УДК 530.145

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕОРИЯ ОДНОКОНТАКТНОГО КВАНТОВОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА. КОРРЕЛИРОВАННЫЕ И СЖАТЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ

С. Т. Павлов, А. В. Прохоров

Принятие с начала 1990 г. квантовых стандартов Вольта (на эффекте Джозефсона) и Ома (на эффекте фон Клитцинга) поставило задачу о физических измерениях с близкой к квантовому пределу чувствительностью. Показано, что реализация коррелированных (ККС) и сжатых (СКС) когерентных состояний в сверхпроводниковом одноконтактном квантовом интерферометре с помощью неадиабатического внешнего воздействия позволит подавить квантовые флуктуации магнитного потока или напряжения. По оценкам, максимальный эффект подавления квантовых флуктуаций магнитного потока или напряжения составляет десятки процентов. Предложена нестационарная теория безгистерезисного режима сверхпроводникового одноконтактного квантового интерферометра, взаимодействующего с классическим колебательным контуром при низких температурах ($k_Б T < \hbar\Omega_0$, $\Omega_0=(LC)^{-1/2}$, L — индуктивность кольца сверхпроводникового квантового интерферометра, C — емкость джозефсоновского контакта интерферометра).

Данная работа посвящена развитию теории новых типов состояний квантовых систем: коррелированных (ККС) и сжатых (СКС) когерентных состояний [1]. Исследована возможность их реализации в сверхпроводниковом одноконтактном квантовом интерферометре с учетом недиабатического внешнего воздействия. Реализация ККС и СКС в квантовом интерферометре позволит подавить квантовые флуктуации магнитного потока или напряжения, что способствовало бы решению задачи физических измерений с близкой к квантовому пределу чувствительностью.

В работах [2-4] проводилось рассмотрение сверхпроводникового квантового интерферометра при низких температурах в стационарном случае (когда внешний магнитный поток Φ_{ext} считается не зависящим от времени). Однако для исследования возможных новых эффектов и правильной интерпретации экспериментальных данных значительный интерес представляет построение нестационарной теории одноконтактного квантового интерферометра.

В данной работе предлагается нестационарная теория одноконтактного квантового интерферометра в безгистерезисном режиме при низких температурах ($k_Б T \leqslant \hbar\Omega_0$, где $\Omega_0=(LC)^{-1/2}$, L — индуктивность кольца одноконтактного квантового интерферометра, C — емкость слабой связи интерферометра), взаимодействующего с классической системой.

1. Теория

Запишем полную энергию интерферометра в виде [5, 6]

$$E = U(\Phi) + Q^2/2C,$$
$$U(\Phi) = E_c(1+\cos(2\pi\Phi/\Phi_0)) + (\Phi-\Phi_{ext})^2/2L, \tag{1}$$

где Φ — магнитный поток в кольце интерферометра; Q — заряд на емкости слабой связи C; $E_c = (\Phi_0 I_c / 2\pi)$ — характерная энергия джозефсоновского контакта; Φ_{ext} — внешний магнитный поток. (Выражение для энергии (1) справедливо в пределе большого затухания $\beta = (R/L)\,\Omega_0^{-2} \gg 1$).

Стационарные состояния системы ϕ_c определяются из уравнения [6]

$$\phi_c + l \sin \phi_c = \phi_{ext}, \tag{2}$$

где

$$\phi_c = 2\pi\Phi_c/\Phi_0, \quad \phi_{ext} = 2\pi\Phi_{ext}/\Phi_0,$$
$$l = 2\pi L I_c/\Phi_0.$$

