УДК 535.226;539.219.3;538.931—405

БАРОТОКИ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКАХ С ДИФФУЗИОННЫМ МЕХАНИЗМОМ ПРОВОДИМОСТИ

Д. В. Алексеев

Получены уравнения для токового отклика пьезоэлектрика, обусловленного взаимодействием заряженных дефектов с полем упругих напряжений через дилатационное взаимодействие и пьезоэлектрическое поле. Эти уравнения применяются далее для вычисления поверхностных плотностей заряда и дипольного момента на фронте плоской ударной волны, линейных плотностей заряда и дипольного момента на фронте плоской трещины, дополнительного вклада в коэффициент поглощения поперечного звука, обусловленного токовым откликом.

В работах [1–3] рассматривается возбуждение ионного тока в неполярных диэлектриках (баротока), обусловленного randодиффузией заряженных дефектов (вакансий и междоузельных атомов) в поле неравновесных механических напряжений, например в поле звуковой или ударной волн, поле напряжений, сопровождающем распространение трещин.

В данной работе предпринимается попытка обобщения результатов [1–3] на пьезоэлектрики. Главное отличие рассматриваемого случая от описанного в [1–3] случая неполярных диэлектриков состоит в том, что электрическое поле $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, входящее в выражение для линейного приближения диффузионного потока дефектов, выражается через потенциал, удовлетворяющий уравнению

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\nabla^{\alpha}\nabla^{\beta}\varphi = -4\pi\left\{\delta\rho(\mathrm{x}) - \gamma_{\lambda,\mu\nu}\nabla^{\lambda}\sigma^{\mu\nu}(\mathrm{x})\right\} \qquad (1)$$

(по повторяющимся тензорным индексам ведется суммирование). Правая часть (1) определяется возмущением плотности носителей заряда $\delta\rho$ и прямым пьезоэлектрическим эффектом во внешнем поле механических напряжений $\sigma^{\mu\nu}(\mathrm{x})$ ($\varepsilon_{\alpha\beta}$ — тензор диэлектрической проницаемости, $\gamma_{\lambda,\mu\nu} = \gamma_{\lambda,\nu\mu}$ — пьезоэлектрический тензор). Подчеркнем еще раз, что (1) является уравнением линейного приближения, включающего в себя только механические напряжения, обусловленные внешними воздействиями.

1. Термодинамическое рассмотрение баротока в пьезоэлектрике

Рассмотрим для конкретности пьезоэлектрик с двумя типами дефектов с зарядами q и $-q$. При помощи известных соотношений линейной неравновесной термодинамики [4,5] диффузионные потоки дефектов могут быть выражены через кинетические коэффициенты и градиенты электрохимических потенциалов $\zeta_{\pm} = \mu_{\pm} \pm q\varphi$

$$i_{\alpha}^{(\pm)} = \lambda_{\alpha\beta}^{(\pm)}\nabla^{\beta}(\mu_{\pm} \pm q\varphi).$$

Считая для простоты температуру постоянной, разлагая химические потенциалы дефектов $\mu_{\pm}$ по градиентам концентраций и напряжений

$$\nabla\mu_\pm = \left(\frac{\partial\mu_\pm}{\partial n_\pm}\right)_{\sigma,\,T}\nabla n_\pm + \left(\frac{\partial\mu_\pm}{\partial\sigma^{\mu\nu}}\right)_{T,\,n}\nabla\sigma^{\mu\nu},$$

используя связь кинетических коэффициентов с тензорами диффузии

$$D^{(\pm)}_{\alpha\beta} = \lambda^{(\pm)}_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\mu_\pm}{\partial n_\pm}\right)_{\sigma,\,T}$$

и термодинамические соотношения

$$\left(\frac{\partial\mu_\pm}{\partial n_\pm}\right)_{\sigma,\,T} = \frac{k_Б T}{n_\pm},$$

$$\left(\frac{\partial\mu_\pm}{\partial\sigma^{\mu\nu}}\right)_{n,\,T} = -\left(\frac{\partial u_{\mu\nu}}{\partial n_\pm}\right)_{\sigma,\,T} = -\Omega^{(\pm)}_{\mu\nu}$$

