1992 ФИЗИКА И ТЕХНИКА ПОЛУПРОВОДНИКОВ том 26, вып. 1
1992 PHYSICS AND TECHNICS OF SEMICONDUCTORS vol. 26, N 1

ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ «ВНУТРЕННИХ» ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМОПОДОБНОЙ СРЕДЕ

Басс Ф. Г., Булгаков А. А., Ханкина С. И.

Показано, что в неоднородной плазме, помещенной во внешнее электрическое поле, возможно распространение электромагнитных волн, подобных гидродинамическим волнам Вяйсяля—Брента. Их существование в плазменной среде связано с тем, что на заряженные частицы действует сила Лоренца, а не сила тяжести, как в гидродинамике. Кроме того, носители участвуют в коллективном движении с плазменной частотой. Это приводит к интересным особенностям в распространении этих волн, например к «квантованию» волнового вектора в плоскости, перпендикулярной градиенту концентрации.

Известно, что одной из задач океанологии является изучение внутренних волновых движений морской воды [1]. Возникновение этих волн обусловлено увеличением плотности среды по направлению силы тяжести. Любое возмущение механического равновесия жидкости вызывает действие архимедовых сил, стремящихся восстановить равновесие. Одновременное действие силы тяжести и силы Архимеда на частицы воды приводит к горизонтальному и вертикальному обменам в океане.

Подобную ситуацию можно создать в неоднородной плазменной среде, концентрация носителей заряда в которой является функцией координаты. Для этого в направлении изменения концентрации необходимо приложить постоянное электрическое поле $\mathbf{E}_0$, тогда действующая на заряженные частицы сила Лоренца является аналогом силы тяжести. Диффузионные процессы и сила Лоренца вызывают распространение внутренних электростатических волн. Однако на заряженные частицы плазмоподобной среды, кроме указанных сил, действуют кулоновские силы, приводящие к коллективным колебаниям плотности заряженных частиц с ленгмюровской частотой. Именно это создает интересные особенности при распространении внутренних волн в плазме.

Предположим, что под действием каких-либо технологических приемов, например легирования, или любым другим способом создана однокомпонентная плазменная среда, в которой концентрация носителей является функцией координаты $n_0(z)=\bar{n}_0 \exp(-qz)$. Пусть также вдоль направления Oz приложено постоянное электрическое поле $\mathbf{E}_0$.[1] Электромагнитные свойства такой среды описываются уравнениями электростатики и гидродинамики:

$$\operatorname{div} \varepsilon_0 E = 4\pi e n,$$
$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0,$$
$$m n_0(z) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + e\left(n_0(z)\,\mathbf{E} + n\mathbf{E}_0\right), \quad (1)$$
$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}\left(n_0(z)\,\mathbf{v}\right) = 0,$$

[1] Предполагается, что постоянный ток вдоль оси z отсутствует. Это возможно, если внешняя цепь разомкнута.

где $\mathbf{v}$, n и p — возмущения скорости, концентрации и давления соответственно. При записи этой системы уравнений предполагается, что среда является электронейтральной, т. е. $qR_D < 1$, R_D — радиус Дебая, и что скорость исследуемых волн значительно меньше скорости света.

Как видно, соотношения (1) не образуют полную систему уравнений. Необходимо указать еще уравнение состояния, связывающее давление, концентрацию и температуру. В гидродинамике часто вводят приближение несжимаемой жидкости, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{2}$$

которое эквивалентно предположению о бесконечно большой скорости распространения звука в среде $(dp/d\rho)^{1/2}$. Определим условия, при которых равенство (2) применимо и к неоднородной плазме. Так как давление является функцией плотности, связь между этими величинами можно записать в виде

$$\frac{dp}{\partial t} = v^2 \frac{d\rho}{dt}, \quad v^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}, \quad \rho = nm$$

или

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v_z \frac{\partial n_0(z)}{\partial z} = \frac{1}{mv^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + v_z \frac{\partial p_0}{\partial t}\right).$$

Тогда из уравнения непрерывности и уравнения стационарного состояния $p_0(z) = eE_0 \int^z n_0(z)\, dz$ [2] имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{eE_0}{mv^2} v_z - \frac{1}{mn_0 v^2} \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{3}$$

