# ВЗАИМНАЯ СОРТИРОВКА ЭЛЕКТРОНОВ И ФОНОНОВ ПО ЭНЕРГИЯМ ЭЛЕКТРОН-ФОНОННЫМ УВЛЕЧЕНИЕМ

**Глозштейн Ю. М., Машкевич О. Л.**

Предсказано и исследовано явление взаимной сортировки электронов и фононов по энергиям взаимным электрон-фононным увлечением. Изучено влияние этого явления на протекание тока вдоль полупроводниковой пленки, когда теплоотвод осуществляется через ее боковые поверхности. Найдены температурные поля электронов и фононов при широком спектре тепловых граничных условий. Показано, что взаимное электрон-фононное увлечение в данной постановке задачи не дает существенного вклада в вид вольтамперной характеристики, однако значительно увеличивает поперечную размерную термоэдс.

В работе [1] показано, что учет взаимного электрон-фононного увлечения приводит из-за зависимости частоты электрон-фононных соударений $\nu_{ep}$ от энергии электронов $\varepsilon$ к сортировке носителей тока по энергиям. При наличии в подсистеме фононов градиента температуры в подсистеме носителей (для определенности электронов) также возникает градиент температуры, причем последний связан не с тепловыми граничными условиями для электронов, а формируется увлечением. При развитом увлечении он, во-первых, может быть много больше исходного фононного градиента температуры, а во-вторых, может оказаться даже противоположным ему по знаку.[1] В отсутствие увлечения при протекании тока вдоль полупроводниковой пленки, когда теплоотвод осуществляется через ее боковые поверхности, в подсистемах электронов и фононов, вообще говоря, возникают параболические по поперечной координате распределения температур с максимумом внутри образца [3]. Из-за этого возникают поперечные тепловые потоки электронов и фононов. Можно ожидать, что при «включении» взаимного электрон-фононного увлечения из-за зависимостей $\nu_{ep}(\varepsilon)$ и $\nu_{pe}(q_p)$ произойдет взаимная сортировка электронов и фононов по энергиям, аналогичная сортировке электронов в работе [1] ($\nu_{pe}$ – частота фонон-электронных соударений, $q_p$ — квазиимпульс фонона).

В настоящей работе рассматривается однородный полупроводник $n$-типа в форме прямоугольного параллелепипеда, размер которого вдоль оси $z$ равен $2a$, а размеры вдоль осей $x$ и $y$ много больше длины остывания $k^{-1}$. Вдоль оси $x$ приложено электрическое поле $\mathbf{E}$ и течет ток $\mathbf{j}$. Исследуется ситуация сильного фонон-фононного взаимодействия [4], когда каждая из подсистем электронов и фононов формирует свою температуру. При сделанных предположениях задачу можно считать одномерной, т. е. все величины зависят только от координаты $z$. Температурные поля электронов и фононов $T_e(z)$ и $T_p(z)$ находят из уравнений теплового баланса для каждой подсистемы [4]

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{Q}_e + P(T_e - T_p) &= \mathbf{jE}, \\ \operatorname{div} \mathbf{Q}_p + P(T_p - T_e) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

---

[1] В работе [1] рассмотрена ситуация, когда электроны теплоизолированы от термостата а фононы имеют с ним идеальный тепловой контакт. При произвольных тепловых граничных условиях указанная задача решена в работе [2].

$$\mathbf{Q}_e = -\varkappa_e \nabla T_e - \varkappa_{ep} \nabla T_p,$$
$$\mathbf{Q}_p = -\varkappa_p \nabla T_p - \varkappa_{pe} \nabla T_e, \tag{2}$$
$$\mathbf{j} = \sigma (E - \alpha_e \nabla T_e - \alpha_p \nabla T_p).$$

Здесь $\mathbf{Q}_e$ и $\mathbf{Q}_p$ — электронный и фононный потоки тепла [1], $\varkappa_e$, $\varkappa_p$ — электронная и фононная теплопроводности, $\varkappa_{ep}$, $\varkappa_{pe}$ — коэффициенты теплопроводности, связанные с увлечением, $P$ — параметр энергетического электрон-фононного взаимодействия, $\sigma$ — проводимость, $\alpha_e$ — электронная дифференциальная термоэдс, $\alpha_p$ — фононная дифференциальная термоэдс, связанная с увлечением.

