

УДК 538.913

© 1992

О ВЛИЯНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ НА ДИФФУЗИОННОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕРАВНОВЕСНЫХ ФОНОНОВ

А. В. Суслов, А. К. Таганцев

Показано, что на режим распространения неравновесных фононов могут оказывать влияние размеры генератора и детектора, при этом режим распространения отличается от одномерной и трехмерной диффузии. Приведена формула, позволяющая рассчитать форму сигнала в такой промежуточной ситуации. Предложена методика учета геометрических факторов при изучении времени прихода максимума фононной неравновесности путем пересчета в случай трехмерной (или одномерной) диффузии, что позволяет сравнивать экспериментальные данные, полученные на различных образцах.

Для изучения свойств неравновесных фононов в твердых телах часто применяется методика тепловых импульсов. При этом в простейшем случае генератором фононов служит металлическая пленка, напыленная на одну из граней образца, а детектором — сверхпроводящий болометр, напыленный на противоположную грань. Многие авторы указывали на необходимость учета соотношения размеров образца, генератора и детектора при интерпретации полученных экспериментальных данных (см., например, [1-3]). Можно выделить два аспекта влияния вышеуказанных факторов на экспериментальные результаты. Первый аспект связан с различием тепловых свойств образца и окружающей среды. Второй аспект чисто геометрический. Настоящая работа посвящена подробному рассмотрению второго аспекта. Мы будем рассматривать только случай диффузионного распространения неравновесных фононов в образце с изотропной теплопроводностью, пренебрегая различием тепловых характеристик образца и окружающей среды.

1. Общее решение

Проанализируем сигнал на детекторе для случая, когда на генератор в нулевой момент подается импульс с полной энергией E и длительностью много меньше времен распространения тепла на характерные пространственные масштабы задачи. Для случая, когда размерами генератора и детектора можно пренебречь по сравнению с расстоянием r между ними, сигнал на болометре является решением трехмерного уравнения диффузии (теплопроводности) и описывается известным выражением (см., например, [4])

$$\Delta T_{3D}(r, t) = \frac{E}{C_v} \frac{1}{(\sqrt{\pi} R(t))^3} \exp\left(\frac{-r^2}{R^2(t)}\right), \quad (1)$$

где C_v — теплоемкость образца на единицу объема. Мы здесь и всюду ниже пользуемся переменной R , определяемой по следующей формуле:

$$R(t) = \sqrt{\frac{4K}{C_v}} t, \quad (2)$$

где t — время, K — теплопроводность образца.

Для учета конечных размеров генератора и болометра выражение (1) необходимо проинтегрировать по их площадям ($S_{\text{ген}}$ и $S_{\text{дет}}$ соответственно). В случае, если расстояние между генератором и детектором много меньше их характерных размеров, и на не слишком больших временах мы фактически приходим к одномерной картине теплопроводности и сигнал на детекторе соответствует решению одномерного уравнения диффузии

$$\Delta T_{1D}(r, t) \sim \frac{A_1}{C_v} \frac{1}{(\sqrt{\pi} R(t))} \exp\left(\frac{-l_z^2}{R^2(t)}\right), \quad (3)$$

где A_1 — поверхностная плотность энергии генератора, l_z — расстояние между плоскостями генератора и детектора. Численный коэффициент в формуле

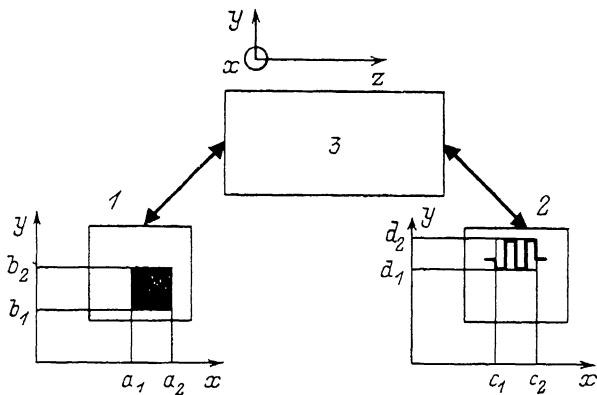


Рис. 1. Схема расположения генератора (1) и детектора (2) фонов на образце (3).