Не нарушая общности, оба слагаемых справа в уравнении (3) можно считать величинами одного порядка, а характерное значение слагаемых, определяющих $\operatorname{div} \mathbf{v}$, оценим следующим образом: $(dv_z/dz) \sim qv_z$. Тогда при выполнении условия $q \gg (eE_0/mv^2)$ можно считать, что $\operatorname{div} \mathbf{v} \approx 0$. Заметим, что при отсутствии электрического поля силу Лоренца в неравенстве необходимо заменить на силу тяжести. Смысл этого соотношения состоит в том, что энергия, приобретаемая частицей в электрическом поле на расстоянии q^{-1}, значительно меньше ее средней кинетической энергии mv^2.

Таким образом, параметр q должен удовлетворять условиям

$$\frac{1}{R_D} \gg q \gg \frac{eE_0}{mv^2}. \tag{4}$$

Эти неравенства могут иметь место в различных плазмоподобных средах. Например, в невырожденных полупроводниках характерной скоростью является тепловая скорость носителей. При комнатной температуре $v = v_т \simeq 3 \cdot 10^7$ см/с, массе носителя заряда $m \simeq 10^{-28}$ г, диэлектрической проницаемости решетки $\varepsilon_0 \simeq 10$ в электрических полях до 100 В/см условие (4) выполняется, если $n_0 > 10^{12}$ см$^{-3}$ и $q \approx 10^3 \div 10^5$ см$^{-1}$.

Воспользуемся тем, что $n_0^{-1}(z)(dn_0(z)/dz) = -q$, и сведем систему (1) к дифференциальному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами относительно v_z — составляющей скорости носителей:

$$\left(1 - \frac{\omega_p^2(z)}{\omega^2}\right)\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} - q\left(1 - \frac{2\omega_p^2(z)}{\omega^2}\right)\frac{\partial v_z}{\partial z} + \left(1 - \frac{\omega_p^2(z) + \omega_N^2 \operatorname{sign}(e\mathbf{E}_0\mathbf{z}^0)}{\omega^2}\right) \times$$
$$\times \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) v_z = 0, \tag{5}$$

[2] Это соотношение получается, если проинтегрировать уравнение движения.

где $\omega_p = [(4\pi e^2/\varepsilon_0 m)\, n_0(z)]^{1/2}$ — плазменная частота в точке z, $\omega_N = (q \mid eE_0 \mid / m)^{1/2}$ — электрический аналог частоты Вяйсяля—Брента [1], $\mathbf{z}^0$ — единичный орт вдоль оси Oz.

Соотношение (5) необходимо дополнить граничными условиями. В данном случае используется предположение об отсутствии тока при $z \to \pm\infty$. При экспоненциальной зависимости концентрации от координаты условие $j_z \mid_{z\to+\infty} = 0$ означает, что скорость носителей v_z при $z \to +\infty$ растет медленнее, чем $\exp(qz)$. Если $z \to -\infty$, то v_z должно стремиться к нулю быстрее, чем $\exp(-q \mid z \mid)$. Выбранные граничные условия имеют следующий физический смысл: при $z \to +\infty$ концентрация носителей стремится к нулю $[n_0(z) \sim \exp \times \times (-qz) \to 0]$, что приводит к отсутствию тока; если $z \to -\infty$ и, следовательно, $n_0(z) \to \infty$, то условие $j_z \mid_{z\to-\infty} \to 0$ обеспечивает отсутствие бесконечно большого выделения тепла, связанного с джоулевыми потерями. Разумеется, данное граничное условие является приближенным, так как полученные далее решения пригодны в некоторой ограниченной области изменения концентрации $n_0(z)$. Действительно, уже при $z \geqslant 2q^{-1} \mid \ln(qv_\tau/\bar\omega_p)$, где $\bar\omega_p = (4\pi e^2 \bar n_0/\varepsilon_0 m)^{1/2}$, нарушается неравенство $qR_D \ll 1$; с другой стороны, при $z \to -\infty$ и $n_0(z) \to \infty$ электромагнитное поле не проникает в область плотной плазмы, где $\omega \ll \omega_p(z)$, и можно ограничиться значениями $\mid z \mid \simeq q^{-1} \ln(\omega^2/\bar\omega_p^2)$, выбрав, например, $\omega^2/\omega_p^2 \approx 10^2 \div 10^3$.