($\Omega^{(\pm)}_{\mu\nu}$ — тензор дилатации [6]), представим потоки дефектов в виде

$$i^{(\pm)}_\alpha = -D^{(\pm)}_{\alpha\beta}\nabla^\beta n_\pm \pm \frac{1}{q}\sigma^{(\pm)}_{\alpha\beta}E^\beta + \frac{1}{q}\varkappa_{\alpha\beta;\,\mu\nu}\nabla^\beta\sigma^{\mu\nu}. \tag{2}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\sigma^{(\pm)}_{\alpha\beta} = q^2 n_\pm D^{(\pm)}_{\alpha\beta}/k_Б T,$$
$$\varkappa^{(\pm)}_{\alpha\beta;\,\mu\nu} = q n_\pm D^{(\pm)}_{\alpha\beta}\Omega^{(\pm)}_{\mu\nu}/k_Б T. \tag{3}$$

Из (2) немедленно следует выражение для плотности электрического тока

$$j_\alpha = q\left(i^{(+)}_\alpha - i^{(-)}_\alpha\right) = \sum\nolimits_{\alpha\beta}E^\beta - \varkappa_{\alpha\beta;\,\mu\nu}\nabla^\beta\sigma^{\mu\nu} + q\left(D^{(-)}_{\alpha\beta}\nabla^\beta n_- - D^{(+)}_{\alpha\beta}\nabla^\beta n_+\right), \tag{4}$$

где введены тензор полной проводимости $\sum_{\alpha\beta} = \sigma^{(+)}_{\alpha\beta} + \sigma^{(-)}_{\alpha\beta}$ и бароэлектрический тензор

$$\varkappa_{\alpha\beta;\,\mu\nu} = \varkappa^{(-)}_{\alpha\beta;\,\mu\nu} - \varkappa^{(+)}_{\alpha\beta;\,\mu\nu}.$$

Входящее в (4) электрическое поле определяется потенциалом, удовлетворяющим уравнению (1).

При отсутствии генерации носителей заряда их плотность определяется из уравнений непрерывности

$$\frac{\partial n_\pm}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{i}^{(\pm)} = 0 \tag{5}$$

при соответствующих конкретной задаче начальных и граничных условиях. В линейном приближении (т. е. для слабо неоднородных состояний) $\delta n_\pm \ll n_\pm$ уравнения (5) записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta n_\pm - D^{(\pm)}_{\alpha\beta}\nabla^\alpha\nabla^\beta\delta n_\pm = \mp\frac{1}{q}\sigma^{(\pm)}_{\alpha\beta}\nabla^\alpha E^\beta - \frac{1}{q}\varkappa^{(\pm)}_{\alpha\beta;\,\mu\nu}\nabla^\alpha\nabla^\beta\sigma^{\mu\nu}. \tag{6}$$

Решая (6) совместно с (1), где полагаем $\delta\rho = q(\delta n_+ - \delta n_-)$, при помощи перехода к пространственным Фурье-компонентам $\delta n_\pm(\mathbf{k})$ получаем систему уравнений

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + D^{(\pm)}_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta\right\}\delta n_\pm(\mathbf{k}) \pm \frac{4\pi q^2 n_\pm}{k_Б T}\,\frac{D^{(\pm)}_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta}{\varepsilon_{\sigma\rho}k^\sigma k^\rho}\left\{\delta n_+(\mathbf{k}) - \delta n_-(\mathbf{k})\right\} =$$
$$= \frac{n_\pm}{k_Б T}\left(D^{(\pm)}_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta\right)\Omega^{(\pm)}_{\mu\nu}\widetilde{\sigma^{\mu\nu}}(\mathbf{k}) \pm i\,\frac{4\pi q n_\pm}{k_Б T}\,\frac{D^{(\pm)}_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta}{\varepsilon_{\sigma\rho}k^\sigma k^\rho}\,k^\lambda\gamma_{\lambda,\mu\nu}\widetilde{\sigma^{\mu\nu}}(\mathbf{k}), \tag{7}$$

которая является обобщением соответствующих уравнений [1] на случай пьезоэлектрического кристалла.