К уравнениям (1) необходимо добавить тепловые граничные условия для обеих подсистем на плоскостях $z = \pm a$, которые имеют вид [4]

$$Q^z_{e,\,p}\big|_{z=\pm a} = \pm \eta^{\pm}_{e,\,p} (T_{e,\,p} - T_0)\big|_{z=\pm a}, \tag{3}$$

где $\eta_e$, $\eta_p$ — скорости поверхностной релаксации энергии электронов и фононов, индексы «$\pm$» относятся к плоскостям $z = \pm a$ соответственно.

Полагая греющее электрическое поле $E$ малым, так что $T'_{e,\,p} = T_{e,\,p} - T_0 \sim \sigma E^2$, $|T'_{e,\,p}| \ll T_0$, и линеаризуя уравнения по малым добавкам $T'_{e,\,p}$, преобразуем систему (1) к следующему виду:

$$-\varkappa_e \frac{d^2 T'_e}{dz^2} - \varkappa_{ep} \frac{d^2 T'_p}{dz^2} + P (T'_e - T'_p) = \sigma E^2,$$
$$-\varkappa_p \frac{d^2 T'_p}{dz^2} - \varkappa_{pe} \frac{d^2 T'_e}{dz^2} + P (T'_p - T'_e) = 0, \tag{4}$$

где кинетические коэффициенты от температур уже не зависят, причем $\varkappa_{ep} = \varkappa_{pe}$. При этом граничные условия (3) принимают вид

$$\left(-\varkappa_{e,\,p} \frac{dT'_{e,\,p}}{dz} - \varkappa_{ep} \frac{dT'_{p,\,e}}{dz}\right)\bigg|_{z=\pm a} = \pm \eta^{\pm}_{e,\,p} T'_{e,\,p}\big|_{z=\pm a}. \tag{5}$$

В наиболее общем случае произвольных граничных условий выражения для температурных полей выглядят очень громоздко. Исследуем несколько более простых ситуаций.

а) $\eta^-_e = \eta^+_e = \eta_e$, $\eta^-_p = \eta^+_p = \eta_p$ — *симметричный теплоотвод*. При произвольной степени увлечения решения имеют вид

$$T'_{e,\,p} = \frac{\sigma E^2}{k^2 B} \left\{ \gamma_{e,\,p} u_p \left[ \frac{k^2 a (\eta_p u_e - \eta_e u_p) - \eta_e \eta_p B A^{-1}}{Ak (\eta_e + \eta_p)\, \mathrm{sh}\, ka + \eta_e \eta_p B\, \mathrm{ch}\, ka} \mathrm{ch}\, kz + \frac{u_p}{A} \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{k^2 (a^2 - z^2)}{2} + \frac{k^2 a B}{\eta_e + \eta_p} + \frac{\eta_p u_e - \eta_e u_p}{\eta_e + \eta_p} - \frac{u_p (\eta_e + \eta_p)\, \mathrm{th}\, ka + (\eta_p u_e - \eta_e u_p)\, ka}{A (\eta_e + \eta_p)\, \mathrm{th}\, ka + \eta_e \eta_p B k^{-1}} \right\}, \tag{6}$$

где $\gamma_e = 1$, $\gamma_p = -u_e/u_p$, $A = \varkappa_e \varkappa_p - \varkappa^2_{ep}$, $B = u_e + u_p$, $u_e = \varkappa_e + \varkappa_{ep}$, $u_p = \varkappa_p + \varkappa_{ep}$, $k^2 = PB/A$. В предельном случае отсутствия увлечения решения (6) совпадают с выражениями, полученными в работе [3]. Из выражений (6) видно, что, вообще говоря, температурные поля, как и в работе [2], сложным нелинейным образом зависят от теплопроводности $\varkappa_{ep}$. Однако учет обстоятельства, что $\varkappa_p \gg |\varkappa_{ep}|$, $\varkappa_e \varkappa_p \gg \varkappa^2_{ep}$, а при развитом увлечении $|\varkappa_{ep}| \gg \varkappa_e$ [5], приводит к тому, что существенными в (6) оказываются только линейные и квадратичные по $\varkappa_{ep}$ слагаемые

