{1}{n-n'} \sin(\xi_n - \xi_{n'}). \end{aligned} \quad (8)$$

Для электрического поля электромагнитного излучения (3) на расстоянии $z \gg z_{\perp\alpha}$ имеем следующее выражение:

$$E_x = E_N \operatorname{Im} \Lambda_N(\xi) e^{ik_+ z - i\omega_+ t}, \quad (9)$$

где $E_N = N E_*$ — максимальная амплитуда излучения, возбуждаемого сгустками при их строгой периодичности следования с периодом, кратным длине волны: $E_* = N q a \omega_0 \omega_+ / 2\pi c^2 z$;

$$\Lambda_N = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N e^{-i\xi_{\alpha}} \quad (10)$$

— интерференционный множитель, описывающий ослабление поля излучения вследствие неполной когерентности излучения сгустков.

При $\xi_2(0) \neq 0$ второй сгусток в поле излучения первого сгустка совершает регулярные фазовые колебания, которые описываются уравнением математического маятника. Решение этого уравнения выражается через эллиптические функции. Приведем разложение ξ_2 в ряд Фурье

$$\begin{aligned} \xi_2(\tau) &= 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1/2}}{1+a^{2n-1}} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos(2n-1)\omega\tau, \\ a &= \exp\left(-\pi \frac{F'}{F}\right), \quad F \equiv F\left(\frac{\pi}{2}, x\right), \quad F' = F\left(\frac{\pi}{2}, x'\right), \\ x' &= \sqrt{1-x^2}, \quad x = \sqrt{\frac{1-\cos \xi_{20}}{2}}, \quad \omega = \frac{\pi}{2F}, \end{aligned} \quad (11)$$

$F(\pi, x)$ — эллиптический интеграл.

В предельном случае $a \ll 1$ в ряде (11) можно ограничиться только первым слагаемым ($n=1$)

$$\xi_2(\tau) = 8 \frac{\sqrt{a}}{1+a} \cos \omega \tau. \quad (12)$$

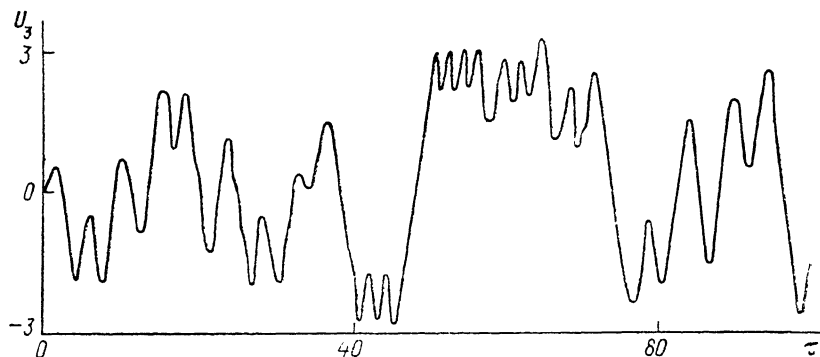


Рис. 1. Зависимость скорости третьего сгустка от времени.

$$\xi_{20} = \pi/2, \quad U_{20} = 0, \quad \xi_{30} = \pi/8, \quad U_{30} = 0, \quad \xi_{40} = 0, \quad U_{40} = 0.$$

С учетом соотношения (12) уравнение движения для третьего сгустка принимает вид

$$\frac{d^2 \xi_3}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \sin \xi_3 - \sin(\xi_3 - h \cos \omega \tau), \quad (13)$$

где $h = 8(\sqrt{a}/(1+a))$.

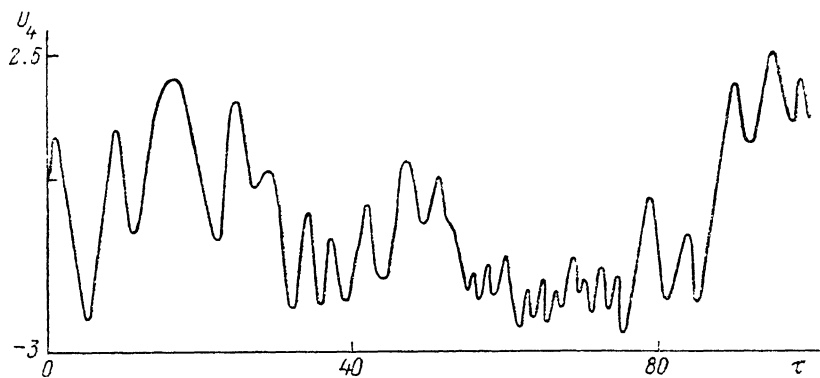


Рис. 2. Зависимость скорости четвертого сгустка от времени.

Используя разложение второго слагаемого в правой части (13) в ряд Фурье, перепишем это уравнение следующим образом:

$$\frac{d^2 \xi_3}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \sin \xi_3 - \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(h) \sin(\xi_3 - s\omega \tau), \quad (14)$$

$J_s(h)$ — функция Бесселя порядка s .