Дальнейшее решение (7) требует конкретизации механизма обеспечения электронейтральности решетки (разупорядоченность по Шоттки или по Френкелю, носители на статическом нейтрализующем фоне), существенно зависит от симметрии кристалла, конкретного вида внешних напряжений $\sigma^{\mu\nu}$ и в общем виде нецелесообразно.

С целью упрощения дальнейшего изложения рассмотрим ниже случай кубического пьезоэлектрика симметрии T или T_d. Тогда в системе кристаллических осей тензор диэлектрической проницаемости диагонален $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon\delta_{\alpha\beta}$, а у пьезоэлектрического тензора отличны от нуля только компоненты $\gamma_{x,yz} = \gamma_{y,zx} = \gamma_{z,xy} = \gamma$ [4]. Дополнительно положим, что в кристалле имеется только один тип подвижных дефектов с зарядом на неподвижном нейтрализующем фоне, и дефекты занимают полносимметричную позицию. Тогда также диагональны тензоры диффузии и дилатации $D_{\alpha\beta} = D\delta_{\alpha\beta}$, $\Omega_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}(\Omega/3)$ (множитель 1/3 введен для нормировки) [6]. С учетом перечисленных упрощений (7) представляется в виде

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + D\left(k^2 + a_D^{-2}\right)\right\}\delta n(\mathbf{k}) = \frac{D\varepsilon\Omega}{12\pi q^2 a_D^2}\,k^2\widetilde{\sigma^{\mu\mu}}(\mathbf{k}) + i\,\frac{D}{q a_D}\,k^\lambda\gamma_{\lambda,\mu\nu}\widetilde{\sigma^{\mu\nu}}(\mathbf{k}), \tag{8}$$

где a_D — длина экранирования, определенная стандартным образом

$$a_D^2 = \varepsilon k_Б T/4\pi q^2 n.$$

2. Электрические характеристики фронта ударной волны

Вычислим поверхностные плотности заряда и дипольного момента, возникающие на фронте плоской ударной волны, распространяющейся в бесконечном кристалле с постоянной скоростью v. Для простоты моделируем ударную волну идеальным скачком напряжения

$$\sigma^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \sigma_0 n^\mu n^\nu \theta\left((\mathbf{x}\mathbf{n}) - vt\right). \tag{9}$$

Вычисление проводим в системе координат, движущейся с фронтом волны, что соответствует замене в (8) оператора $\partial/\partial t$ на $-iv(\mathbf{k}\mathbf{n})$. Входящую в (8) Фурье-компоненту тензора напряжений вычисляем по волновой координате $\zeta = (\mathbf{n}\mathbf{x}) - vt$, что дает

$$\sigma^{\mu\nu}(\mathbf{k}) = \sigma_0 n^\mu n^\nu (2\pi)^2\delta^{(2)}(\mathbf{k}_\perp)/i(\mathbf{k}\mathbf{n}). \tag{10}$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении распространения волны, $\mathbf{k}_\perp = \mathbf{k} - \mathbf{n}(\mathbf{k}\mathbf{n})$, θ — функция Хевисайда, $\sigma_0 = -3\Delta P$, где ΔP — скачок давления на фронте.

Используя свойство δ-функции

$$f(\mathbf{k}_\parallel + \mathbf{k}_\perp)\,\delta^{(2)}(\mathbf{k}_\perp) = f(\mathbf{k}_\parallel)\delta^{(2)}(\mathbf{k}_\perp),$$

представляем решение (8) в виде

$$\delta n(\mathbf{k}) = (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k}_\perp)\, \overline{\delta n(k)}, \tag{11}$$

$$\overline{\delta n(k)} = \frac{\sigma_0 \left\{ \dfrac{\varepsilon\Omega}{12\pi q} ik + n^\lambda \gamma_{\lambda,\mu\nu} n^\mu n^\nu \right\}}{q\,(k^2 a_D^2 - ika_D\lambda + 1)}.$$