$$T'_{e,\,p} = \frac{\sigma E^2}{k^2 \varkappa_p} \left\{ \gamma'_{e,\,p} \left[ \frac{k^2 a [\eta_p (\varkappa_e + \varkappa_{ep}) - \eta_e \varkappa_p] - \eta_e \eta_p \varkappa_p \varkappa_e^{-1}}{\varkappa_e k (\eta_e + \eta_p)\, \mathrm{sh}\, ka + \eta_e \eta_p\, \mathrm{ch}\, ka} \mathrm{ch}\, kz + \frac{\varkappa_p}{\varkappa_e} \right] + \right.$$
$$+ \frac{k^2 (a^2 - z^2)}{2} + \frac{k^2 a \varkappa_p}{\eta_e + \eta_p} + \frac{\eta_p (\varkappa_e + \varkappa_{ep}) - \eta_e \varkappa_p}{(\eta_e + \eta_p) \varkappa_p} \times$$
$$\left. \times \frac{\varkappa_p (\eta_e + \eta_p)\, \mathrm{th}\, ka + [\eta_p (\varkappa_e + \varkappa_{ep}) - \eta_e \varkappa_p]\, ka}{\varkappa_e (\eta_e + \eta_p)\, \mathrm{th}\, ka + \eta_e \eta_p k^{-1}} \right\}, \tag{7}$$

где $\gamma_e'=1$, $\gamma_p=-(\varkappa_e+\varkappa_{ep})/\varkappa_p$. В [1, 2] существенными оказывались только линейные по $\varkappa_{ep}$ слагаемые в электронной температуре, и их наличие интерпретировалось как сортировка электронов по энергиям фононами за счет увлечения. Наличие квадратичных по $\varkappa_{ep}$ слагаемых в (7) следует интерпретировать как результат взаимной сортировки электронов и фононов взаимным электрон-фононным увлечением.

В том же приближении, в котором решались уравнения (1), вольтамперная характеристика (ВАХ) имеет вид

$$j=\sigma_0(1+\beta E^2)E, \tag{8}$$

где $\sigma_0=\sigma(T_e', T_p')\mid_{T'_{e,p}=0}$, $\beta$ — коэффициент неомичности. Расчет коэффициента неомичности в этой и других ситуациях показал, что учет увлечения не дает существенного вклада в $\beta$. Взаимная сортировка квазичастиц по энергиям приводит к перераспределению их энергии по сечению образца, но не меняет средних температур электронов и фононов, которые как раз и определяют коэффициент неомичности. Размерная зависимость $\beta$ в отсутствие увлечения при $\eta_e^+=\eta_e^-$, $\eta_p^+=\eta_p^-$ исследована в работе [6].

*б)* $\eta_e^+=0$, $\eta_p^+\neq\eta_p^-$ — *несимметричный теплоотвод*. Случай, когда электроны теплоизолированы на границах, наиболее интересен и легко реализуется на практике путем создания слоя обеднения вблизи боковых поверхностей пленки, так что электроны как бы «отжаты» от стенок и отсутствует их энергетическое взаимодействие с окружающим термостатом [7]. При этом нагрев электронной подсистемы и градиент температуры в ней максимальны. Выражения для температурных полей принимают вид

$$T'_{e,p}=\frac{\sigma E^2}{k^2\varkappa_p}\left\{\gamma'_{e,p}\left[\left(1+\frac{\varkappa_{ep}}{\varkappa_e}\right)ka\left(\frac{\eta_p^+-\eta_p^-}{\eta_p^++\eta_p^-+\dfrac{2a}{\varkappa_p}\eta_p^+\eta_p^-}\frac{\operatorname{sh}kz}{\operatorname{ch}ka}+\frac{\operatorname{ch}kz}{\operatorname{sh}ka}\right)+\frac{\varkappa_p}{\varkappa_e}\right]+\right.$$
$$+\frac{k^2(a^2-z^2)}{2}+\frac{(\eta_p^+-\eta_p^-)ka}{\eta_p^++\eta_p^-+\dfrac{2a}{\varkappa_p}\eta_p^+\eta_p^-}kz+$$
$$\left.+\left(1+\frac{\varkappa_{ep}}{\varkappa_e}\right)\left(1+\frac{ka}{\operatorname{th}ka}\frac{\varkappa_e+\varkappa_{ep}}{\varkappa_p}\right)+k^2a^2\frac{\eta_p^++\eta_p^-+\dfrac{2\varkappa_p}{a}}{\eta_p^++\eta_p^-+\dfrac{2a}{\varkappa_p}\eta_p^+\eta_p^-}\right\}. \tag{9}$$

При $\eta_p^+=\eta_p^-=\eta_p$ они совпадают с выражениями, получаемыми из (7) при $\eta_e=0$.

