УДК 539.143.43

СОЛИТОНЫ ЯДЕРНОЙ НАМАГНИЧЕННОСТИ В СВЕРХНИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ МАГНИТОУПОРЯДОЧЕННОЙ ФАЗЕ

Л. Л. Буишвили, Н. П. Гиоргадзе, Н. Г. Мчедлишвили

Исследованы слабонелинейные модулированные возмущения намагниченности в ядерной спин-системе, находящейся в сверхнизкотемпературной магнитоупорядоченной фазе в ферромагнетике, намагниченном в направлении трудной оси. В условиях точной компенсации статической части сверхтонкого магнитного поля внешним найден коэффициент перед нелинейным членом нелинейного уравнения Шредингера, описывающего слабонелинейные возмущения в этой системе. Определена область модуляционной неустойчивости плосковолновых возмущений и вычислены параметры солитонов ядерной намагниченности (сдвиг частоты и ширина профиля), могущих существовать в этой области.

В работе [1] были исследованы слабонелинейные модулированные возмущения намагниченности в ядерной спин-системе, находящейся в сверхнизкотемпературной магнитоупорядоченной фазе в ферромагнетике, намагниченном в направлении легкой оси. Ввиду отсутствия в этих условиях щели в спектре ядерных спиновых волн (ЯСВ) [2] эти возмущения описываются известным уравнением Кортевега и де Вриза [3]. При намагничении ферромагнетика в направлении трудной оси в спектре ЯСВ появляется щель [4, 5], в результате чего ядерная спин-система превращается в сильнодиспергирующую нелинейную среду [6]. Поэтому следует ожидать, что слабонелинейные модулированные возмущения в ней будут описываться нелинейным уравнением Шредингера [3]. Задача же сводится к определению конкретного вида коэффициента Δ перед нелинейным членом этого уравнения.

Решение этой задачи при произвольных значениях параметра компенсации сопряжено с громоздкими вычислениями и приводит к труднообозримым результатам. Поэтому в настоящей заметке мы ограничились рассмотрением наиболее интересного случая точной компенсации статического сверхтонкого поля внешним, когда щель в спектре ЯСВ достигает наибольшей величины [5]. Применительно к этому случаю вычислен коэффициент Δ, определена область модуляционной неустойчивости нелинейных плоских волн ядерной намагниченности и получены выражения для параметров солитонов огибающей, могущих существовать в этой области.

1. Мы будем исходить из макроскопических уравнений движения для ядерной намагниченности $\mathbf{m}$

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = \gamma\,[\mathbf{m}\mathbf{H}^{(ef)}]. \tag{1}$$

Фигурирующее в этих уравнениях эффективное магнитное поле $\mathbf{H}^{(ef)}$ в системе координат с осью z, ориентированной вдоль подмагничивающего поля $\mathbf{H}_0$, и осью x, параллельной оси анизотрапии (в условиях точной компенсации), может быть представлено в виде [1]

$$H_z^{(ef)}=0,$$

$$H_\alpha^{(ef)}=\int d\mathbf{r}'\chi_\alpha(\mathbf{r}-\mathbf{r}')m_\alpha(\mathbf{r}'),\quad \alpha=x,\ y, \tag{2}$$

где

$$\chi_\alpha(\mathbf{r})=\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\chi_\alpha(\mathbf{k})\,e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

$$\chi_x(\mathbf{k})=\frac{gM_0A'^2}{\omega_{sk}(1-2\omega_A/\omega_{sk})},\qquad \chi_y(\mathbf{k})=\frac{gM_0A'^2}{\omega_{sk}}, \tag{3}$$

$(-g)$ — гиромагнитное отношение для электронов, M_0 — равновесная электронная намагниченность, A' — константа сверхтонкого взаимодействия, $2\omega_A$ — частота анизотропии, ω_{sk} — частота магнона, V — объем образца.

Представим далее ядерную намагниченность в виде суммы статической и динамической частей, $\mathbf{m}=\mathbf{m}_0+\delta\mathbf{m}$. Статическая намагниченность, отвечающая сверхнизкотемпературной магнитоупорядоченной фазе, дается, как известно [2, 4], выражениями $m_{0x}=m_0$, $m_{0y}=0$, $m_{0z}=0$. Что касается динамической части, то, имея в виду рассмотрение слабонелинейных модулированных волн, распространяющихся вдоль оси z, представим ее (следуя методу, развитому в работе [6]) в виде

$$\delta\mathbf{m}(z,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=-\infty}\epsilon^n\mathbf{m}_l^{(n)}(\zeta,\ \tau)\,e^{il(kz-\omega t)}, \tag{4}$$

где $\zeta=\epsilon\,(z-V_gt)$ — медленная координата, $\tau=\epsilon^2t$ — медленное время, ϵ — малый параметр (малость которого связана с малостью амплитуды возмущения).