Проводя нормировку на единичную площадь путем вычеркивания в (11) множителя $(2\pi)^2\delta^{(2)}(\mathbf{k}_\perp)$, поверхностные плотности заряда Q и дипольного момента D вычисляем по формулам

$$Q = \int \frac{dk d\zeta}{2\pi} e^{ik\zeta} q \overline{\delta n(k)} = q\overline{\delta n(0)} = \sigma_0\,(n^\lambda \gamma_{\lambda,\mu\nu} n^\mu n^\nu),$$

$$D = \int \frac{dk d\zeta}{2\pi} \zeta e^{ik\zeta} q \overline{\delta n(k)} = \frac{q}{i} \frac{d\,\overline{\delta n(k)}}{dk}\Big|_{k=0} = \sigma_0 \lambda a_D\,(n^\lambda \gamma_{\lambda,\mu\nu} n^\mu n^\nu) +$$

$$+ \sigma_0 \left(\frac{\varepsilon\Omega}{12\pi q} \right) \equiv D^{(p)} + D^{(d)}, \tag{12}$$

где $\lambda = va_D/D$.

Из (12) видно, что в отличие от случая неполярных диэлектриков [2] при распространении ударной волны в направлениях, для которых выполняется правило отбора

$$n^\lambda \gamma_{\lambda,\mu\nu} n^\mu n^\nu \neq 0 \tag{13}$$

(например, в направлении [111] в рассматриваемом случае кубического пьезоэлектрика), на фронте волны локализуется заряд с поверхностной плотностью $Q \sim \sigma_0 \gamma$ и возникает дополнительный вклад в дипольный момент $D^{(p)} \sim \sigma_0 \gamma \lambda a_D$. При этом относительный вклад в дипольный момент дилатационного взаимодействия и взаимодействия с пьезоэлектрическим полем дается отношением

$$\frac{D^{(p)}}{D^{(d)}} \sim \lambda \frac{q\gamma a_D}{\Omega}.$$

Для типичных значений: $\gamma \sim 10^{-12}$ Кл/Н, $a_D \sim 10^{-7}$ м, $v \sim 10^3$ м/с, $D \sim$ $\sim 10^{-11}$ м^2/с, $\Omega \sim 10^{-29}$ м^3, $q = q_e$ для ударной волны $\sigma_0 \sim 1$ кбар $= 10^8$ Па получаем: $Q^{(p)} \sim 10^{-4}$ Кл/м^2, $D^{(p)} \sim 10^{-5}$ Кл/м, $D^{(p)}/D^{(d)} \sim 10^6$.

Таким образом, при выполнении правила отбора (13) вклад от взаимодействия заряженных дефектов с пьезоэлектрическим полем доминирует.

3. Поглощение звука, обусловленное баротоком

Диссипация энергии звуковой волны, обусловленная баротоком, связана с выделением джоулева тепла и вычисляется по формуле

$$\delta \dot{E}_M = -|\mathbf{j}_{\mathbf{k}\omega}|^2/\sigma, \tag{14}$$

где Фурье-компонента баротока $\mathbf{j}_{\mathbf{k}\omega}$ вычисляется из уравнений

$$\mathbf{j}_{\mathbf{k}\omega} = \frac{q^2 nD}{k_Б T} \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} - i\mathbf{k} qD\delta n(\mathbf{k}\omega) + i\mathbf{k} \frac{qnD\Omega}{3k_Б T} \sigma^{\mu\nu}(\mathbf{k}\omega),$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = -\frac{i\mathbf{k}\cdot 4\pi}{\varepsilon k^2} \left\{ q\delta n(\mathbf{k}\omega) - ik^\lambda \gamma_{\lambda,\mu\nu} \widetilde{\sigma^{\mu\nu}}(\mathbf{k}\omega) \right\}, \tag{15}$$

являющихся следствием (1), (4) и учитывающих упрощения для случая кубического пьезоэлектрика.