С учетом того, что из-за одномерности задачи из уравнения непрерывности и граничных условий на ток $j_z|_{z=\pm a}=0$ следует, что

$$j_z=\sigma(E_z-\alpha_e\nabla_z T_e-\alpha_p\nabla_z T_p)=0,$$

находим поперечное электрическое поле $E_z$ и, интегрируя его по сечению пластины, получаем поперечную термоэдс $V$:

$$V=\alpha_e[T_e(a)-T_e(-a)]+\alpha_p[T_p(a)-T_p(-a)]. \tag{10}$$

Взаимная сортировка электронов и фононов по энергиям взаимным увлечением увеличивает разность температур $T_{e,p}$ на границах, вследствие чего дает существенный вклад в поперечную термоэдс

$$V=V_0\left[\left(\frac{\varkappa_e+\varkappa_{ep}}{\varkappa_e}\frac{\operatorname{th}ka}{ka}-1\right)-\frac{\alpha_p}{\alpha_e}\left(\frac{(\varkappa_e+\varkappa_{ep})^2}{\varkappa_e\varkappa_p}\frac{\operatorname{th}ka}{ka}+1\right)\right],$$
$$V_0=\frac{2\sigma E^2a^2(\eta_p^+-\eta_p^-)\alpha_e}{\varkappa_p(\eta_p^++\eta_p^-)+2a\eta_p^+\eta_p^-}. \tag{11}$$

**В частности, в тонких образцах ($ka\ll 1$) при развитом увлечении это выражение сведется к**

$$V = V_0\left(\frac{\varkappa_{ep}}{\varkappa_e} - \frac{\alpha_p}{\alpha_e}\right), \tag{12}$$

в предельном случае отсутствия увлечения выражение для поперечной термоэдс принимает вид

$$V = V_0\left(\frac{\operatorname{th} ka}{ka} - 1\right). \tag{13}$$

Из (12) и (13) видно, что с учетом увлечения поперечная термоэдс сильно возрастает, особенно при $\varkappa_{ep} < 0$ (рассеяние электронов на поляризационном потенциале акустических фононов).

Коэффициент неомичности в этом случае будет равен:

$$\beta = \frac{\sigma_0}{k^2\varkappa_p T_0}\left[q\,\frac{\varkappa_p}{\varkappa_e} + (q-1)\,k^2a^2\left(\frac{1}{6} + \frac{\eta_p^+ + \eta_p^- + \dfrac{2\varkappa_p}{a}}{\eta_p^+ + \eta_p^- + \dfrac{2a}{\varkappa_p}\,\eta_p^+\eta_p^-}\right)\right]. \tag{14}$$

Здесь $q$ — показатель степенной зависимости от энергии $\varepsilon$ частоты $\nu_{ep}$. В соответствии со сказанным выше $\beta$ не зависит от теплопроводности $\varkappa_{ep}$. При $ka \to 0$ $\to q\sigma_0/k^2\varkappa_e T_0$, так как только за счет разогрева электронов возможны передача джоулева тепла фононам и вынос его за границы. При $\eta_p = \eta_p^-$ выражение для $\beta$ сводится к выражениям, приведенным в работе [8].

в) $\eta_e^- = \eta_p^- = 0$, $\eta_e^+ = \eta_p^+ = \infty$ — *сильно несимметричный теплоотвод*. Температурные поля имеют вид

$$T'_{e,\,p} = \frac{\sigma E^2}{k^2\varkappa_p}\left[\gamma''_{e,\,p}\left(1 - \frac{\operatorname{ch} k\,(a+z)}{\operatorname{ch} 2ka}\right) - \frac{k^2\,(a+z)^2}{2} + 2k^2a^2\right], \tag{15}$$

где $\gamma''_e = \varkappa_p/\varkappa_e$, $\gamma''_p = -(1 + \varkappa_{ep}/\varkappa_e)$. Из (15) следует, что взаимное электрон-фононное увлечение, не меняя $T'_e(z)$, дает существенный вклад в $T'_p(z)$. Так, например, в тонких образцах ($ka \ll 1$) без учета увлечения фононы равновесны, т. е. $T'_p = 0$, а при развитом увлечении имеем

$$T'_p = -\frac{\sigma E^2}{k^2\varkappa_p}\,\frac{\varkappa_{ep}}{\varkappa_e}\,\frac{k^2\,(a-z)\,(3a+z)}{2}. \tag{16}$$