Каждому слагаемому в правой части (14) соответствует нелинейный резонанс

$$\frac{d\xi_3}{d\tau} = s\omega.$$

Известно, что если сумма полуширин соседних нелинейных резонансов превышает расстояние между ними, то наступает перекрытие нелинейных резонансов. Расстояние между резонансами совпадает с частотой фазовых колебаний

второго сгустка ω , которая равна единице при малых начальных значениях ξ_{20} и неограниченно возрастает при приближении ξ_{20} к сепаратрисе ($\xi_{20} \rightarrow \pm\pi$). Критерий перекрытия резонансов $s=0, 1$ (или $s=0, -1$) имеет вид

$$2 \left(\sqrt{\left| \frac{1}{2} + J_0(h) \right|} + \sqrt{|J_1(h)|} \right) > \omega.$$

В частном случае $\xi_{20}=\pi/2$, $a=e^{-\pi}$, $\omega=\pi/(2F(\pi/2, 1/\sqrt{2}))=0.8$ критерий перекрытия выполнен. Можно ожидать, что в этих условиях движение третьего сгустка носит хаотический характер. На четвертый сгусток будет действовать хаотическое поле, возбуждаемое третьим сгустком. И так для всех последующих сгустков. Таким образом, движение всех сгустков, начиная с третьего,

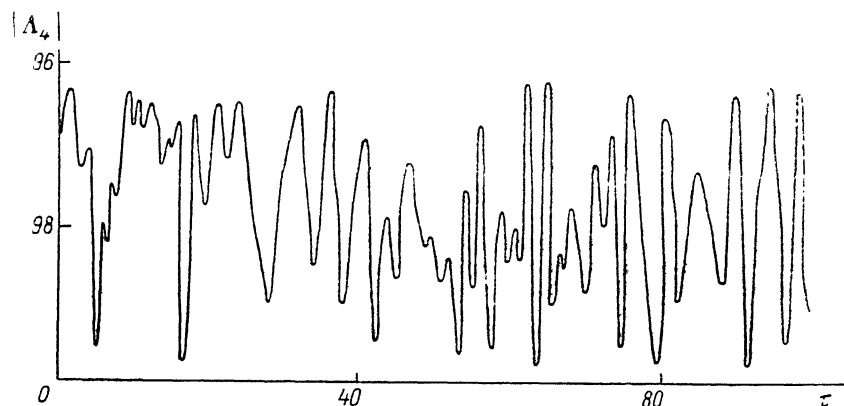


Рис. 3. Зависимость амплитуды электромагнитной волны от времени.

является хаотическим. Соответственно поле электромагнитного излучения наряду с регулярной компонентой (вклад от первых двух сгустков) будет содержать хаотическую компоненту, которая возбуждается остальными сгустками и имеет сплошной спектр [6]. Для проверки вывода о хаотической динамике последовательности осцилляторов система уравнений (8) была решена численными методами для четырех сгустков. На рис. 1, 2 представлены зависимости скорости $U_n=(d\xi_n)/(d\tau)$ третьего и четвертого сгустков от времени, а на рис. 3 — амплитуда электромагнитного излучения на оси системы. Из этих рисунков видно, что указанные сгустки совершают сложные хаотические фазовые колебания. Соответственно амплитуда электромагнитного излучения также совершает нерегулярные колебания.

Таким образом, в работе показано, что взаимодействие заряженных частиц или точечных сгустков посредством собственного электромагнитного излучения может приводить к хаотизации их движения.

Список литературы

- [1] Smith G. R., Kaufman A. N. // Phys. Fluids. 1978. Vol. 21. N 12. P. 2230—2241.
- [2] Шкляр Д. Р. // ЖЭТФ. 1981. Т. 80. Вып. 6. С. 2272—2282.
- [3] Балакирев В. А., Буц В. А., Толстолужский А. П., Туркин Ю. А. // ЖТФ. 1983. Т. 53. Вып. 10. С. 1922—1927.
- [4] Балакирев В. А., Буц В. А., Толстолужский А. П., Туркин Ю. А. // ЖЭТФ. 1983. Т. 84. Вып. 4. С. 1279—1289.
- [5] Балакирев В. А., Буц В. А., Толстолужский А. П., Туркин Ю. А. // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 4. С. 641—648.
- [6] Балакирев В. А., Буц В. А., Толстолужский А. П., Туркин Ю. А. // УФЖ. 1983. Т. 28. № 11. С. 1644—1648.
- [7] Заславский Г. М., Натензон М. Я. и др. // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. Вып. 3. С. 881—894.
- [8] Гинзбург Н. С., Кузнецов С. П. // Релятивистская высокочастотная электроника. Горький, 1979. С. 101—145.
- [9] Балакирев В. А., Блюх Ю. П. и др. // Физика плазмы. 1988. Т. 14. № 2. С. 286—295.

Харьковский физико-технический институт АН УССР

Поступило в Редакцию
25 мая 1988 г.

В окончательной редакции
7 июля 1989 г.