Входящая в (15) Фурье-компонента плотности носителей δn (kω) вычисляется по уравнению (8), в котором сделана замена $\partial/\partial t \to -i\omega$. Решая полученное уравнение и учитывая, что $\mathbf{k} = \mathbf{n}\omega/c$, $\tau_\sigma = \sigma^{-1}$, а также обозначая $\lambda = ca_D/D$, окончательно представим (14) в виде

$$\delta \dot{E}_M = -\frac{\tau_\sigma\omega^2 \left\{ n^\lambda \gamma_{\lambda,\mu\nu} \widetilde{\sigma}^{\mu\nu}(\mathbf{k},\ \omega) + \omega^2 \dfrac{\varepsilon\Omega}{12\pi qc} \widetilde{\sigma}^{\mu\nu}(\mathbf{k}\omega) \right\}}{\omega^2\tau_\sigma^2 + (1 + \omega^2\tau_\sigma^2/\lambda^2)^2}. \tag{16}$$

Используя связь тензоров напряжения и деформации [7]

$$\widetilde{\sigma}^{\mu\nu}(\mathbf{k}\omega) = \Lambda^{\mu\nu;\,\alpha\beta} \widetilde{u}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}\omega),$$

симметрию пьезоэлектрического тензора и тензора упругих постоянных для кубического кристалла [4,7], немедленно получаем, что затухание продольного звука связано с дилатационным взаимодействием (второе слагаемое в фигурных скобках числителя (16)), а затухание поперечного звука — с взаимодействием носителей заряда с пьезоэлектрическим полем, возбуждаемым звуковой волной.

Рассмотрим поглощение поперечного звука (поглощение продольного звука обсуждалось в [1]). Определяя коэффициент поглощения стандартным образом [7]

$$\gamma_j^+ = (|\delta \dot{E}_M|)/(c_t \overline{E}_M)$$

и учитывая, что

$$\overline{E}_M = u^2\rho\omega^2/2, \quad |\widetilde{u}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}\omega)| = u(|k_\alpha e_\beta + k_\beta e_\alpha|)/2 \ \text{[7]}$$

(e, c_t и u — вектор поляризации, скорость и амплитуда поперечной звуковой волны), получаем

$$\gamma_j^t = \frac{2\omega^2\tau_\sigma\, |n^\lambda \gamma_{\lambda,\mu\nu} \Lambda^{\mu\nu;\,\alpha\beta} n_\alpha e_\beta|^2}{\rho c_t^3\, \omega^2\tau_\sigma^2 + (1 + \omega^2\tau_\sigma^2/\lambda^2)^2}. \tag{17}$$

Из (17) видно, что в отличие от коэффициента поглощения продольного звука на низких частотах ($\omega\tau_\sigma \ll 1$) $\gamma_j^t \sim \omega^2$, а на высоких частотах ($\omega\tau_\sigma/\lambda \gg |$) $\gamma_j^t \sim \omega^{-2}$. Кроме того, поглощение отлично от нуля лишь при выполнении правила отбора

$$n^\lambda \gamma_{\lambda,\mu\nu} \Lambda^{\mu\nu;\,\alpha\beta} n_\alpha e_\beta \neq 0. \tag{18}$$

В частности, поглощение обращается в нуль, если n направлен по кристаллическим осям.

Сравнение коэффициента поглощения (17) с ахиезеровским [8] показывает, что обусловленное баротоком поглощение доминирует на частотах

$$\omega^2 \lesssim \gamma^2 C_V^2 c_t^2/(\tau_\sigma \alpha^2 \varkappa_T T),$$

что для типичных значений параметров: $\alpha \sim 10^{-5}$ K^{-1}, $\varkappa_T \sim 1$ Дж/К · м · с, $C_V \sim 10^{6\div7}$ Дж/К · м^3, $c_t \sim 10^3$ м/с, $a_D \sim 10^{-7}$ м, $D \sim 10^{-11}$ м^2/с, $\tau_\sigma \sim a_D^2/D$ дает $\omega \lesssim 10 \div 100$ МГц.

4. Электрические характеристики движущейся трещины

Вычисление линейных плотностей заряда Q и дипольного момента $\mathbf{D}$, возникающих на вершине равномерно движущейся плоской трещины, проводится по формулам (11) работы [3], в которые необходимо подставить соответствующее решение (8). Последнее получаем, как и в [3], путем перехода к безразмерным координатам (ξ, η) системы, движущейся вместе с вершиной трещины, далее к пространственным Фурье-компонентам и записываем в виде

$$\delta n(\mathbf{k}) = \frac{q^{-1}a_D^{-2}}{k_1^2 + (1 - v^2)k_2^2 - i\lambda v k_1 + 1} \times$$
$$\times \left\{ \left(\frac{\varepsilon\Omega}{12\pi q} \right) (-\widetilde{\Delta\sigma^{\mu\mu}})(\mathbf{k}) + a_D \gamma_{\lambda,\mu\nu} (\widetilde{\nabla^\lambda \sigma^{\mu\nu}})(\mathbf{k}) \right\}. \tag{19}$$