(3) зависит от взаимного расположения генератора и детектора в плоскости XY (рис. 1).

Так как в экспериментах часто реализуется случай, когда генератор имеет прямоугольную форму, а болометр — форму меандра, вписанного в прямоугольник: $S_{\text{ген}} = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1) = ab$ и $S_{\text{дет}} = (c_2 - c_1)(d_2 - d_1) = cd$ (т. е. болометр хорошо усредняет сигнал внутри занимаемого им прямоугольника) (рис. 1), мы выполнили расчет для произвольного соотношения между размерами прямоугольного генератора и детектора и расстояния между ними и получили следующее выражение для сигнала на приемнике:

$$\Delta T(r, t) = \frac{1}{abcd} \frac{E}{C_v} \frac{1}{4\sqrt{\pi}} R(t) \exp\left(\frac{-l^2}{R^2(t)}\right) F_x(t) F_y(t), \quad (4)$$

где l — расстояние между центрами генератора и детектора; $l^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2$; $F_x(t)$, $F_y(t)$ выражаются через специальные функции, их явный вид дан в Приложении. Там же проанализировано их асимптотическое поведение.

В случае точечного генератора и детектора (т. е. трехмерной диффузии):

$$F_x(t) = 2ac\sqrt{\sqrt{\pi}} R^2(t),$$

$$F_y(t) = 2bd\sqrt{\sqrt{\pi}} R^2(t).$$

В предельном случае бесконечно протяженного генератора и детектора (одномерная диффузия)

$$F_x(t) \sim \frac{2c}{R(t)} \exp\left(-\frac{t_x^2}{R(t)^2}\right),$$

$$F_y(t) \sim \frac{2d}{R(t)} \exp\left(-\frac{t_y^2}{R(t)^2}\right).$$

Таким образом, в предельных случаях (4) переходит в (1) или (3).

2. Ф о р м а и м п у л ь с а

Для каждой конкретной экспериментальной ситуации (т. е. зная длину образца, размеры генератора и детектора и параметры материала K , C_p), используя выражения (1)–(4), можно рассчитать форму сигнала болометра (рис. 2). Мы выполнили такие расчеты для алюмоиттриевого граната: Геометрические размеры (табл. 1) и параметры материала выбраны по данным [3, 5].

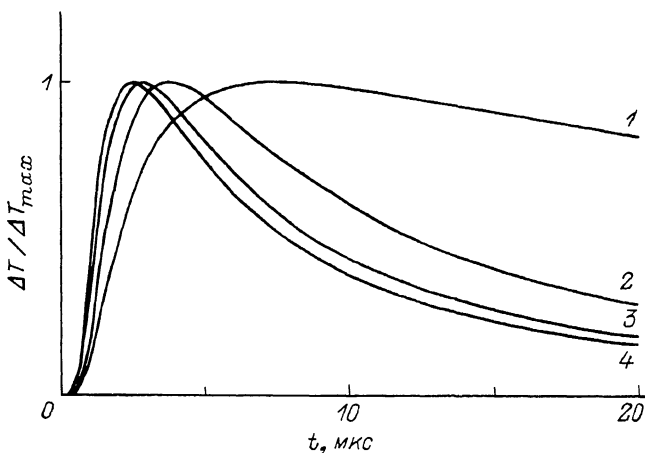


Рис. 2. Зависимость сигнала болометра от геометрии эксперимента для алюмоиттриевого граната.

1 — режим 1D диффузии, расчет по формуле (3); 2, 3 — расчет по формуле (4) в случае $a/L=b/L=2$ (2) и 0.8 (3); 4 — режим 3D диффузии, расчет по формуле (1). Параметры генератора и детектора для кривых 2, 3 приведены в табл. 1.

Видно, что при $a/L=b/L=0.8$ (кривая 3) режим распространения близок к трехмерной диффузии, а при $a/L=b/L=2$ (кривая 2) мы попадаем в переходную область, где сигнал не описывается ни одним из предельных выражений [3].