В этой ситуации реализуется только сортировка фононов по энергиям электронным увлечением (ср. [1]). Поясним механизм сортировки. Джоулево тепло выделяется в подсистеме электронов, а за счет их охлаждения на плоскости $z = a$ и теплоизоляции на плоскости $z = -a$ появляется большой исходный поток тепла. Из-за зависимости $\nu_{pe}(q_p)$ по-разному будут увлекаться электронами фононы с различными значениями квазиимпульса. Например, если $\nu_{pe}(q_p)$ — возрастающая функция, то электроны будут сильнее увлекать фононы с бо́льшими значениями квазиимпульса («горячие» фононы). Этот случай реализуется при рассеянии электронов на деформационном потенциале акустических фононов, и при этом $\varkappa_{ep} > 0$. В результате у стенок пластины $z = -a$ и $z = a$ будут накапливаться соответственно «холодные» и «горячие» фононы. Необходимо заметить, что результат сортировки существенно зависит от фононных тепловых граничных условий.

Поперечная термоэдс в тонких образцах будет равна:

$$V = -\frac{2\sigma E^2 a^2 \alpha_e}{\varkappa_p}\left(1 - \frac{\alpha_p}{\alpha_e}\,\frac{\varkappa_{ep}}{\varkappa_p}\right), \tag{17}$$

где второй член в скобках описывает вклад увлечения. При $\varkappa_{ep} < 0$ $V$ возрастает, при $\varkappa_{ep} > 0$ $V$ уменьшается. Однако перемена знака поперечной термоэдс произойти не может, так как второй член в скобках меньше 1 (см. [8]).

Выражение для коэффициента неомичности имеет вид

$$\beta = \frac{\sigma_0}{k^2 \varkappa_p T_0} \left[ \left( 1 + q \frac{\varkappa_p}{\varkappa_e} \right) \left( 1 - \frac{\operatorname{th} 2ka}{2ka} \right) + \frac{4}{3} (q - 1) k^2 a^2 \right]. \qquad (18)$$

При $ka \to 0$ $\beta \to 0$, так как в этом случае при очень малых размерах все тепло из образца будет эффективно выноситься поверхностными механизмами релаксации энергии электронов и фононов. При $q \leqslant 0$ ВАХ сублинейная ($\beta < 0$), при $q \geqslant 1$ ВАХ суперлинейная ($\beta > 0$). Если $0 < q < 1$, то с ростом толщины пластины $a$ наблюдается переход от супер- к сублинейной ВАХ.

Таким образом, в работе показано, что учет электрон-фононного увлечения при протекании тока вдоль тонкой полупроводниковой пластины приводит к поперечной взаимной сортировке электронов и фононов по энергиям. Установлено, что учет увлечения сильно увеличивает поперечную термоэдс и в то же время не дает существенного вклада в неомичность.

Авторы выражают благодарность Ю. Г. Гуревичу за интерес к работе и полезные дискуссии.

Список литературы

[1] Бочков А. В., Гуревич Ю. Г., Машкевич О. Л. // Письма ЖЭТФ. 1985. Т. 42. В. 7 С. 281—283.
[2] Бочков А. В., Машкевич О. Л. // Изв. вузов СССР. Физика. 1988. Т. 30. В. 2. С. 36—41
[3] Бочков В. С., Гредескул Т. С. // ФТП. 1988. Т. 22. В. 3. С. 396—401.
[4] Басс Ф. Г., Бочков В. С., Гуревич Ю. Г. Электроны и фононы в ограниченных полупроводниках. М., 1984. 237 с.
[5] Бочков А. В., Гуревич Ю. Г., Машкевич О. Л. // ФТП. 1986. Т. 20. В. 3. С. 572—574
[6] Бочков В. С., Гредескул Т. С., Гуревич Ю. Г. // УФЖ. 1989. Т. 34. В. 4. С. 583—587
[7] Климовская А. И., Снитко О. В. // Письма ЖЭТФ. 1968. Т. 7. В. 6. С. 194—198.
[8] Бочков А. В., Гуревич Ю. Г., Машкевич О. Л. // ФТП. 1989. Т. 23. В. 10. С. 1752—1755

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Получена 7.09.1989
Принята к печати 14.11.1989