УДК 532.783; 548—14

КРИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ФЛУКТУАЦИЙ ПРИ ФАЗОВОМ ПЕРЕХОДЕ ИЗОТРОПНАЯ ЖИДКОСТЬ—НЕМАТИК

Б. М. Хасанов

Методом ренормализационной группы (РГ) исследуется критическая динамика флуктуаций тензорного параметра вблизи фазового перехода нематический жидкий кристалл—изотропная жидкость (НЖК—ИЖ). В первом порядке по $\varepsilon = 6-d$ вычисляются критические показатели.

В настоящей работе рассматривается критическая динамика флуктуаций тензорного параметра порядка вблизи фазового перехода НЖК—ИЖ. Важным здесь является то, что разложение свободной энергии содержит инвариант третьей степени. В статике это приводит к существованию масштабно-инвариантного решения в $d=6-\varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$)-мерном пространстве, а также к возможному непрерывному фазовому переходу [1-3]. В [4] была предпринята попытка исследовать фазовый переход НЖК—ИЖ и критическую динамику в рамках скалярной модели φ^3 и были вычислены критические показатели. Однако флуктуации в скалярной модели не описывают переход НЖК—ИЖ, к тому же в этой модели нет фиксированной точки РГ для тройной вершины в пространстве $6-\varepsilon$.

Чтобы исследовать динамику в системе с тензорным параметром порядка, рассмотрим еще раз статическую задачу. В рамках модели Ландау свободную энергию вблизи фазового перехода можно разложить в ряд по степеням параметра порядка. Для перехода НЖК—ИЖ соответствующий гамильтониан имеет вид

$$\mathscr{H} = \int d^d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} (r \operatorname{Sp} Q^2 + \operatorname{Sp} (\nabla Q)^2) - \frac{1}{3} B \operatorname{Sp} Q^3 + \frac{1}{4} c (\operatorname{Sp} Q^2)^2 \right], \quad (1)$$

где r — линейная функция температуры; $Q_{\alpha\beta}(x)$ — трехмерный бесследовый тензор, в качестве которого можно, например, взять анизотропную часть диэлектрического тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ [5]

$$Q_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \operatorname{Sp} \varepsilon.$$

В общем случае флуктуации $Q_{\alpha\beta}$ включают в себя продольные, поперечные и двухосные флуктуации, причем первая есть флуктуация модуля параметра порядка. В силу эквивалентности тензора $Q_{\alpha\beta}$ спинору Q_l^m с рангом $l=2$ гамильтониан (1) для дальнейших вычислений перепишем через флуктуации $Q_2^m \equiv Q_m$

$$\mathscr{H} = \int d^d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} (r + \nabla^2) \sum_{m=-2}^{2} Q_m Q_m - \frac{1}{3\sqrt{6}} B \Big(Q_0^3 + \frac{3}{2} Q_0 (Q_1^2 + Q_{-1}^2) - \right.$$

$$- 3Q_0 (Q_2^2 + Q_{-2}^2) + \frac{3\sqrt{3}}{2} (Q_1^2 Q_2 - Q_{-1}^2 Q_2 + 2Q_1 Q_{-1} Q_{-2}) \Big) +$$

$$+\frac{1}{4}c\left(\sum_{m=-2}^{2}Q_mQ_m\right)^2\Bigg], \tag{2}$$

здесь компоненты тензора $Q_{\alpha\beta}$ связаны флуктуациями Q_m следующим образом [6]:

$$Q_{11}=\frac{2}{\sqrt{6}}Q_0,\quad Q_{12}=-\frac{1}{\sqrt{2}}Q_{-1},\quad Q_{13}=-\frac{1}{\sqrt{2}}Q_1,\quad Q_{23}=\frac{1}{\sqrt{2}}Q_{-2},$$

$$Q_{22}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}Q_0+Q_2\right),\quad Q_{33}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}Q_0-Q_2\right).$$

Из гамильтониана (2) видно, что все слагаемые типа Q_mQ_m имеют один и тот же коэффициент r. Таким образом, в изотропной фазе можно ожидать флуктуации Q_m с любым m, даже если в нематической фазе параметр порядка связан только с Q_0.

Запишем уравнения РГ для r и B в (2) в $6-\varepsilon(\varepsilon\ll 1)$-мерном пространстве, в котором четверная вершина c не является критической и не учитывается как несущественная

$$r'=b^{2-\eta}\left[r-\frac{7}{6}K_6B^2\left(-2r\ln b+\frac{3}{2}r^2b^2\right)\right], \tag{3}$$

$$B'=b^{\frac{\varepsilon-3\eta}{2}}\left(B-\frac{1}{2}B^3K_6\ln b\right), \tag{4}$$

