

# Неоднородные состояния в тонких пленках несобственного несоразмерного сегнетоэлектрика с инвариантом Лифшица

© С.А. Киторов<sup>\*,\*\*</sup>, Ф.А. Погорелов<sup>\*\*\*</sup>, Е.В. Чарная<sup>\*\*\*</sup>

\* Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия

\*\* Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет (ЛЭТИ), Санкт-Петербург, Россия

\*\*\* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Петергоф, Россия

E-mail: kitorov@mail.ioffe.ru

Неоднородные структуры в модели с инвариантом Лифшица изучены без использования приближения постоянной амплитуды, т.е. фазовая и амплитудная функции рассмотрены как равноправные переменные. Показано, что получающаяся при таком подходе картина распределения амплитуды и фазы параметра порядка значительно богаче и интересней, чем в приближении постоянной амплитуды. Рассмотрено влияние осцилляций амплитудной функции на распределение фазы параметра порядка в модели, описывающей периодические структуры в сегнетоэлектриках. Показано, что учет колебаний амплитуды крайне важен для нахождения распределения параметра порядка в тонкой пленке. Наряду с численным моделированием проведено аналитическое исследование в пределе малой анизотропии. Исследованы регулярные и хаотические режимы.

PACS: 61.44.Fw, 77.80.-e

## 1. Введение

Теория модулированных структур в макроскопических ферромагнетиках, сегнетоэлектриках и металлических сплавах имеет богатую историю [1–3]. В то же время работ, посвященных модулированным структурам в малых образцах, значительно меньше [4,5]. Стандартный подход состоит в использовании приближения постоянной амплитудной функции [2], [4]. Наше рассмотрение модулированных структур в ограниченных образцах, естественно, требует отказа от этого приближения: невозможно в общем случае удовлетворить граничные условия. Поэтому мы должны рассмотреть систему уравнений для амплитудной и фазовой функций. Решение этой системы уравнений значительно богаче и содержательней, чем решения в приближении постоянной амплитуды.

## 2. Свободная энергия и уравнения для параметра порядка

Функционал свободной энергии имеет вид [6]

$$\begin{aligned} \Phi = & \int dz \{ -r(\eta_1^2 + \eta_2^2) + u_1(\eta_1^2 + \eta_2^2)^2 + u_2(\eta_1^2 \eta_2^2) \} \\ & + \int dz \left\{ \sigma \left( \eta_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial z} - \eta_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial z} \right) \right. \\ & \left. + \gamma \left[ \left( \frac{\partial \eta_1}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta_2}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\eta_i$  — компоненты параметра порядка. После перехода к переменным модуль — фаза  $\eta_1 = \eta \cos \varphi$ ,  $\eta_2 = \eta \sin \varphi$ , введения безразмерных переменных

$\eta = (r/(2u))^{1/2}R$ ,  $z = (\gamma/r)^{1/2}\xi$  и варьирования функционала свободной энергии получаем безразмерные уравнения для амплитудной и фазовой функций

$$R'' - R^3 + (1 - \varphi'^2 + T\varphi')R - R^{n-1}K(\cos n\varphi + 1) = 0, \quad (2)$$

$$\varphi'' + 2 \frac{R'}{R} \varphi' + R^{n-2}K \sin n\varphi = 0, \quad (3)$$

где  $T = \sigma/(\gamma r)^{1/2}$ ,  $K = 2^{-n/2}r^{n/2-2}n\omega u^{1-n/2}$  — безразмерные параметры,  $n$  — целое число, характеризующее симметрию потенциала.