Прежде всего остановимся на приближенном решении уравнения (5), предполагая, что в направлении Oz среда слабо неоднородна, т. е. градиент концентрации $\mid n_0^{-1}(z)\, dn_0(z)/dz \mid$ мал по сравнению с характерными масштабами изменения полей по осям Ox и Oy. Так как среда однородна в плоскости $z = \mathrm{const}$, зависимость от координат x и y будем искать в виде

$$v_z = v_z(z) \exp(-i\omega t + ik_x x + ik_y y).$$

Для нахождения $v_z(z)$ подставим в уравнение (5) $v_z(z) = W(z) \exp(S(z))$ и преобразуем его к волновому уравнению

$$\frac{d^2W(z)}{dz^2} + W(z)\left[\left(\frac{dS(z)}{dz}\right)^2 + \frac{d^2S(z)}{dz^2} - q\,\frac{dS(z)}{dz}\,\frac{\omega^2 - 2\omega_p^2(z)}{\omega^2 - \omega_p^2(z)} + \right.$$
$$\left. + k_\perp^2\,\frac{\omega_p^2(z) - \omega_N^2 \operatorname{sign}(eE_0 z^0) - \omega^2}{\omega^2 - \omega_p^2(z)}\right] = 0, \tag{6}$$

где $k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2$, $S(z) = \frac{q}{2}\int^z \frac{\omega^2 - 2\omega_p^2(z)}{\omega^2 - \omega_p^2(z)}\,dz$. Условие слабой неоднородности среды имеет вид $k_\perp^2 \gg q^2$. Удерживая в решении уравнения (6) член первого порядка по параметру $q/k_\perp$ и предполагая, что $\omega^2 \neq \bar\omega_p^2$, получим

$$v_z(z) \simeq \exp\left[\left\{\pm ik_\perp \sqrt{\frac{\bar\omega_p^2 - \omega_N^2 \operatorname{sign}(eE_0 z^0) - \omega^2}{\omega^2 - \bar\omega_p^2}} + \frac{q}{2}\,\frac{\omega^2 - 2\bar\omega_p^2}{\omega^2 - \bar\omega_p^2}\right] z\right\}. \tag{7}$$

Обозначим первое слагаемое в показателе экспоненты через $\pm ik_z$ и найдем в данном приближении дисперсионное уравнение $\omega = \omega(k_\perp, k_z)$:

$$\omega^2 = \bar\omega_p^2 - \frac{k_\perp^2}{k_\perp^2 + k_z^2}\,\omega_N^2 \operatorname{sing}(eE_0 z^0). \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что k_z является действительной величиной, если $\operatorname{sign} \times \times (eE_0 z^0) < 0$. Это означает, что вдоль оси Oz распространяются в противоположных направлениях две компоненты внутренних электростатических волн. Как следует из (8), эти волны могут распространяться только под углом к оси Oz. Отличие их закона дисперсии от дисперсии гидродинамических волн состоит в том, что их частота превышает плазменную частоту $\bar{\omega}_p$, а предельное значение частоты Вяйсяля—Брента определяется силой Лоренца, а не силой тяжести. В противоположном случае [sign $(e\mathbf{E}_0\mathbf{z}^0) > 0$] волновое число k_z является мнимой величиной, распространение волны возможно только вблизи плоскости $z=0$, где $\omega \leqslant \bar{\omega}_p$, а амплитуда волны убывает вдоль оси Oz в обе стороны от этой плоскости.