В случае $l < 1$ система имеет один минимум ϕ_c (положение которого определяется уравнением (2) и зависит от внешнего магнитного потока). Величины $Q = (C/c)\,(d\Phi/dt)$ и Φ являются канонически сопряженными переменными. Переход к квантовому рассмотрению осуществляется заменой канонически сопряженных переменных операторами. Тогда гамильтониан системы $\mathscr{H}$

$$\hat{\mathscr{H}} = U(\hat{\Phi}) + \hat{Q}^2/2C. \tag{3}$$

Коммутационные соотношения между $\hat{Q}$ и $\hat{\Phi}$ [2, 4] имеют следующий вид:

$$[\hat{\Phi},\ \hat{Q}] = i\hbar c.$$

Рассмотрим малые колебания системы вблизи Φ_c, где $\hat{\tilde{\Phi}} = \hat{\Phi} - \Phi_c$ — оператор малого отклонения. При этом разложим потенциальную энергию $U(\hat{\tilde{\Phi}})$ в ряд и ограничимся гармоническим приближением

$$U(\hat{\Phi}) = U(\Phi_c) + \hat{\tilde{\Phi}}^2/2\mathscr{L},$$
$$\mathscr{L} = L(1 + l\cos\phi_c)^{-1}. \tag{4}$$

Далее мы везде будем опускать тильду над оператором $\hat{\tilde{\Phi}}$.

Рассмотрим теперь нестационарный случай, т. е. предположим, что Φ_{ext} произвольным образом зависит от времени. Следовательно, ϕ_c также есть произвольная функция времени в силу (2). (В случае, когда мы рассматриваем взаимодействие интерферометра с колебательным контуром, $\Phi_{ext}(t)$ представляет собой переменный магнитный поток $M i_{rf} \cos(\omega_{rf} t)$, создаваемый катушкой связи через кольцо интерферометра, где M — взаимоиндукция колебательного контура и интерферометра. Классичность колебательного контура проявляется в том, что мы можем не учитывать квантовых флуктуаций Φ_{ext}. В общем случае $\Phi_{ext}(t)$ представляет собой суммарный поток, создаваемый катушкой связи, модуляционной катушкой и внешним сигналом). При этом частота системы Ω также зависит от времени

$$\Omega^2(t) = \Omega_0^2[1 + l\cos(\phi_c(t))]. \tag{5}$$

Тогда гамильтониан (3) можно представить в виде

$$\mathscr{H}(t) = U_0(t) + Q^2/2C + \Phi^2/2\mathscr{L}(t), \tag{6}$$

а волновая функция системы Ψ будет удовлетворять нестационарному уравнению Шредингера с гамильтонианом (6).

Преобразуем Ψ следующим образом:

$$\Psi = \tilde{\Psi} \exp\left[-(i/\hbar)\int^{t} U_0(\tau)\,d\tau\right]. \tag{7}$$

Тогда получим для Ψ уравнение

$$i\hbar\dot{\tilde{\Psi}} = \hat{\mathscr{H}}(t)\,\tilde{\Psi},$$
$$\hat{\mathscr{H}}(t) = \hat{Q}^2/2C + \hat{\Phi}^2/2\mathscr{L}(t). \tag{8}$$

Введем характерные частоты системы: Ω_0 — частота системы в начальном (стационарном) состоянии, $\Omega(t)=(\lambda(t)(LC))^{-1/2}$, где $\lambda(t)=(1+l\cos(\phi_c(t))$. Оператор $\hat{Q}$ в (8) является канонически сопряженным импульсом для $\hat{\Phi}$, а роль эффективной «массы» играет C. Тогда гамильтониан (8) приобретает вид

$$\hat{\mathscr{H}}(t) = \hat{P}_{\phi}^2/2\mu + \hat{\Phi}^2/2\mathscr{L}(t),$$
$$\hat{Q} = \hat{P}_{\phi} = -i\hbar\,\partial/\partial\Phi, \quad \mu = C. \tag{9}$$