Следует отметить, что реально функции $F_x(t)$ и $F_y(t)$ зависят от параметра вида $B/R(t)$ (здесь B — линейная комбинация размеров генератора и детектора),

Таблица 1

Кривая	a_1	a_2	b_1	b_2	c_1	c_2	d_1	d_2	L
	см								
2	0	1.0	0	1.0	0.4	0.6	0.4	0.6	0.5
3	0	0.4	0	0.4	0.1	0.3	0.1	0.3	0.5

поэтому большое время наблюдения эквивалентно малым размерам источника и приемника. Так как в реализуемой при проведении экспериментов ситуации размеры генератора и детектора конечны, то на больших временах функции $F_x(t) \sim 1/R^2(t)$ и $F_y(t) \sim 1/R^2(t)$. Таким образом, независимо от соотношения длины образца и размеров генератора и детектора на больших временах задний фронт сигнала спадает по закону $1/R^3(t)$, характерному для трехмерной диффузии.

3. Время прихода максимума неравновесности

Одной из величин, характеризующих сигнал болометра, является время прихода максимума фоновой неравновесности t_{\max} и (или) соответствующая ей величина R_{\max} . Из формул (1)–(3) нетрудно получить известные аналитические выражения для этой величины в случаях с различной геометрией эксперимента

$$R_{\max}^{3D} = r \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad (5)$$

$$R_{\max}^{1D} = r \sqrt{2}, \quad (6)$$

т. е.

$$t_{\max}^{3D} = \frac{C_g}{6K} r^2, \quad t_{\max}^{1D} = \frac{C_g}{2K} r^2.$$

В формулу (4) $R(t)$ входит сложным образом. Поэтому, чтобы найти величину R_{\max} в общем случае, мы численно решали уравнение

$$\frac{\partial \Delta T(r, t)}{\partial R(t)} = 0,$$

т. е.

$$F_x F_y \left(\frac{2L^2}{R^2} + 1 \right) + R \left(\frac{\partial F_x}{\partial R} F_y + F_x \frac{\partial F_y}{\partial R} \right) = 0. \quad (7)$$

Зная размеры генератора и детектора в конкретном эксперименте, их можно подставить в уравнение (7), чтобы получить зависимость R_{\max} от длины образца. На рис. 3 представлены результаты таких расчетов, для случая, когда центры генератора и детектора лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскости XY (рис. 1). Данные для расчетов приведены в табл. 2.

Таблица 2

Кривая	a_1	a_2	b_1	b_2	c_1	c_2	d_1	d_2	L
	см								
2	$\frac{-l_{\text{ген}}}{2}$	$\frac{l_{\text{ген}}}{2}$	$\frac{-l_{\text{ген}}}{2}$	$\frac{l_{\text{ген}}}{2}$	-0.01	0.01	-0.01	0.01	0.5
3	$\frac{-l_{\text{ген}}}{2}$	$\frac{l_{\text{ген}}}{2}$	$\frac{-l_{\text{ген}}}{2}$	$\frac{l_{\text{ген}}}{2}$	-0.5	0.5	-0.5	0.5	0.5
4	$\frac{-l_{\text{ген}}}{2}$	$\frac{l_{\text{ген}}}{2}$	$\frac{-l_{\text{ген}}}{2}$	$\frac{l_{\text{ген}}}{2}$	-1	1	-1	1	0.5
5	$\frac{-l_{\text{ген}}}{2}$	$\frac{l_{\text{ген}}}{2}$	$\frac{-l_{\text{ген}}}{2}$	$\frac{l_{\text{ген}}}{2}$	-2	2	-2	2	0.5

Очевидно, что в случае, когда линейные размеры детектора $l_{\text{дет}}=c=d$ много меньше длины образца L (кривая 2), одномерная диффузия реализуется, если размер генератора $l_{\text{ген}}=a=b$ много больше L , а трехмерная — при $l_{\text{ген}} \ll L$. При сравнимых размерах детектора и образца (кривые 3, 4) и выполнении усло-