## 3. Приближенное аналитическое решение

Рассмотрим сначала предел нулевой анизотропии  $K = 0$ . Тогда уравнение (3) легко решается

$$\varphi' \equiv \psi = \frac{C_0}{R^2} + \frac{T}{2}, \quad (4)$$

где  $C_0 = [\psi(0) - T/2]R(0)^2$  — константа интегрирования, определяемая начальными условиями  $\psi(0)$  и  $R(0)$  (которые являются, очевидно, граничными!). Подставив (4) в (2), получаем замкнутое уравнение для амплитудной функции  $R(\xi)$

$$R'' - R^3 + \left(1 + \frac{T^2}{4}\right) - \frac{C_0^2}{R^3} = 0. \quad (5)$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение динамики с эффективным потенциалом

$$U(R) = \left(1 + \frac{T^2}{4}\right) \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} + \frac{C_0^2}{2R^2}, \quad (6)$$

причем вид этого потенциала зависит от „начальных“ условий благодаря константе  $C_0$ . Существует область значений параметров и граничных условий, при которых реализуется минимум эффективного потенциала и, следовательно, существуют осциллирующие решения уравнения для амплитудной функции. Наличие минимума — необходимое, но не достаточное условие существования такого решения: для этого требуется еще, чтобы изображающая точка попала в начальный момент в потенциальную яму. После того, как найдена амплитудная функция  $R(\xi)$ , фазовая функция может быть получена из (4). Фазовая функция состоит из двух слагаемых: медленно меняющийся вклад второго слагаемого в (4) и более или менее размытые скачки фазы благодаря первому слагаемому. Важно, что величина скачка в точности равна  $\pi$ . Первый интеграл уравнения (5) имеет вид

$$\frac{dR}{d\xi} = \sqrt{2(E - U)}. \quad (7)$$

Вычисляя фазовую функцию в окрестности минимума амплитудной функции, получаем скачок фазы на  $\pi$

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= C_0 \int d\xi \frac{1}{R^2} = C_0 \int dR \frac{1}{R^2 \sqrt{2(E - U)}} \\ &\times 2C_0 \int_{R_0}^{R_e} \frac{dR}{R^2 \sqrt{2\left(\frac{C_0^2}{R_0^2} - \frac{C_0^2}{R^2}\right)}} 2 \int_{R_0}^{R_e} \frac{dR}{R \sqrt{2\left(\frac{R^2}{R_0^2} - 1\right)}} \\ &= 2 \arccos \left| \frac{R_0}{R_e} \right| \pi, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $R_e$  — экстремальное значение амплитудной функции,  $R_0$  — начальное значение,  $R_e \gg R_0$ . Только ведущие члены учтены при этом вычислении. Заметим, что данная модель, рассматриваемая в приближении постоянной амплитуды, имеет хорошо известные решения — топологические солитоны, обеспечивающие скачки фазы на  $\pi$ . [7]. Однако мы получили такие же скачки фазы в пределе нулевой анизотропии  $K = 0$ . Как видно из (8), скачки в нашем случае возникают в результате обхода сингулярности  $1/R^2$ . Мы могли бы привести аналитические решения уравнения для амплитудной функции в пределе нулевой анизотропии (5), но для того, чтобы понять влияние анизотропии на характер решения, удобно применить общий численный подход при произвольном параметре анизотропии.

#### 4. Численное решение

Эффективный потенциал  $U(R)$  представлен на рис. 1. Результаты численного решения уравнений в пределе

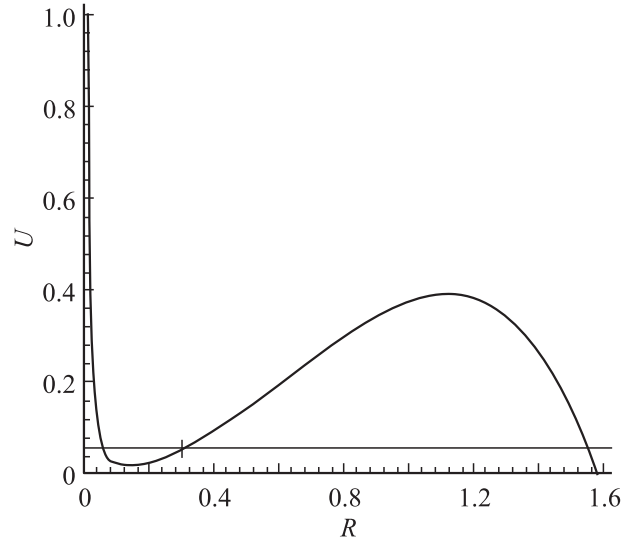


Рис. 1. Эффективный потенциал для  $n = 4, K = 0, T = 1, R(0) = 0.3, R'(0) = 0, \varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 0.3$ . Вертикальная черточка соответствует величине  $R(0)$ . Прямая, параллельная оси абсцисс, показывает уровень интеграла движения („энергии“), соответствующий осциллирующей амплитудной функции  $R(x)$ .