Здесь, как и в [3], k_1, k_2 — координаты волнового вектора в направлении распространения и в направлении, перпендикулярном плоскости трещины; $v = V/c$ — безразмерная скорость трещины; c — ее предельная скорость.

При вычислении входящих в (19) Фурье-компонент $\widetilde{\Delta\sigma^{\mu\mu}}$ и $\widetilde{\nabla\sigma^{\mu\nu}}$ необходимо учитывать два принципиальных момента.

Во-первых, поскольку вблизи вершины трещины $\Delta\sigma^{\mu\mu}$ имеет сингулярность $\sim\rho^{-5/2}$, а $\nabla\sigma^{\mu\nu}$ — $\sim\rho^{-3/2}$, для корректного учета сингулярности $\rho^{-3/2}$ в выражении для $\sigma^{\mu\nu}$ необходимо вместе с сингулярным вкладом $\sim\rho^{-1/2}$ учитывать первую регулярную поправку $\sim\rho^{1/2}$. Для этого записываем радиальную зависимость в виде

$$\sigma^{\mu\mu}(\rho, \theta) \sim (\rho^{-1/2} + \rho^{1/2}/\rho_s) + O(\rho^{3/2}), \tag{20}$$

где $\rho_s = \Gamma_s/a_D$ — безразмерное расстояние от вершины трещины, на котором сингулярный вклад становится сравнимым с регулярным.

Во-вторых, вычисление радиальных интегралов, возникающих при получении оценок для $\widetilde{\Delta\sigma^{\mu\mu}}$ и $\widetilde{\nabla\sigma^{\mu\nu}}$, требует различного способа их обрезания: при вычислении вклада от сингулярности $\rho^{-5/2}$, как и в [3], проводится обрезание на малых расстояниях $\rho_c = \delta/a_D$ ($\delta \sim G/\sigma_T$, раскрытие трещины); при вычислении вклада от сингулярности $\rho^{-3/2}$ требуется обрезать интеграл на больших расстояниях R_c. В качестве R_c возьмем безразмерную длину релаксационной зоны [3]

$$R_c = L_R/a_D = v\tau_\sigma/a_D = v\lambda.$$

Не приводя громоздких промежуточных вычислений, необходимых для получения разложений $\widetilde{\Delta\sigma^{\mu\mu}}$, $\widetilde{\nabla\sigma^{\mu\nu}}$, по степеням $\mathbf{k}$, применяемых при вычислении пределов типа (12) (упомянутые выше формулы (11) работы [3]), выпишем конечные формулы для искомых линейных плотностей заряда Q и дипольного момента $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2$ для трещин нормального отрыва (I) и поперечного (плоского) сдвига (II)

$$Q_{\mathrm{I}} = Q_{\mathrm{I}}^{(d)} + Q_{\mathrm{I}}^{(p)}, \quad D_{1\,\mathrm{I}} = D_{1\mathrm{I}}^{(d)} + D_{1\mathrm{I}}^{(p)}, \quad D_{2\,\mathrm{I}} = D_{2\mathrm{I}}^{(p)}, \tag{21}$$

$$Q_{\mathrm{II}} = Q_{\mathrm{II}}^{(p)}, \quad D_{1\,\mathrm{II}} = D_{1\mathrm{II}}^{(p)}, \quad D_{2\,\mathrm{II}} = D_{2\mathrm{II}}^{(d)} + D_{2\mathrm{II}}^{(p)}, \tag{22}$$

$$Q_{\mathrm{I}}^{(d)} = \left(\frac{\varepsilon\Omega}{4\pi q} \right) \frac{3v^2 K_{\mathrm{I}}(v)}{5\sqrt{1 - v^2}\sqrt{2\pi\delta}} \left\{ 1 + \frac{5}{24} v^{1/2} \frac{\sqrt{\lambda\delta a_D}}{\Gamma_s} \right\}, \tag{23}$$