Перейдем к безразмерным величинам, введя характерную «длину»

$$l_{\phi} = (\hbar/\mu\Omega_0)^{1/2}. \tag{10}$$

Тогда безразмерные координата $f=\Phi/l_{\phi}$, импульс $p_f=(l_{\phi}/\hbar)\,P_{\phi}$, частота $\omega(t)=\Omega(t)/\Omega_0$, время $\tau=t\Omega_0$, гамильтониан

$$\hat{\mathscr{H}}(t) = \hat{p}_f^2/2 + \omega^2(\tau)\,\hat{f}^2/2.$$

Для решения задачи используем метод явно зависящих от времени квантовых интегралов движения [7, 8]. Квантовые интегралы движения ищем в виде

$$\hat{\mathscr{U}}(t) = a(\tau)\,\hat{p}_f + b(\tau)\,\hat{f}. \tag{11}$$

Используя определение квантового инварианта и (11), получаем явный вид $\hat{\mathscr{U}}(t)$

$$\hat{\mathscr{U}}(t) = \left(i/\sqrt{2}\right)[\varepsilon(\tau)\,\hat{p}_f - \dot{\varepsilon}(\tau)\,\hat{f}], \tag{12}$$

где функция $\varepsilon(\tau)=a(\tau)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\ddot{\varepsilon}(\tau) + \omega^2(\tau)\,\varepsilon(\tau) = 0. \tag{13}$$

Выполнение Бозе-коммутационных соотношений для операторов $\hat{\mathscr{U}}(t)$ и $\hat{\mathscr{U}}^+(t)$ обеспечивается условием $\dot{\varepsilon}^*(\tau)\,\varepsilon(\tau)-\dot{\varepsilon}(\tau)\,\varepsilon^*(\tau)=2i$.

Операторы $\hat{\mathscr{U}}(\tau)$ и $\hat{\mathscr{U}}^+(\tau)$ в момент начала нестационарного воздействия $\tau=\tau_0$ должны совпадать с операторами $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$, определенными следующим образом:

$$\hat{a} = \left(1/\sqrt{2}\right)(\partial/\partial f + f), \quad \hat{a}^+ = \left(1/\sqrt{2}\right)(-\partial/\partial f + f).$$

Это дает начальные условия для $\varepsilon(\tau)$: $\varepsilon(\tau_0)=1$, $\dot{\varepsilon}(\tau_0)=i$.

Уравнение (13) для $\varepsilon(t)$ с частотой (5) является уравнением Хилла [9]. Решая его, получим следующее приближенное устойчивое решение:

$$\varepsilon(t) = A\varepsilon_1(t) + B\varepsilon_2(t),$$
$$\begin{matrix}\varepsilon_1(t)\\ \varepsilon_2(t)\end{matrix} + \{1 + lg(t)\}^{-1/4} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \left\{\Omega_0\int_0^t (1+l)\,g(\tilde{t})^{1/2}\,d\tilde{t} + (l/8\Omega_0)\int_0^t \{g''(\tilde{t}) + (5l/4)\times\right.$$
$$\left.\times\,[g'(\tilde{t})/(1+l)\,g(\tilde{t})]\right\}(1+(lg(\tilde{t}))^{-3/2}\,d\tilde{t}, \tag{14}$$

где $g(t)=\cos(\phi_c(t))$, $\Omega_0^2=LC)^{-1}$. Постоянные A и B находятся из начальных условий для функции $\varepsilon(t)$. (Мы приводим явный вид A, B в Приложении и не будем использовать явный вид $\varepsilon(t)$ (14) в дальнейших выкладках ввиду их громоздкости).

Зная функцию $\varepsilon(t)$, мы можем найти временну́ю зависимость $\hat{\Phi}(t)$ и $\hat{Q}(t)$, вводя, согласно общей схеме [7, 8], два оператора $\hat{f}^0(t)$ и $\hat{p}_f^0(t)$

$$\hat{f}^{(0)}(t) = (1/\sqrt{2})(\hat{\mathcal{U}}(t) + \hat{\mathcal{U}}^+(t)),$$
$$\hat{p}_f^{(0)}(t) = (1/\sqrt{2})(\hat{\mathcal{U}}^+(t) - \hat{\mathcal{U}}(t)). \tag{15}$$