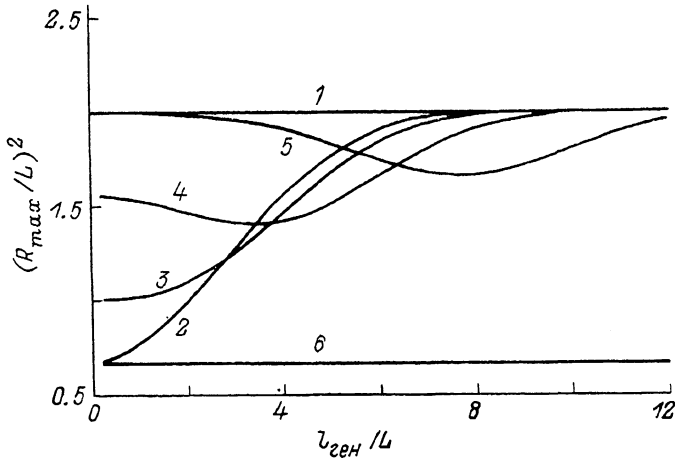
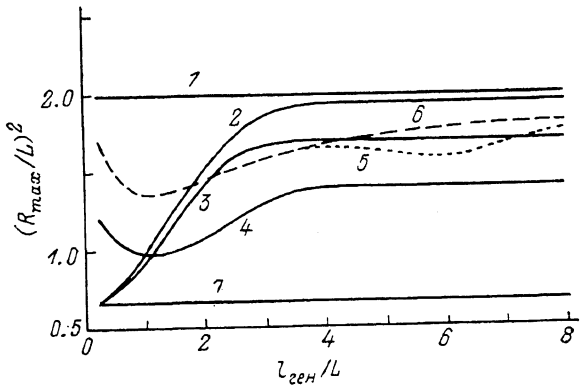


Рис. 3. Зависимость $(R_{\text{max}}/L)^2$ от $l_{\text{ген}}/L$ для несмещенных центров генератора и детектора, где L — длина образца, $l_{\text{ген}}$ — линейный размер генератора, R определяется формулой (2). 1 — бесконечно протяженные генератор и детектор, режим 1D диффузии, расчет по формуле (6); 2–5 — учет конечных размеров генератора и детектора, решение уравнения (7); 6 — точечные генератор и детектор, режим 3D диффузии, расчет по формуле (5). Параметры генератора и детектора для кривых 2–5 приведены в табл. 2.

вия $l_{\text{ген}} \gg L$ неравновесные фононы распространяются в режиме одномерной диффузии, а трехмерную диффузию не удастся осуществить даже при малых величинах $l_{\text{ген}}$. При этом по мере увеличения $l_{\text{дет}}$ величина $\lim R_{\text{max}}$ возрастает до R_{max}^{1D} . Если $l_{\text{дет}} \gg L$, то одномерная диффузия реализуется всюду, кроме

Рис. 4. Зависимость $(R_{\text{max}}/L)^2$ от $l_{\text{ген}}/L$ для смещенных центров генератора и детектора, где L — длина образца, $l_{\text{ген}}$ — линейный размер генератора, R определяется формулой (2).

1 — бесконечно протяженные генератор и детектор, режим 1D диффузии, расчет по формуле (6); 2–6 — учет конечных размеров генератора и детектора, решение уравнения (7); 7 — точечные генератор и детектор, режим 3D диффузии, расчет по формуле (5). Параметры генератора и детектора для кривых 2–6 приведены в табл. 3.



области, в которой $l_{\text{ген}} \approx L$. Именно этому условию соответствуют минимумы на кривых 4, 5. Появление этих минимумов связано с влиянием краевых эффектов.

Следует отметить, что кривые 2, 3 качественно согласуются с экспериментально полученной в [3] зависимостью t_{max}/L^2 от a/L .

На время t_{max} значительное влияние оказывает также взаимное расположение генератора и детектора. Когда их центры смещены относительно оси z , а на прямой, перпендикулярной плоскости XY , лежат вершины углов (табл. 3),

поведение R_{\max} существенно изменяется (рис. 4). Кривые 2, 3 рассчитаны для случая $l_{\text{дет}} \ll L$. При этом видно, что, хотя трехмерная диффузия реализуется