$$D_{1\mathrm{I}}^{(d)} = \left(\frac{\varepsilon\Omega}{4\pi q}\right) \frac{3\nu^2 K_{\mathrm{I}}(\nu)\,\lambda a_D}{5\sqrt{1-\nu^2}\,\sqrt{2\pi\delta}} \left\{\nu + \frac{5}{21}\nu^{3/2}\frac{\sqrt{\lambda\delta a_D}}{\Gamma_s} - \frac{50}{21}\frac{\delta}{\lambda a_D}\right\}, \tag{24}$$

$$D_{2\mathrm{II}}^{(d)} = -\left(\frac{\varepsilon\Omega}{4\pi q}\right) \frac{10\nu^2 K_{\mathrm{II}}(\nu)\,\lambda a_D}{1-\nu^2\,\sqrt{2\pi\delta}} \left\{\frac{\delta}{\lambda a_D} + \frac{1}{3}\nu^{1/2}\frac{\sqrt{\lambda\delta a_D}}{\Gamma_s}\right\}, \tag{25}$$

$$Q_{\mathrm{I}}^{(p)} = \frac{\gamma_0^{\mathrm{I}} a_D (a_D\lambda)^{1/2}\nu^{1/2}K_{\mathrm{I}}(\nu)}{\sqrt{1-\nu^2}\cdot 2\sqrt{2\pi}}, \tag{26}$$

$$D_{1\mathrm{I}}^{(p)} = \frac{(\gamma_0^{\mathrm{I}} + \gamma_1^{\mathrm{I}})(a_D\lambda)^{3/2}\nu^{3/2}K_{\mathrm{I}}(\nu)}{\sqrt{1-\nu^2}\cdot 2\sqrt{2\pi}}, \tag{27}$$

$$D_{2\mathrm{I}}^{(p)} = \frac{\gamma_2^{\mathrm{I}}(a_D\lambda)^{3/2}\nu^{3/2}K_{\mathrm{I}}(\nu)}{(1-\nu^2)\,2\sqrt{2\pi}}. \tag{28}$$

Выражения для $Q_{\mathrm{II}}^{(p)}$, $D_{1\mathrm{II}}^{(p)}$, $D_{2\mathrm{II}}^{(p)}$ отличаются от (26)—(28) заменой коэффициентов интенсивности напряжений $K_{\mathrm{I}}(\nu) \to -K_{\mathrm{II}}(\nu)$ и коэффициентов $\gamma_j^{I} \to \gamma_j^{II}$, $j = 0, 1, 2$. Последние являются коэффициентами разложения по степеням K Фурье-компонент взаимодействия носителей заряда с пьезоэлектрическим полем

$$\gamma_{\lambda,\mu\nu}\,\widetilde{(\nabla^\lambda\sigma^{\mu\nu}}(\mathbf{k}) = ((a_D\lambda)^{1/2}\nu^{1/2}K_{\mathrm{I,\,II}}(\nu)/2\sqrt{2\pi}) \times \\ \times \left\{\gamma_0^{\mathrm{I,\,II}} + ik_1\lambda\nu\gamma_1^{\mathrm{I,\,II}} + ik_2\lambda\nu\gamma_2^{\mathrm{I,\,II}} + O(k^2)\right\}, \tag{29}$$

$$\gamma_j^{\mathrm{I,\,II}} = \gamma_{\lambda,\mu\nu}\left\{n^\lambda n^\mu n^\nu A_j^{\mathrm{I,\,II}} + n^\lambda m^\mu m^\nu B_j^{\mathrm{I,\,II}} + m^\lambda n^\mu m^\nu C_j^{\mathrm{I,\,II}} + \right. \\ \left. + \sqrt{1-\nu^2}\,[m^\lambda n^\mu n^\nu D_j^{\mathrm{I,\,II}} + m^\lambda m^\mu m^\nu E_j^{\mathrm{I,\,II}} + n^\lambda n^\mu m^\nu F_j^{\mathrm{I,\,II}}]\right\}. \tag{30}$$

Коэффициенты (30) определяются геометрией распространения трещины: вектор $\mathbf{n}$ направлен по скорости трещины, а $\mathbf{m}$ — перпендикулярно ее плоскости, $|\mathbf{n}| = |\mathbf{m}| = 1$. Условия $\gamma_j \neq 0$ подобно (13), (18) определяют правила отбора. В частности, если $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ направлены по кристаллическим осям кубического пьезоэлектрика, все $\gamma_j = 0$. Входящие в (30) константы A—F приведены в таблице.