Используя (15) и выражения для $\hat{\mathcal{U}}(t)$ и $\hat{\mathcal{U}}^+(t)$, получим (возвращаясь к размерным величинам)

$$\hat{\Phi}(t) = ((\varepsilon + \varepsilon^*)/2)\,\hat{\Phi}^0(t) - ((\varepsilon - \varepsilon^*)/2)\,(l_\phi^2/\hbar)\,\hat{Q}^0(t),$$
$$\hat{Q}(t) = ((\dot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon}^*)/2)\,(\hbar/l_\phi^2)\,\hat{\Phi}^0(t) + ((\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^*)/2)\,\hat{Q}^0(t). \tag{16}$$

Используя связь между операторами заряда $\hat{Q}$ и напряжения $\hat{V}$: $\hat{Q}=C\hat{V}$, мы получим временны́е зависимости напряжения и внутреннего магнитного потока в квантовом интерферометре (а использование джозефсоновского соотношения между током и внутренним потоком интерферометра в гармоническом приближении дает временну́ю зависимость тока в интерферометре). Величины $\hat{\Phi}_0$ и $\hat{V}_0=\hat{Q}_0/C$ задают начальную точку на вольт-потоковой характеристике квантового интерферометра. Таким образом, мы можем определить отклик интерферометра на произвольное нестационарное воздействие, т. е. описать безгистерезисный режим квантового интерферометра, взаимодействующего с классическим колебательным контуром при низких температурах.

Рассмотрим теперь свойства интерферометра при $T=0$, при этом система будет находиться в основном состоянии $\Psi_0(y,\ t)$, определяемом следующим образом: $\hat{\mathcal{U}}(t)\ \Psi_0(t)=0$. Выразим операторы $\hat{\mathcal{U}}(t)$ и $\hat{\mathcal{U}}^+(t)$ через операторы $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$

$$\mathcal{U}(t) = u(t)\,\hat{a} + v(t)\,\hat{a}^+,$$
$$u(t) = (\varepsilon - i\dot{\varepsilon})/2, \quad v(t) = -(\varepsilon + i\dot{\varepsilon})/2. \tag{17}$$

Теперь вычислим флуктуации потока и напряжения в основном состоянии интерферометра, используя R, ϑ, α параметризацию [8] для функций $u(t) = |u| \exp(i\chi_u)$ и $v(t) = |v| \exp(i\chi_v)$

$$R = \ln(|u| + |v|), \quad \alpha = -\chi_u, \quad \vartheta = -\chi_u - \chi_v, \tag{18а}$$
$$(\Delta\Phi)^2 = (l_\phi^2/2)(\mathrm{ch}(2R) - \mathrm{sh}(2R)\cos(2\alpha + \vartheta)),$$
$$(\Delta V)^2 = (\hbar^2/C^2 \cdot 2l_\phi^2)(\mathrm{ch}(2R) + \mathrm{sh}(2R)\cos(2\alpha + \vartheta)). \tag{18б}$$

Для коэффициентов сжатия k и корреляции r получим

$$k = (\Delta f)^2/(\Delta p_f)^2 = [\mathrm{ch}(2R) - \mathrm{sh}(2R)\cos(2\alpha + \vartheta)]/(\mathrm{ch}(2R) + \mathrm{sh}(2R)\cos(2\alpha + \vartheta))]^{-1},$$
$$r = (\Delta f p_f)^2/(\Delta f)^2(\Delta p_f)^2 = \sin^2(2\alpha + \vartheta)/(\mathrm{cth}^2(2R)\cos^2(2\alpha + \vartheta)). \tag{19}$$

Для получения явных выражений для флуктуаций необходимо использовать в выражениях (18)—(19) явный вид $\varepsilon(t)$ из (14). (Ввиду их громоздкости они вынесены в Приложение).

Рассмотрим теперь частные случаи.