где интегралы по внутренним импульсам вычислены в пределах $\Lambda/b<q<\Lambda$ и произведена замена $q\to b^{-1}q$, $Q_m\to b^{1+(d-\eta)\,2}Q_m$, $K_6=1/64\pi^3$. При получении уравнений (3), (4) учитывались флуктуации всех компонент Q_m в (2), а также предположено, что $r\ll 1$. Критический показатель η получим из условия равенства коэффициентов при q^2 при РГ преобразовании

$$1=b^{-\eta}\left(1+\frac{7}{18}B^2K_6\ln b\right). \tag{5}$$

Из уравнений (3)—(5) легко находятся фиксированные точки B^*, r^* и η

$$B^{*2}=\frac{6}{13K_6}\varepsilon,\quad r^*=\frac{7}{6}K_6B^2,\quad \eta=\frac{7}{39}\varepsilon, \tag{6}$$

что в первом порядке по ε совпадает с результатами, полученными в [1, 2]. Тот факт, что $r^*\sim\varepsilon$, оправдывает приближение $r\ll 1$, сделанное при получении уравнений (3), (4).

Критическая динамика обычно описывается релаксационным уравнением для параметра порядка, которое в наших обозначениях имеет вид

$$\frac{\partial Q_m}{\partial t}=-\Gamma_0\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta Q_m}+\zeta_m, \tag{7}$$

где поле Q_m является сглаженным, т. е. содержит Фурье-гармоники $Q_m(q)$ с $q\leqslant\Lambda$; Γ_0 — кинетический коэффициент; ζ_m — гауссовый шум

$$\langle\zeta_{m\mathbf{k}}(t)\zeta_{m'\mathbf{k}'}(t')\rangle=2\Gamma\delta_{mm'}\delta_{-\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta(t-t').$$

Уравнение (7) для Q_0 с учетом (2) имеет вид

$$\frac{1}{\Gamma_0}\frac{\partial Q}{\partial t}=-\left[rQ_0+\frac{1}{2\sqrt{6}}B\left(2Q_0^2+Q_1^2+Q_{-1}^2-2Q_2^2-2Q_{-2}^2\right)-\nabla^2Q_0\right]+h, \tag{8}$$

здесь поле h сопряжено полю Q_0. Представим поля Q_m в виде суммы двух слагаемых: «медленно» меняющиеся Q_m с $q\leqslant\Lambda/b$ и «быстро» меняющиеся Q'_m с $\Lambda/b<q\leqslant\Lambda$. Тогда в нулевом порядке по B для функции линейного отклика $G_{m=0}(\mathbf{q}\omega)$ и среднего значения $\langle Q'_0(\mathbf{q}\omega)\,Q'_0(-\mathbf{q},\,-\omega)\rangle$ имеем

$$G_0(\mathbf{q}\omega) = \left(-\frac{i\omega}{\Gamma_0} + r + q^2\right)^{-1},$$

$$C_0(\mathbf{q}\omega) = \langle Q'_0(\mathbf{q}\omega)\, Q'_0(-\mathbf{q},\ -\omega)\rangle = \frac{2}{\omega}\,\mathrm{Im}\, G_0(\mathbf{q}\omega). \qquad (9)$$

Уравнение (8) для «медленной» функции Q_0 имеет вид

$$Q_0 = G_0 h_0 - \frac{1}{\sqrt{6}} B G_0 (2Q'_0 Q_0 + Q'_1 Q_1 + Q'_{-1} Q_{-1} - 2Q'_2 Q_2 - 2Q'_{-2} Q_{-2}). \qquad (10)$$

Аналогично легко получить уравнения для остальных компонент $Q_m = (m = \pm 1,\ \pm 2)$

$$Q_m = (-1)^m \frac{|m|}{\sqrt{6}} B G_m Q'_m Q_0, \qquad (11)$$

где в правой части оставлены только слагаемые, пропорциональные «медленно» меняющейся компоненте Q_0.

Итерируя (10) до второго порядка по B и усредняя по «быстро» меняющимся компонентам Q'_m, находим

$$Q_0 = G h_0,$$

$$G = G_0 + \frac{1}{6} B^2 G_0 [4\langle Q'_0 G_0 Q'_0\rangle + \langle Q'_1 G_1 Q'_1\rangle + \langle Q'_{-1} G_{-1} Q'_{-1}\rangle +$$

$$+ 4\langle Q'_2 G_2 Q'_2\rangle + 4\langle Q'_{-2} G_{-2} Q'_{-2}\rangle]\, G_0. \qquad (12)$$

Из вида гамильтониана (2) и уравнения (7) следует что функции $G_m = G_0$, а следовательно, и $C_m = C_0$. Отсюда из (12) можно получить выражение для собственно-энергетической части $\Sigma(\mathbf{q},\ \omega)$ во втором порядке по B

$$\Sigma(\mathbf{q}\omega) = -\frac{7}{3} B^2 \int \frac{d^d\mathbf{k}\, d\omega'}{(2\pi)^{d+1}} \{G_0(\omega - \omega',\ \mathbf{q} - \mathbf{k})\, C_0(\omega',\ \mathbf{k}) +$$

$$+ G_0(\omega',\ \mathbf{k})\, C_0(\omega - \omega',\ \mathbf{q} - \mathbf{k})\}. \qquad (13)$$