Принятое для $\mathbf{m}$ представление следует теперь подставить в выражение (2), предполагая при этом, что масштаб модуляции рассматриваемых возмущений намного превосходит радиус сул-накамуровского взаимодействия R_{SN}, на основании чего, используя в подынтегральных выражениях разложение

$$m_{\alpha l}^{(n)}(\xi'\tau)\simeq m_{\alpha l}^{(n)}(\xi,\ \tau)+(\xi'-\xi)\frac{\partial m_{\alpha l}^{(n)}}{\partial\xi}+\frac{1}{2}(\xi'-\xi)^2\frac{\partial^2m_{\alpha l}^{(n)}}{\partial\xi^2},$$

после некоторых вычислений для поперечных компонент эффективного магнитного поля будем иметь

$$H_\alpha^{(ef)}=m_{0\alpha}\chi_\alpha^0+\sum_n\sum_l\epsilon^ne^{il(kz-\omega t)}\left\{\chi_\alpha(lk)m_{\alpha l}^{(n)}-i\epsilon\chi_\alpha'(kl)\frac{\partial m_{\alpha l}^{(n)}}{\partial\xi}-\frac{1}{2}\epsilon^2\chi_\alpha''(lk)\frac{\partial^2m_{\alpha l}^{(n)}}{\partial\xi^2}\right\}, \tag{5}$$

где $\chi_\alpha^0=\chi_\alpha(0)$.

Подставляя первое из выражений (2), а также выражения (4) и (5) в расписанное в компонентах уравнение движения (1) и учитывая, что

$$\frac{\partial\mathbf{m}_l^{(n)}(\xi,\ \tau)}{\partial\tau}=\left(\epsilon^2\frac{\partial}{\partial\tau}-\epsilon V\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\mathbf{m}_l^{(n)}(\xi,\ \tau),$$

после некоторых вычислений получим последовательность соотношений, вытекающих из приравнивания нулю коэффициентов при одинаковых степенях ϵ и фазовых множителях $\exp\{il\,(kz-\omega t)\}$.

---

[1] Это выражение (с учетом определения эффективного магнитного поля [7]) вытекает из гамильтониана сул-накамуровского взаимодействия, вычисленного в работе [5], в результате перехода к континуальному описанию. При этом фигурирующая в работе [5] константа сверхтонкого взаимодействия A оказывается увязанной с A' соотношением $A'=Aa^3/\gamma g\hbar$, где a — линейный размер элементарной ячейки.

В частности, в первом порядке по ϵ (в предположении, что единственно отличной от нуля амплитудой линейного приближения является $\mathbf{m}_{\pm 1}^{(2)}(\xi, \tau)$) приходим к закону дисперсии ЯСВ [5]

$$\omega_n(k) = \gamma m_0 \chi_x^0 \left(1 - \frac{\chi_y}{\chi_y^0}\right)^{1/2} \tag{6}$$

и связи между амплитудами линейного приближения

$$m_{x1}^{(1)} = 0,$$
$$m_{z1}^{(1)} = -i\left(1 - \frac{\chi_y}{\chi_x^0}\right)^{1/2} m_1^{(1)} \tag{7}$$

($m_{y1}^{(1)}$ произвольно).

Во втором порядке по ϵ находим набор амплитуд второго приближения [2]

$$m_{x0}^{(2)} = -\frac{|m_{y1}^{(1)}|^2}{m_0}\left(2 - \frac{\chi_y}{\chi_x^0}\right), \quad m_{y0}^{(2)} = 0, \quad m_{z0}^{(2)} = 0,$$

$$m_{x2}^{(2)} = -\frac{(m_{y1}^{(1)})^2}{2m_0}\frac{\chi_y}{\chi_x^0}, \quad m_{y2}^{(2)} = 0, \quad m_{z2}^{(2)} = 0,$$

$$m_{x1}^{(2)} = 0, \quad m_{z1}^{(2)} = -i\frac{\omega_n(k)}{\gamma m_0 \chi_x^0} m_{y1}^{(2)} - \frac{V_g}{\gamma m_0 \chi_x^0}\frac{\partial m_{y1}^{(1)}}{\partial \zeta}$$