Полученные результаты не дают полных сведений о волнах в неоднородной плазме. Дальнейшие исследования проведем, не предполагая малости параметра q. Для этого в уравнении (5) введем новую переменную

$$\zeta = \frac{\omega_p^2(z)}{\omega^2} \tag{9}$$

и преобразуем его к виду

$$\zeta^2(\zeta - 1)\frac{\partial^2 v_z}{\partial \zeta^2} + \zeta(3\zeta - 2)\frac{\partial v_z}{\partial \zeta} + \frac{k_\perp^2}{g^2}\left(1 + \frac{\omega_N^2}{\omega^2}\operatorname{sign}(e\mathbf{E}_0\mathbf{z}^0) - \zeta\right)v_z = 0. \tag{10}$$

Полагая $v_z = \zeta^\varkappa u(\zeta)$, получим для $u(\zeta)$ гипергеометрическое уравнение Гаусса [2]:

$$\zeta(\zeta - 1)\frac{d^2u}{d\zeta^2} + [(3 + 2\varkappa)\zeta - 2(1 + \varkappa)]\frac{du}{d\zeta} + \left[\varkappa(2 + \varkappa) - \frac{k_\perp^2}{q^2}\right]u = 0, \tag{10a}$$

где $\varkappa$ — один из корней уравнения

$$\varkappa^2 + \varkappa - \frac{k_\perp^2}{q^2}\left[1 + \frac{\omega_N^2}{\omega^2}\operatorname{sign}(e\mathbf{E}_0\mathbf{z})\right] = 0.$$

Как известно, гипергеометрическое уравнение имеет три особых точки: $\zeta=0$ (что соответствует $z \to +\infty$), $\zeta=1$ $[z=q^{-1}\ln(\bar{\omega}_p^2/\omega^2)]$ и $\zeta=\infty$ $(z \to -\infty)$. Для каждой точки может быть получена пара линейно независимых решений, которые сходятся возле особой точки и могут быть продолжены за пределы области сходимости. Так, вблизи $\zeta \to +\infty$ имеем

$$u(\zeta) = \frac{C_1}{(-\zeta)^\alpha\,\Gamma(1-\gamma)}F^{(1)}(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ \zeta^{-1}) +$$

$$+ \frac{C_2}{(-\zeta)^\beta\,\Gamma(1-\gamma)}F^{(2)}(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1,\ \zeta^{-1}), \tag{11}$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ — гипергеометрическая функция (индексы будут использованы для сокращения записи), α, $\beta = \varkappa + 1 \pm (1 + k_\perp^2/q^2)^{1/2}$, $\gamma = 2(\varkappa + 1)$, $\Gamma(1-\gamma)$ — γ-функция, C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Подставляя $u(\zeta)$ в выражение для тока

$$j_z = en_0(z)\,v_z(z) = en_0(z)\left(\frac{\omega_p^2(z)}{\omega^2}\right)^\varkappa u(z),$$

найдем

$$j_z|_{z\to\infty} = \frac{e\bar{n}_0}{\Gamma(1-\gamma)}\left(\frac{\bar{\omega}_p^2}{\omega^2}\right)^\varkappa\{(-1)^\alpha C_1\exp(-k_1z)F^{(1)} + (-1)^\beta C_2\exp(k_1z)F^{(2)}\}, \tag{12}$$

где $k_1 = (q^2 + k_\perp^2)^{1/2}$. Воспользуемся граничным условием $j_z|_{z\to-\infty} \to 0$ и получим, что $C_1 = 0$. Теперь компонента электрического поля волны при $z \to -\infty$ может быть представлена в виде

$$E_z|_{z\to\infty} = \frac{A}{\Gamma(1-\gamma)}F^{(2)}\exp(k_1z), \tag{13}$$

где $A=(4\pi e\bar{n}_0/i\omega\varepsilon_0)(\bar{\omega}_p^2/\omega^2)^{\varkappa}(-1)^{\beta}C_2$. Отсюда следует, что электрическое поле волны затухает с декрементом $(q^2+k_\perp^2)^{1/2}$ в сторону возрастания концентрации, а гипергеометрическая функция $F^{(2)}$ описывает медленное по сравнению с экспонентой изменение амплитуды и фазы поля.