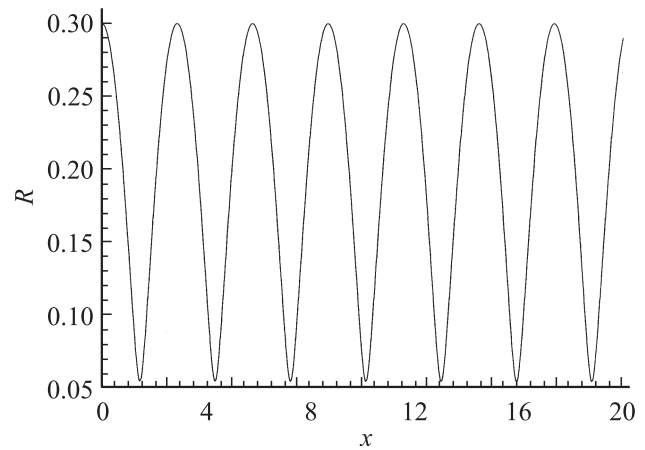


Рис. 2. Пространственная зависимость амплитудной функции для  $n = 4, K = 0, T = 1, R(0) = 0.3, R'(0) = 0, \varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 0.3$ .

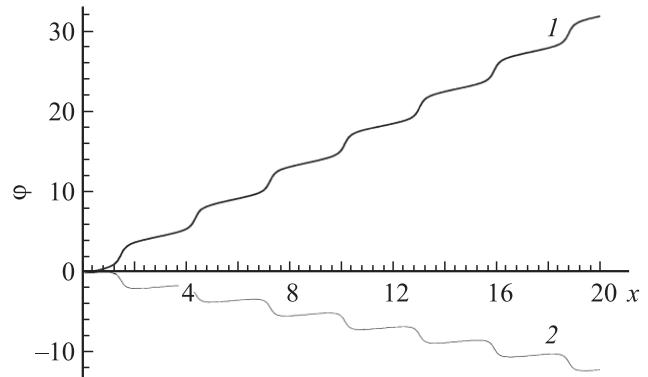
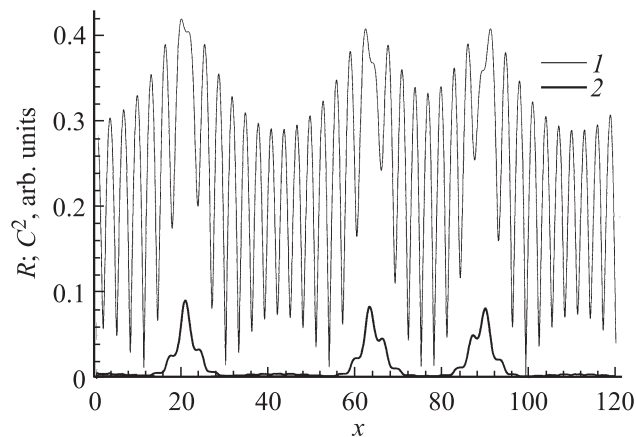
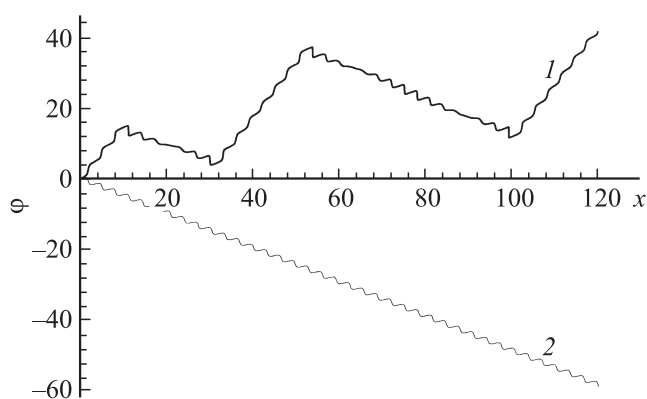


Рис. 3. Пространственная зависимость фазовой функции для  $n = 4, K = 0, T = 1, R(0) = 0.3, R'(0) = 0, \varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 0.3$  (1) и 0.7 (2).