Таблица 3

Кривая	a_1	a_2	b_1	b_2	c_1	c_2	d_1	d_2	L
	см								
2	0	$l_{\text{ген}}$	0	$l_{\text{ген}}$	0	0.02	0	0.02	0.5
3	0	$l_{\text{ген}}$	0	$l_{\text{ген}}$	0	0.08	0	0.08	0.5
4	0	$l_{\text{ген}}$	0	$l_{\text{ген}}$	0	0.8	0	0.8	0.5
5	0	$l_{\text{ген}}$	0	$l_{\text{ген}}$	0	3	0	3	0.5
6	0	$l_{\text{ген}}$	0	$l_{\text{ген}}$	0	5	0	5	0.5

при $l_{\text{ген}} \ll L$, одномерной достичь не удается, так как детектор находится вблизи границы генератора, где краевые эффекты значительны. Причем

$$\lim_{l_{\text{ген}} \rightarrow \infty} R_{\max} - R_{\max}^{1D} \simeq l_{\text{дет}}/L.$$

Аналогичные кривые можно рассчитать для случаев $l_{\text{дет}} \simeq L$ и $l_{\text{дет}} \gg L$. Они становятся немонотонными с минимумами в точках $l_{\text{ген}} = L$ и $l_{\text{ген}} = l_{\text{дет}}$ (кривые 4–6).

4. Заключение

Таким образом, наш расчет показывает, что для сравнения экспериментальных результатов, полученных на различных образцах при использовании протяженных генератора и (или) детектора, необходимо исключить влияние геометрических факторов. Мы рекомендуем для описания сигнала болометра использовать формулу (4), а t_{\max} пересчитывать в t_{\max}^{3D} (или t_{\max}^{1D}) — время прихода максимума фоновой неравновесности в режиме трехмерной (или одномерной) диффузии

$$t_{\max}^{3D} = \left(\frac{R_{\max}^{3D}}{R_{\max}} \right)^2 t_{\max},$$

$$t_{\max}^{1D} = \left(\frac{R_{\max}^{1D}}{R_{\max}} \right)^2 t_{\max},$$

где R_{\max}^{3D} , R_{\max}^{1D} определяются по формулам (5), (6), а R_{\max} находим, решая уравнение (7). После выполнения этой процедуры мы получаем время прихода максимума фоновой неравновесности, соответствующее случаю, когда эксперимент ставится строго в трехмерной (или одномерной) геометрии.

Отметим, что проведенный в настоящей работе анализ полностью описывает влияние геометрических факторов на сигнал приемника в случае, когда можно пренебречь эффектами, связанными с различием тепловых свойств образца и окружающей среды.

А. В. Сулов благодарен С. Н. Иванову, Е. Н. Хазанову, А. В. Таранову за проявленный интерес к работе и обсуждение результатов.

Для получения сигнала болометра в нашем случае необходимо вычислить следующий интеграл:

$$\int_{a_1}^{a_2} dx \int_{c_1}^{c_2} dx_0 \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{d_1}^{d_2} dy_0 \exp\left(\frac{-r^2}{R^2(t)}\right) = \exp\left(\frac{-l_x^2}{R^2(t)}\right) I(a_1, a_2, c_1, c_2) I(b_1, b_2, d_1, d_2),$$

где введены обозначения

$$I(a_1, a_2, c_1, c_2) = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{c_1}^{c_2} dx_0 \exp\left(\frac{-(x-x_0)^2}{R^2(t)}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} R^2(t) \exp\left(\frac{-l_x^2}{R^2(t)}\right) F_x(t),$$

$$I(b_1, b_2, d_1, d_2) = \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{d_1}^{d_2} dy_0 \exp\left(\frac{-(y-y_0)^2}{R^2(t)}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} R^2(t) \exp\left(\frac{-l_y^2}{R^2(t)}\right) F_y(t),$$