Продолжая аналитически решение (13) в область $\zeta\to 0$ ($z\to+\infty$), получим

$$E_z\big|_{z\to\infty}=A\Gamma(1+\beta-\alpha)\exp\left(-\frac{qz}{2}\right)\left\{\frac{F\exp(-k_2z)}{\Gamma^2(1-\alpha)}+\frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(1-\gamma)}\,\frac{F^{(3)}\exp(k_2z)}{\Gamma^2(\beta)}\right\}. \quad (14)$$

Здесь $k_2=\frac{1}{2}\{q^2+4k_\perp^2[1+(\omega_N^2/\omega^2)\,\mathrm{sign}\,(e\mathbf{E}_0\mathbf{z}^0)]\}^{1/2}$, $F=F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \zeta)$, $F^{(3)}=$ $=F(1-\beta,\ 1-\alpha,\ 2-\gamma,\ \zeta)$. При $z\to\infty$ j_z и E_z стремятся к нулю. Характер распределения E_z — компоненты поля при $z\to\infty$ — определяется экспоненциальными множителями $\exp(\pm k_2z)$ в решении (14) и существенно зависит от величины и знака слагаемого $(\omega_N^2/\omega^2)\,\mathrm{sign}\,(e\mathbf{E}_0\mathbf{z}^0)$. Если подкоренное выражение в определении k_2 отрицательно, т. е.

$$\mathrm{sign}\,(e\mathbf{E}_0\mathbf{z}^0)=-1 \quad \text{и} \quad \frac{\omega_N^2}{\omega^2}>1+\frac{q^2}{4k_\perp^2}, \quad (15)$$

то k_2 и $(\gamma-1)$ — мнимые величины, а E_z является суммой бегущих в противоположных направлениях волн, амплитуды которых убывают по закону $\exp\times$ $\times(-qz/2)$. Отметим, что при $q^2\ll k_\perp^2$ соотношение (14) согласуется с (7).

Перейдем к решению в особой точке $\zeta=1$. Существенным здесь является то, что в нашем случае параметры гипергеометрической функции α, β и γ связаны соотношением $\alpha+\beta=\gamma$. Тогда, как известно [3], гипергеометрический ряд обладает в точке $\zeta=1$ логарифмической особенностью вида $\ln(1-\zeta)$. Отбрасывая в решении члены, не пропорциональные $\ln(1-\zeta)$, для электрического поля получим

$$E_z\big|_{z\to q^{-1}\ln(\bar{\omega}_p^2/\omega^2)}\approx A\frac{\Gamma(1-\alpha+\beta)\,\Gamma(\gamma)}{\pi\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\beta)}\left[e^{i\pi(\gamma-1)}\sin\pi\beta-\sin\pi\alpha\right]\ln\left(1-\frac{\bar{\omega}_p^2}{\omega^2}e^{-qz}\right). \quad (16)$$

Отсюда видно, что $|E_z|\to\infty$, когда $z\to q^{-1}\ln(\omega_p^2/\omega^2)$. Физический смысл этого результата состоит в том, что при $\zeta=1$ частота ω совпадает с плазменной частотой $\bar{\omega}_p$ слоя, расположенного при $z=0$. Возникает ситуация, при которой волнам с разными частотами соответствуют и различные по координате z плоскости максимальной амплитуды или плоскости распространения волны. Заметим, что аналогичная ситуация возникает и при отражении волны от неоднородной плазмы [4]. Расходимость амплитуды поля связана с тем, что не были учтены диссипативные процессы. Если в уравнение движения (1) добавить слагаемые, пропорциональные эффективной частоте столкновений ν, то получим вместо (9) $\zeta=(\bar{\omega}_p^2/\omega(\omega+i\nu))\exp(-qz)$ и, следовательно, $\ln(1-\zeta)\neq$ $\neq-\infty$, а амплитуда поля в точке $z=q^{-1}\ln(\bar{\omega}_p^2/\omega^2)$ будет иметь конечное значение.