($m_{y1}^{(2)}$ произвольно), а также устанавливаем тождество

$$V_g \equiv \frac{d\omega_n}{dk} = -\frac{\gamma m_0}{2}\frac{\chi_y'}{(1 - \chi_y/\chi_x^0)^{1/2}}.$$

Наконец, в третьем порядке по ϵ приходим к нелинейному уравнению Шредингера для [3] $m_{y1}^{(1)}(\zeta, \tau)$

$$2i\frac{\partial m_{y1}^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \omega_n}{dk^2}\frac{\partial^2 m_{y1}^{(1)}}{\partial \xi^2} + \Delta |m_{y1}^{(1)}|^2 m_{y1}^{(1)} = 0, \tag{8}$$

где

$$\frac{d^2\omega_n}{dk^2} = -\frac{(\gamma m_0/2)}{(1 - \chi_y/\chi_x^0)^{3/2}}\left\{\chi_y''\left(1 - \frac{\chi_y}{\chi_x^0}\right) + \frac{\chi_y'^2}{\chi_x^0}\right\}, \tag{9}$$

$$\Delta = (\gamma^2/2\omega_n)(\chi_x^0)^2\left\{4\left(1 - \frac{\chi_y}{\chi_x^0}\right)\left(2 - \frac{\chi_y}{\chi_x^0}\right) - \left(\frac{\chi_y}{\chi_x^0}\right)^2\left(1 - \frac{\chi_y}{\chi_x^0}\right)\right\}. \tag{10}$$

В принятом нами континуальном приближении ($(ka)^2 \ll 1$), в котором $\omega_{sk} = \omega_{s0} + \omega_E (ak)^2$ ($\omega_{s0} = gH_0$, ω_E — обменная частота), выражения (9) и (10) приводятся к виду

$$\frac{d^2\omega_n}{dk^2} = \omega_E a^2 \frac{(\gamma m_0)^4 (\chi_x^0)^3 \chi_y}{\omega_{nk}^3 \omega_{sk}^3}\left[2\omega_A \omega_{s0} - 4\omega_A \omega_E (ak)^2 - 3\omega_E^2 (ak)^4\right], \tag{9a}$$

$$\Delta = \frac{2(\gamma^2/\omega_{nk})(\chi_x^0)^2}{\omega_{sk}^2(\omega_s(2k) - 2\omega_A)}\left[2\omega_A\left(\omega_{s0}^2 - 4\omega_A^2\right) + 16\omega_A\omega_{s0}\omega_E(ak)^2 + 2\omega_E^2(ak)^4\left(3\omega_{s0} + 10\omega_A\right) + \right.$$
$$\left. + 8\omega_A^3 (ak)^6\right]. \tag{10a}$$

---

[2] При вычислении $m_{x0}^{(2)}$ использовано условие постоянства модуля намагниченности $\mathbf{m}^2 = m_0^2$. При вычислении $m_{y2}^{(2)}$ и $m_{z2}^{(2)}$ учтено, что $\omega_n(2k) \neq 2\omega_n(k)$.

[3] Заметим, что члены, содержащие произвольную амплитуду $m_{y1}^{(2)}$, в процессе вычислений выпадают, т. е. амплитуда $m_{y1}^{(2)}$ не оказывает влияния на пространственно-временную эволюцию $m_1^{(1)}$.

2. Перейдем теперь к анализу полученных результатов. Нетрудно видеть, что $\Delta > 0$. Поэтому условие Лайтхилла модуляционной неустойчивости нелинейных плоских волн постоянной амплитуды [3] сводится к неравенству $d^2\omega_{nk}/dk^2 > 0$, из которого со своей стороны следует

$$3\omega_E^2(ak)^4 + 4\omega_A\omega_E(ak)^2 - 2\omega_A\omega_{s0} < 0. \tag{11}$$

Отсюда заключаем, что модуляционно-неустойчивыми являются плоские волны с $k < k_{\text{гр}}$, где

$$k_{\text{гр}} = \left(\frac{2\omega_A}{3\omega_E}\right)^{1/2}\left[\left(1 + \frac{3\omega_{s0}}{2\omega_A}\right)^{1/2} - 1\right]^{1/2}(1/a) \tag{12}$$

определяет коротковолновую границу области модуляционной неустойчивости. Оценки показывают, что $(k_{\text{гр}}a)^2 \ll 1$ и, следовательно, макроскопическое описание остаётся справедливым во всей области модуляционной неустойчивости.