Для вывода уравнения на Γ необходимо найти $\Sigma(\mathbf{q}\omega)$ при $q=0$ и вычесть из нее $\Sigma(0,\ 0)$, после чего имеем

$$\Gamma^{-1} = b^{2-\eta-z}\Gamma_0^{-1}\left(1 + \frac{7}{6} B^2 K_6 \ln b\right), \qquad (14)$$

где динамический индекс z, определяемый через характеристическую частоту $\omega(\mathbf{k}) \sim k^z$, возникает из изменения масштаба времени $t \to t/b^z$. Уравнение (14) имеет фиксированную точку Γ, если выполняется соотношение

$$z = 2 - \eta + \frac{7}{6} K_6 B^2,$$

или с учетом (6)

$$z = 2 + 2\eta. \qquad (15)$$

Динамический индекс z можно также найти из соотношения динамического подобия $\Delta = \nu z$, где Δ определяется из $\tau \sim (T - T_0)^{-\Delta}$. Для этого определим динамическую восприимчивость

$$\chi^{-1}(\omega) = \left(-\frac{i\omega}{\Gamma_0} + r + \Sigma(\omega)\right) \qquad (16)$$

и время релаксации критического замедления параметра порядка [7]

$$\tau = \lim_{\omega\to 0} \frac{\chi(\omega) - \chi(0)}{i\omega\chi(0)},$$

$$\chi(0) \sim (T - T_0)^{-\gamma},$$

которое с учетом (16) можно представить

$$\tau=\chi(0)\left[\Gamma^{-1}+\Sigma(r)\right],$$

$$\Sigma(r)=-\lim_{\omega\to 0}\operatorname{Im}\frac{\Sigma(\omega)}{\omega}. \tag{17}$$

Далее определим показатель φ как $\Sigma(r)\sim r^{-\varphi}$ и разложим $\Sigma(r)$ по степеням B, определяющего взаимодействие флуктуаций в (2)

$$\Sigma(r)=B\Sigma_1(r)+B^2\Sigma_2(r)+\ldots.$$

Тогда для φ имеем

$$\varphi=B\varphi_1+B^2\varphi_2+\ldots,$$

где φ_i получаются из логарифмических слагаемых в $\Sigma_i(r)$, а показатель $\tilde{\Delta}=\Delta/\gamma$, определяемый как $\tau\sim r^{-\tilde{\Delta}}$, с учетом (17) равен $\tilde{\Delta}=1+\varphi$.

Вычисляя $\Sigma(r)$ из (17) и (13), с точностью до логарифмического члена получим

$$\Sigma_2(r)=-\frac{7}{12}K_6\Gamma_0^{-1}\ln r.$$

Следовательно,

$$\tilde{\Delta}=1+\frac{7}{12}K_6B^2$$

или, используя выражение для фиксированной точки (6) и соотношение $(2-\eta)\,\nu=\gamma$,

$$\tilde{\Delta}=1+\frac{3}{2}\eta,\quad z=2+2\eta.$$

Для нахождения индекса Δ критического замедления времени релаксации найдем ν. Для этого линеаризуем уравнение (3) и представим его в виде

$$\delta r'=b^{\lambda_r}\delta r,$$

где $\delta r'=r'-r^*$, $\delta r=r-r^*$. Величина λ_r определяется из соотношения

$$b^{\lambda_r}=b^{2-\eta}\left(1+\frac{7}{3}K_6B^{*2}\ln b\right),$$

откуда в первом порядке по ε имеем

$$\lambda_r=2+5\eta.$$

Следуя [8], $\nu=1/\lambda_r$, тогда

$$\nu=\frac{1}{2}-\frac{35}{156}\varepsilon,$$

что совпадает с результатом, полученным в [1]. Используя соотношение подобия $\Delta=\nu z$, имеем $\Delta=1-7\varepsilon/26$.

Автор благодарен Г. Б. Тейтельбауму за обсуждение.

Список литературы

[1] Priest R. G., Lubensky T. C. // Phys. Rev. 1976. V. 13. N 9. P. 4159—4171.
[2] Корженевский А. Л. // ФТТ. 1978. Т. 20. № 2. С. 359—367.
[3] Корженевский А. Л., Шалаев Б. Н. // ЖЭТФ. 1979. Т. 76. № 6. С. 2166—2177.
[4] Schiele K. // Phys. Stat. Sol. 1986. V. 134b. P. K1—K6.
[5] de Gennes P. G. // Phys. Lett. 1969. V. 30A. N 8. P. 454—455; Mol. Cryst. Liq. Cryst. 1971. V. 12. P. 193—214.
[6] Кац Е. И. // УФН. 1984. Т. 142. № 1. С. 99—129.
[7] Suzuki M., Igarashi G. // Prog. Theor. Phys. 1973. V. 49. N 3. P. 1070—1071.
[8] Вильсон К., Когут Д. Ренормализационная группа и ε-разложение. М., 1975. 255 с.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступило в Редакцию
22 мая 1991 г.