Таким образом, внутренние электромагнитные волны обладают следующими свойствами. Их возникновение обусловлено наличием градиента концентрации и внешнего электрического поля. Распространение таких волн в направлении изменения концентрации возможно только в тех областях среды, где $\omega^2>\omega_p^2(z)$. Здесь поле волны складывается из неоднородных, бегущих в противоположных направлениях, волн. Если $\omega^2<\omega_p^2(z)$, то функция $E_z(z)$ не содержит осциллирующей части и убывает с ростом $|z|$ по закону, близкому к экспоненциальному, т. е. волна не проникает в область с высокой концентрацией заряда. Отметим, что внутренние электромагнитные волны распространяются под углом к направлению изменения концентрации $n_0(z)$. Это следует из того, что k_2 [см. (14)] при $k_\perp=0$ является действительным числом.

Рассмотрим ситуацию, когда

$$\operatorname{sign}(e\mathbf{E}_0\mathbf{z}^0)=1 \quad \text{или} \quad \frac{\omega_N^2}{\omega^2}<1+\frac{q^2}{4k_\perp^2} \tag{17}$$

(это условие выполняется и при $E_0=0$). Тогда k_2 — величина действительная, и второе слагаемое в соотношении (14) нарастает, когда $z\to+\infty$. Граничное условие $j_z|_{z\to+\infty}\to 0$ (или $E_z|_{z\to+\infty}\to 0$) может быть выполнено только в том случае, если коэффициент при этом слагаемом будет равным нулю, т. е. $1/\Gamma\times\times(1-\gamma)=0$ или $1-\gamma=-l$, где $l=1, 2, \ldots$. Подставляя выражение для γ из (11), получим соотношение, связывающее волновое число в плоскости xoy с градиентом концентрации:

$$\frac{k_\perp^2}{q^2}=\frac{l-1}{4}\,\frac{\omega^2}{\omega^2+\omega_N^2}. \tag{18}$$

Следует заметить, что параметры гипергеометрической функции $F(\alpha, \beta, \gamma, \zeta)$ α, β и γ выражаются через различные радикалы, и поэтому условие $\gamma=l+1$ не может привести к особенностям в функциях F, $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$.

Запишем выражения для поля E_z, когда выполнены условия (17):

$$E_z\big|_{z<-q^{-1}\ln(\bar\omega_p^2/\omega^2)}$$

$$E_z\big|_{z>-q^{-1}\ln(\bar\omega_p^2/\omega^2)}=A\,\frac{\Gamma(1+\beta-\alpha)}{\Gamma^2(1-\alpha)}\,F\left(\alpha,\ \beta,\ l+1,\ \frac{\bar\omega_p^2}{\omega^2}\,e^{-qz}\right)\exp\left(-qz\,\frac{l+1}{2}\right), \tag{19}$$

$$E_z\big|_{z\to-q^{-1}\ln(\bar\omega_p^2/\omega^2)}=A\,\frac{\Gamma(1-\alpha+\beta)\,l\,!}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\beta)}\left[(-1)^l\sin\pi\beta-\sin\pi\alpha\right]\ln\left(1-\frac{\bar\omega_p^2}{\omega^2}\,e^{-qz}\right).$$

Из (19) следует, что в данном случае вдоль плоскости $z=-q^{-1}\ln(\bar\omega_p^2/\omega^2)$ распространяется волна, амплитуда которой равна нулю в области плотной плазмы $[n_0(z)\gg\bar n_0]$ и экспоненциально спадает при $n_0(z)<\bar n_0$. Вблизи этой плоскости амплитуда волны меняется по закону $\ln q\zeta$, где $\zeta\to 0$, т. е. без учета диссипативных процессов она имеет бесконечно большую величину. При учете диссипации максимальное значение амплитуды пропорционально $|\ln(\nu\zeta/\omega)|$. Интересной особенностью такой волны является «квантование» волнового числа в плоскости xoy по закону (18). Такое квантование связывает характерные масштабы вдоль оси Oz и в плоскости xOy.

Авторы пользуются возможностью поблагодарить В. М. Яковенко за полезные обсуждения результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Миропольский Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л., 1981. 304 с.
[2] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Физматгиз. 1961. 704 с; Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., 1965. Т. 1. 296 с.
[3] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., 1966. Т. 2. 800 с.
[4] Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., 1967. 684 с.; Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., 1973, 344 с.

Институт радиофизики и электроники
АН Украины
Харьков

Получена 15.08.1991
Принята к печати 21.08.1991