$l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = l^2$ — расстояние между центрами генератора и детектора,

$$F_x(t) = \left(C_{12} \operatorname{erf}(C_{12}) + \frac{\exp(-C_{12}^2)}{\sqrt{\pi}} - C_{22} \operatorname{erf}(C_{22}) - \frac{\exp(-C_{22}^2)}{\sqrt{\pi}} + \right. \\ \left. + C_{21} \operatorname{erf}(C_{21}) + \frac{\exp(-C_{21}^2)}{\sqrt{\pi}} - C_{11} \operatorname{erf}(C_{11}) - \frac{\exp(-C_{11}^2)}{\sqrt{\pi}} \right) \exp\left(\frac{l_x^2}{R^2(t)}\right), \\ F_y(t) = \left(D_{12} \operatorname{erf}(D_{12}) + \frac{\exp(-D_{12}^2)}{\sqrt{\pi}} - D_{22} \operatorname{erf}(D_{22}) - \frac{\exp(-D_{22}^2)}{\sqrt{\pi}} + \right. \\ \left. + D_{21} \operatorname{erf}(D_{21}) + \frac{\exp(-D_{21}^2)}{\sqrt{\pi}} - D_{11} \operatorname{erf}(D_{11}) - \frac{\exp(-D_{11}^2)}{\sqrt{\pi}} \right) \exp\left(\frac{l_y^2}{R^2(t)}\right).$$

$$C_{11} = \frac{c_1 - a_1}{R(t)}, \quad C_{21} = \frac{c_2 - a_1}{R(t)}, \quad C_{12} = \frac{c_1 - a_2}{R(t)}, \quad C_{22} = \frac{c_2 - a_2}{R(t)},$$

$$D_{11} = \frac{d_1 - b_1}{R(t)}, \quad D_{21} = \frac{d_2 - b_1}{R(t)}, \quad D_{12} = \frac{d_1 - b_2}{R(t)}, \quad D_{22} = \frac{d_2 - b_2}{R(t)}.$$

В случае малых размеров источника и приемника после вынесения из-под знака интеграла множителя вида $\exp(-l_i^2/R^2(t))$ (где i — это x или y) экспоненту под знаком интеграла можно заменить на единицу. Поэтому получим

$$I_x = ac \exp\left(\frac{-l_x^2}{R^2(t)}\right),$$

$$I_y = bd \exp\left(\frac{-l_y^2}{R^2(t)}\right),$$

а значит,

$$F_x(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{ac}{R^2(t)},$$

$$F_y(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{bd}{R^2(t)}.$$

В случае больших генератора и детектора основной вклад в I дает полоса шириной порядка $R(t)$ и длиной, определяемой размерами генератора и детектора и их взаимным расположением. Поэтому I оказывается пропорциональным $R(t)$, а значит,

$$F_x(t) \sim \frac{2c}{R(t)} \exp\left(\frac{l_x^2}{R(t)^2}\right), \quad F_y(t) \sim \frac{2d}{R(t)} \exp\left(\frac{l_y^2}{R(t)^2}\right).$$

Дифференцирование функций $F_x(t)$ и $F_y(t)$ по $R(t)$ дает следующий результат:

$$\frac{\partial F_x(t)}{\partial R(t)} = \frac{-C_{12} \operatorname{erf}(C_{12})}{R(t)} + \frac{C_{22} \operatorname{erf}(C_{22})}{R(t)} + \frac{-C_{21} \operatorname{erf}(C_{21})}{R(t)} + \frac{C_{11} \operatorname{erf}(C_{11})}{R(t)},$$

$$\frac{\partial F_y(t)}{\partial R(t)} = \frac{-D_{12} \operatorname{erf}(D_{12})}{R(t)} + \frac{D_{22} \operatorname{erf}(D_{22})}{R(t)} + \frac{-D_{21} \operatorname{erf}(D_{21})}{R(t)} + \frac{D_{11} \operatorname{erf}(D_{11})}{R(t)}.$$

Именно эти выражения использовались при решении уравнения (7).

Список литературы

- [1] Гутфельд Р. // Физическая акустика. Т. V / Под ред. У. Мэзона. М.: Мир, 1973. С. 267—329.
- [2] Казаковцев Д. В., Левинсон И. Б. // Письма в ЖЭТФ. 1978. Т. 27. № 3. С. 194—196.
- [3] Иванов С. Н., Хазанов Е. Н., Таранов А. В. // ФТТ. 1987. Т. 29. № 3. С. 672—678.
- [4] Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М.: ИЛ, 1958. 923 с.
- [5] Slack G. A., Oliver D. W. // Phys. Rev. B. 1971. V. 4. N 2. P. 592—609.

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе РАН
Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию
1 августа 1991 г.