А) Стационарное внешнее воздействие ($\Phi_{ext}=\mathrm{const}$), тогда $\varepsilon(t) \sim \exp(i\Omega t)$, где $\Omega=\mathrm{const}$. При этом получим

$$(\Delta\Phi)^2 = l_\phi^2/2 = \hbar/2\Omega C,$$
$$(\Delta I)^2 = (l_\phi^2/2)(l/L)^2\cos^2\phi_c, \tag{20}$$

что совпадает с результатами [2, 4].

В) Случай скачка частоты: пусть в момент $t=t_0$ частота системы изменилась скачком с Ω_1 до Ω_2. При этом для параметров R, ϑ, α получаем $R=\ln(\Omega_1/\Omega_2)$, $\alpha=\Omega_2 t$, $\vartheta=0$.

Тогда

$$(\Delta\Phi)^2=(l_\phi^2/2)\,[\mathrm{ch}\,2\ln(\Omega_2/\Omega_1)-\mathrm{sh}\,2\ln(\Omega_2/\Omega_1)]\cos 2\Omega_2 t,$$
$$(\Delta V)^2=(\hbar^2/C^2 2l_\phi^2)\,[\mathrm{ch}\,2\ln(\Omega_2/\Omega_1)+\mathrm{sh}\,2\ln(\Omega_2/\Omega_1)]\cos(2\Omega_2 t)\,\Omega_1^{-2}, \qquad (21)$$

и для коэффициентов k и r

$$k=\frac{1-\mathrm{th}\,2\ln(\Omega_2/\Omega_1)\cos 2\Omega_2 t}{1+\mathrm{th}\,2\ln(\Omega_2/\Omega_1)\cos 2\Omega_2 t},$$

$$r^2=\frac{\sin^2 2\Omega_2 t}{\mathrm{cth}^2\,2\ln(\Omega_2/\Omega_1)-\cos^2 2\Omega_2 t}. \qquad (22)$$

Вывод: основное состояние сверхпроводящего квантового интерферометра при нестационарном воздействии является коррелированным когерентным состоянием по отношению к начальному состоянию системы. Эти результаты можно легко обобщить на случай $T\neq 0$. Выражения для коэффициентов сжатия и корреляции при этом не изменяется по сравнению с (19).

2. Обсуждение результатов

Проведенное исследование нам кажется интересным со следующих точек зрения.

А) Построенная нестационарная теория позволяет описать поведение квантового интерферометра в безгистерезисном режиме, взаимодействующего с классическим колебательным контуром при низких температурах.

В) Используя нестационарное внешнее воздействие (например, изменяя магнитный поток Φ_{ext} через интерферометр с помощью модуляционной катушки), можно перевести квантовый интерферометр в состояние с подавленными квантовыми флуктуациями потока $(\Delta\Phi)^2$ или напряжения $(\Delta V)^2$. Оценим предельное значение коэффициента сжатия в случае скачкообразного изменения частоты

$$R=\ln(\Omega_2/\Omega_1), \quad k=\exp(-4R)=(\Omega_1/\Omega_2)^4. \qquad (23)$$

Используя (5) для частот Ω_1 и Ω_2, получим

$$\Omega_1^2/\Omega_2^2=((1+l\cos(\phi_{c1}))/(1+l\cos(\phi_{c2}))). \qquad (24)$$

Выбирая начальное состояние системы такое, что $\cos(\phi_{c1})=1$ (это можно сделать, задавая соответствующим образом начальное значение Φ_{ext}), и изменив Φ_{ext} таким образом, чтобы $\cos(\phi_{c2})=1$, получим

$$k=\Omega_1^4/\Omega_2^4=((1-l)/(1+l))^2. \qquad (25)$$

Таким образом, эффект подавления флуктуаций потока Φ будет тем значительней, чем l ближе к 1 (для $l=0.3$ предельное значение $k=0.29$, что означает уменьшение квантовых флуктуаций потока на ~ 70 %).

Реализация сжатого состояния квантового интерферометра с подавленными квантовыми флуктуациями потока или напряжения представляла бы интерес для проведения неразрушающих квантовых измерений.