Если геометрия распространения трещины удовлетворяет условию $\gamma_j \neq 0$, относительные вклады дилатационного и пьезоэлектрического взаимодействия в Q и D для быстрых ($\nu \sim 1$) трещин связаны соотношением

$$\frac{Q_{\mathrm{I}}^{(p)}}{Q_{\mathrm{I}}^{(d)}} \sim \frac{D_{1\mathrm{I}}^{(p)}}{D_{1\mathrm{I}}^{(d)}} \sim \frac{\delta D_{2\mathrm{II}}^{(p)}}{\lambda a_D D_{2\mathrm{II}}^{(d)}} \sim \lambda^{1/2}\frac{q\gamma\sqrt{\delta a_d}}{\Omega} = \Lambda_1. \tag{31}$$

Константы A_j^l — F_j^l

j	l	A	B	C	D	E	F
0	I	8/21	−2	−8/21	0	0	0
	II	0	0	0	6/7	8/21	8/21
1	I	−8/15	−12/15	8/15	0	0	0
	II	0	0	0	−44/15	−8/15	−8/15
2	I	0	0	0	−16/15	−8/15	−16/15
	II	16/15	−8/15	−16/15	0	0	0

Кроме того, из (21)—(28) следует, что взаимодействие носителей заряда с пьезоэлектрическим полем обусловливает дополнительные вклады в Q и D, обращающиеся в нуль при $\gamma_j = 0$.

Подставляя в (31) численные значения параметров (см. выше), получаем, что $\Lambda_1 \sim 10^3$, т. е. при выполнении условия $\gamma_j \neq 0$ вклад взаимодействия с пьезоэлектрическим полем доминирует.

В заключение отметим, что относительный вклад в обусловленные дилатационным взаимодействием составляющие $Q^{(d)}$ и $D^{(d)}$ (23)—(25) поправок за счет регулярной $\sim \rho^{1/2}$ составляющей напряжения (20) контролируется безразмерным параметром

$$\Lambda_2 = (\lambda \delta a_D)^{1/2} / \Gamma_s.$$

Грубо Λ_2 можно оценить из следующих соображений. Поскольку $\Gamma_s \gg l_{pl}$ — длина пластической зоны $l_{pl} \sim GE/\sigma_T^2$ [9], получаем, что

$$\Lambda_2 \ll (\lambda \delta a_D)^{1/2} \sigma_T^2 / (GE) \sim 1,$$

т. е. вклад сингулярной составляющей напряжения является определяющим.

Проведенное выше в разделах 2—4 рассмотрение различных эффектов, обусловленных возбуждением баротока, не ограничивается случаем кубических пьезоэлектриков с одним типом подвижных дефектов и может при необходимости быть распространено на более общие случаи (одноосные кристаллы или кристаллы, разупорядоченные по Шоттки или по Френкелю). Однако это требует более громоздких вычислений (подобных приведенным в [2,3]) и поэтому здесь не рассматривается.

Список литературы

[1] Алексеев Д. В. // ФТТ. 1991. Т. 33. № 10. С. 2828—2834.
[2] Алексеев Д. В. // ФТТ. 1992. Т. 34. № 2. С. 365—371.
[3] Алексеев Д. В. // ФТТ. 1991. Т. 33. № 10. С. 2828—2835.
[4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
[5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 733 с.
[6] Косевич А. М. Физическая механика реальных кристаллов. Киев: Наукова думка, 1981. 327 с.
[7] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.
[8] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 527 с.
[9] Хеллан К. Введение в механику разрушения. М.: Мир, 1988. 364 с.

Кузбасский политехнический институт
Кемерово

Поступило в Редакцию
24 февраля 1992 г.