**Рис. 4.** Пространственные зависимости амплитудной функции для  $n = 4$ ,  $K = 1.6$ ,  $T = 1$ ,  $R(0) = 0.3$ ,  $R'(0) = 0$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(0) = 0.75$  (1) и функции  $C^2$  (2).



**Рис. 5.** Пространственная зависимость фазовой функции для  $n = 4$ ,  $K = 1.6$ ,  $T = 1$ ,  $R(0) = 0.3$ ,  $R'(0) = 0$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(0) = 0.3$  (1) и  $0.75$  (2).

$K = 0$  представлены на рис. 2, 3. Почти гармонические колебания амплитудной функции на рис. 2, 3 соответствуют малой начальной амплитуде, в то время как на рис. 4, 5 мы видим последовательность солитонов, соответствующих начальной амплитуде вблизи максимума потенциала. Видно, что характер точных решений при  $K = 0$  находится в согласии с приближенными результатами аналитического решения.

Результаты численного решения при учете анизотропии представлены на рис. 4, 5. Следует отметить следующие важные отличия от случая  $K = 0$ .

1) Нарушена строгая пространственная периодичность.

2) На рис. 4 видна амплитудная и частотная модуляция пространственных структур.

3) Направление ступенчатого пространственного изменения фазовой функции может меняться после некоторого числа ступенек. Число ступенек между изменениями направления оказывается практически случайным (рис. 5).

## 5. Обсуждение

Таким образом, главное отличие решения в случае ненулевого параметра анизотропии  $K$  выражается в хаотизации направления скачков амплитудной модуляции амплитудной функции. Можно попытаться дать этому явлению простое качественное объяснение. Мы ввели выше константу интегрирования  $C_0$  для случая  $K = 0$ . Введем теперь функцию

$$C(\xi) = \left[ \psi(\xi) - \frac{T}{2} \right] R(\xi)^2. \quad (9)$$

Дифференцирование показывает, что эта функция переходит в константу в пределе  $K \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{dC}{d\xi} &= 2 \left( \psi - \frac{T}{2} \right) R \frac{dR}{d\xi} + R^2 \frac{d\psi}{d\xi} \\ &= R^2 \left( 2 \frac{R'}{R} \varphi' - T \frac{R'}{R} + \varphi'' \right) = -R^n K \sin n\varphi. \end{aligned}$$

Можно показать, что изменение направления скачков имеет место в точках, где меняет знак функция  $C(\xi)$ .

## 6. Заключение

В настоящей работе показано, что приближение постоянной амплитуды для модели несоразмерного сегнетоэлектрика дает недостаточное описание пространственных конфигураций параметра порядка. Наш анализ позволил получить значительно более полную картину, описывающую возможные конфигурации, включая хаотический режим. Заметим, что учет дискретности решетки, приводящий к обобщению стандартного отображения Чирикова, не дал интересных результатов: колебания фазы играют роль более мощного хаотизатора, чем дискретность отображения.

Авторы благодарят Ю.А. Фирсова, В.В. Брыксина и Б.Н. Шалаева за плодотворные дискуссии.

## Список литературы

- [1] И. Дзялошинский. ЖЭТФ **46**, 1927 (1964).
- [2] А.П. Леванюк, Д.Г. Санников. ФТТ **18**, 423 (1976).
- [3] А.Г. Хачатурян. Теория фазовых превращений и структура твердых растворов. Наука, М. (1974). 383 с.
- [4] С.А. Ктиоров, О.С. Погорелова, Е.В. Чарная. ФТТ **45**, 2166 (2003).
- [5] E.V. Charnay, S.A. Ktitorov. Ferroelectrics **297**, 29 (2003).
- [6] Ю.А. Изюмов, М.Т. Сыромятников. Фазовые переходы и симметрия кристаллов. Наука, М. (1984). 247 с.
- [7] М. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. Мир, М. (1981). 478 с.