С) Реализация коррелированного когерентного состояния в случае гистерезисного режима ($l>1$) квантового интерферометра должна привести к усилению эффектов макроскопического квантового туннелирования между метастабильными состояниями интерферометра аналогично предсказанному в [10, 11] эффекту для джозефсоновского перехода.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Используя выражение (14) для $\varepsilon(t)$ и начальные условия $\varepsilon(\tau_0)=1$, $\dot\varepsilon(\tau_0)=i$, получим следующее выражение для постоянных A и B:

$$A=\{1+lg(0)\}^{1/4},$$

$$B=\frac{1}{\mathscr{E}'(0)}\left[i\Omega_0+\frac{1}{4}(1+lg(0))^{-1}\right](1+lg(0))^{1/4},$$

$$\mathscr{E}(t)=\Omega_0\int\limits_0^t d\tilde t\,[1+lg(t)]^{1/2}+(l/8\Omega_0)\int\limits_0^t\left[g''(\tilde t)+\left(\frac{5l}{4}\right)\frac{g'(\tilde t)}{1+lg(\tilde t)}\right][1+lg(\tilde t)]^{-3/2}\,d\tilde t. \quad (26)$$

Тогда выражения (18) для флуктуаций магнитного потока и напряжения принимают следующий вид:

$$(\Delta V)^2=\frac{\hbar^2}{2l_\Phi^2C^2}\,|A\cos\mathscr{E}(t)+B\sin\mathscr{E}(t)|^2(1+lg(t))^{-1/2}, \quad (27\text{а})$$

$$(\Delta\Phi)^2=(l_\Phi^2/2\Omega_0^2)\left|\left[\left(-\frac{1}{4}\right)(1+lg(t))^{-5/4}lg'(t)\{A\cos\mathscr{E}(t)+B\sin\mathscr{E}(t)\}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(1+lg(t))^{-1/4}\{-A\sin\mathscr{E}(t)+B\cos\mathscr{E}(t)\}\,\mathscr{E}'(t)\right]\right|^2. \quad (27\text{б})$$

Для коэффициента сжатия k получим следующее выражение:

$$k^{-1}=\Omega_0^2\frac{|A\cos\mathscr{E}(t)+B\sin\mathscr{E}(t)|^2(1+lg(t))^{-1/2}}{\left|\left[-\frac{1}{4}(1+lg(t))^{-5/4}lg'(t)\{A\cos\mathscr{E}(t)+B\sin\mathscr{E}(t)\}+(1+lg(t))^{-1/4}\times\times\{-A\sin\mathscr{E}(t)+B\cos\mathscr{E}(t)\}\,\mathscr{E}'(t)\right]\right|^2}. \quad (28)$$

Список литературы

[1] Dodonov V. V., Kurmyshev E. M., Man'ko V. I.// Phys. Lett. A. 1980. V. 79. P. 152—153.
[2] Гринберг Я. С. // ФНТ. 1982. Т. 8. № 4. С. 395—401.
[3] Widom A. // J. Low Temp. Phys., 1979. V. 37. P. 449—460.
[4] Widom Al. et al. // Nuovo Cim. B., 1981. V. 61. N 1. P. 112—122.
[5] Anderson P. W. // Many body problems, N. Y., Acad. Press, 1964. P. 113—136.
[6] Лихарев К. К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. М.: Наука, 1985. 320 с.
[7] Додонов В. В., Манько В. И. // Тр. ФИАН. 1987. Т. 183. С. 71—181.
[8] Додонов В. В., Манько В. И., Манько О. В. // Тр. ФИАН. 1989. Т. 191. С. 171—244.
[9] Мак-Лахлан М. Теория и приложение функций Матье. М.; ИЛ, 1953.
[10] Додонов В. В., Климов А. Б., Манько В. И. // Тр. ФИАН. 1991. Т. 200. С. 56—105.
[11] Павлов С. Т., Прохоров А. В. // ФТТ. 1991. Т. 33. № 8. С. 2460—2462.

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе РАН
Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию
21 июня 1991 г.