Солитоны огибающей, могущие существовать в области модуляционной неустойчивости нелинейных плоских волн постоянной амплитуды, имеют, как хорошо известно [3], вид

$$m_{y1}^{(1)} = b(\zeta)\,e^{i\psi(\tau)}, \tag{13}$$

где

$$b(\zeta) = b_{\max}\,\mathrm{sech}\,\frac{3(\zeta - \zeta_0)}{\Lambda},$$

$$\psi(\tau) = \frac{1}{4}\,\Delta b_{\max}^2\tau, \tag{14}$$

$b_{\max}$ — максимальное значение $|m_{y1}^{(1)}|$ в солитоне, достигаемое в точке $\zeta = \zeta_0$, а

$$\Lambda_n(k) = (3/b_{\max})\left[\frac{d^2\omega_{nk}/dk^2}{(\Delta/2)}\right]^{1/2} \tag{15}$$

— параметр, характеризующий ширину солитона.

Явный вид параметра Λ_n может быть получен с использованием выражений (9а) и (10а). Однако ввиду некоторой громоздкости общего результата мы остановимся на рассмотрении наиболее реального случая, когда $\omega_{s0} \sim \omega_{s0} - 2\omega_A > 2\omega_A$, ограничиваясь волновыми числами

$$(ak)^2 \ll 2\omega_A/\omega_E. \tag{16}$$

В этом случае сдвиг частоты солитона

$$\delta\omega_n(k) \approx -\frac{1}{2}\left(\frac{b_{\max}}{m_0}\right)^2\left(1 + \frac{2\omega_A}{\omega_{s0}}\right)\chi_x^0\left(\frac{2\omega_A}{\omega_{s0}}\right)^{1/2}, \tag{17}$$

причем (как и должно иметь место) $|\delta\omega_n/\omega_n| \ll 1$. Ширина же солитона определяется выражением

$$\Lambda_n(k) \approx 3a\left(\frac{m_0}{b_{\max}}\right)\left[\frac{\omega_E(\omega_{s0} - 2\omega_A)}{2\omega_A(\omega_{s0} + 2\omega_A)}\right]^{1/2}. \tag{18}$$

Из полученного выражения с очевидностью следует, что (в соответствии с предполагаемой иерархией пространственных масштабов)

$$\Lambda_n(k) \gg R_{SN} = \left(\frac{\omega_E}{\omega_{s0}}\right)^{1/2} a \gg a.$$

С другой стороны, решение (13) остается справедливым до тех пор, пока $\Lambda_n(k) \gg \lambda = 2\pi/k$, т. е. пока $(ak) \gg (2\omega_A/\omega_E)^{1/2}(b_{max}/m_0)$. Нетрудно видеть, что это ограничение совместимо с условием (16).

Наконец, заметим, что, поскольку обычно $(\omega_E/2\omega_A) \sim 10^2 \div 10^3$, $(\Lambda_n/a) \sim 10 \div 10^2(m_0/b_{max})$. Поэтому даже при значениях $b_{max} \sim 10^{-1}m_0$, являющихся предельно допустимыми, масштаб модуляции $\Lambda_n \sim (10^2 \div 10^3)\,a$.

Список литературы

[1] Буишвили Л. Л., Гиоргадзе Н. П. // ФТТ. 1990. Т. 32. № 7. С. 2056—2060.
[2] Сафонов В. Л. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. № 11. С. 263—270.
[3] Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., 1973. С. 175.
[4] Цифринович В. И., Игнатченко В. А. // ЖЭТФ. 1986. Т. 91. № 9. С. 968—974.
[5] Буишвили Л. Л., Гиоргадзе Н. П., Мчедлишвили Н. Г. // ФТТ. 1991. Т. 33. № 8. С. 2326—2334.
[6] Taniuti T. // Progr. Theor. Phys. (Suppl.). 1974. N 55. P. 1—35.

Тбилисский государственный университет
им. Ив. Джавахишвили

Поступило в Редакцию
3 июля 1991 г.