УДК 538.7

О ПРАВОМЕРНОСТИ РАСЧЕТА ПОВЕРХНОСТНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ГРАНУЛИРОВАННОГО СВЕРХПРОВОДНИКА НА ОСНОВЕ ОДНОРОДНОЙ РЕШЕТОЧНОЙ МОДЕЛИ

А. Л. Корженевский, А. А. Лужков

Исследована возможность описания сверхпроводящей керамики однородной решеточной моделью для оценки поверхностного импеданса на СВЧ частотах. Показано, что в области применимости континуального описания керамики эта модель является удовлетворительной.

В настоящее время для анализа свойств ВТСП керамик широко используется концепция джозефсоновской среды [1]. Для оценки реальных значений параметров этой среды были проведены СВЧ измерения поверхностного сопротивления керамики Y—Ba—Cu—O [2, 3], данные которых затем были сопоставлены с результатами расчета для модели регулярной электрической сетки с соответствующими сосредоточенными элементами. Несмотря на вполне разумный порядок величин, полученных для средних значений физических параметров, вопрос о возможности описания гранулированной ВТСП керамики однородной решеточной моделью оставался открытым.

В настоящей работе мы рассмотрим процесс распространения электромагнитной волны в ВТСП керамике в рамках модели неупорядоченной сплошной среды, для которой рассчитаем эффективные характеристики. Близость значений последних к значениям, полученным простым усреднением по объему, будет тогда означать законность использования однородной модели для оценок параметров джозефсоновской среды в том интервале частот, где вообще применимо континуальное приближение.

Для количественного анализа результатов измерений поверхностного сопротивления ВТСП керамики [2] рассмотрим нормальное падение плоской электромагнитной волны вдоль оси Y на гранулированный полубесконечный сверхпроводник. Уравнение, описывающее распространение монохроматической волны с частотой ω в неоднородной среде в рамках континуального приближения, выводится стандартным образом (см., например, [4]) и имеет следующий вид:

$$-a^2\Delta V + (Z_1/Z_2)\,V \equiv \hat{L}V = V_0. \tag{1}$$

Здесь $V(\mathbf{r}, \omega)$ — пространственная амплитуда волны в среде, т. е. либо компонента электрического поля E_X, либо магнитного — H_Z; a — размер гранулы; V_0 — значение соответствующей компоненты поля в среде на границе образца — заданная функция, связанная с амплитудой падающей волны [4]. Мы рассматриваем задачу в скалярной формулировке, поскольку, как будет показано ниже, применима теория возмущений и эффектами деполяризации рассеянной волны можно пренебречь. Входящие в (1) характеристики среды являются случайными функциями координат.

Уравнение (1) также является континуальным обобщением уравнений Кирхгофа для среды с распределенными параметрами — импедансами $Z_1(\omega)$, $Z_2(\omega)$. Используя обозначения работы [2], имеем $Z_1 = i\omega L_1 = i\omega\mu_0 a$ (μ_0 — магнитная проницаемость), величина Z_2 описывает свойства контактов между гранулами и принимает различные значения Z_2^+, Z_2^- при температурах выше и ниже температуры сверхпроводящего перехода в контакте T_C

$$Z_2^+ = R_N, \quad Z_2^- = [R_N^{-1} + (i\omega L_J)^{-1}]^{-1}.$$

Поскольку локальное значение T_C флуктуирует от контакта к контакту, то в окрестности средней температуры перехода $\bar{T}_C$ только часть контактов будет находиться в сверхпроводящем состоянии. В этом случае имеем

$$Z_2^{-1} = (Z_2^+)^{-1} + [(Z_2^-)^{-1} - (Z_2^+)^{-1}]\,\hat{\Theta}\,(T_C(\mathbf{r}) - T), \tag{2}$$

где $\hat{\Theta}$ — функция Хевисайда и мы ввели случайную функцию локальных температур перехода $T_C(\mathbf{r})$. В приведенных выше формулах R_N — омическое сопротивление контакта между гранулами, $L_J = \Phi_0/(2\pi I_C)$, I_C — критический ток контакта, Φ_0 — квант магнитного потока.

Континуальное приближение применимо, если характерный пространственный масштаб изменения $V(\mathbf{r})$ оказывается много больше среднего размера гранул, т. е. при выполнении условия $|Z_1/Z_2|^{1/2} \ll 1$, которое соответственно выше и ниже области размытия сверхпроводящего перехода в окрестности $\bar{T}_C$, имеет вид

$$\begin{gathered}(\omega_N/\omega)^{1/2} \gg 1, \quad T > \bar{T}_C,\\ (a/\lambda_э)[1 + \theta^2]^{1/4} \ll 1, \quad T < \bar{T}_C,\end{gathered} \tag{3}$$

где $\lambda_э = a\,(L_J/L_1)^{1/2}$ — глубина экранирования поля, проникающего в среду; $\theta = \omega/\omega_C$; $\omega_C = R_N/L_J$ — критическая частота контакта; $\omega_N = 2R_N/L_1$ — частота, при которой глубина скин-слоя равна размеру гранулы a.

Параметры a, R_N, I_C являются случайными величинами, разброс значений которых будем считать гауссовым, а их радиус корреляции b вдали от $\bar{T}_C$ по порядку величины равен среднему размеру гранулы $\bar{a}$. Случайное поле локальных температур перехода $T_c(\mathbf{r})$ также считаем гауссовым с функцией распределения

$$P(T_c) \sim \exp[-(T - \bar{T}_c)^2/(\Delta T)^2].$$

Решение уравнения (1) при известной конфигурации локальных значений всех параметров может быть записано в виде свертки $V = \hat{G} * V_0$, где $\hat{G} = \hat{L}^{-1}$ — функция Грина уравнения (1). Записывая решение уравнения (1) в виде итерационного ряда по степеням отклонений параметров среды от их средних значений, можно получить соответствующий итерационный ряд для $\hat{G}$ (см., например, [5]). Усредняя его по случайным реализациям локальных параметров керамики, получим выражение для эффективных значений параметров из равенства $\hat{L}_{эфф} = \langle\hat{G}\rangle^{-1}$, где скобки $\langle\ldots\rangle$ означают операцию усреднения.

Рассмотрим сначала ситуацию с расчетом поверхностного сопротивления вне области сосуществования сверхпроводящих и несверхпроводящих контактов, когда $T \geqslant \bar{T}_C + 3\Delta T$ или $T \leqslant \bar{T}_C - 3\Delta T$. Оценим, например, влияние флуктуаций сопротивления контактов $R_N(\mathbf{r})$, для коррелятора которого в этом случае имеем $\langle R_N(\mathbf{r})\, R_N(0)\rangle - \bar{R}^2 = (\Delta R_N)^2 \exp(-r/b)$, где $\bar{R}_N = \langle R_N\rangle$. Вычислив $\langle G\rangle$ в первом корреляционном приближении, выражение для эффективного поверхностного импеданса Z получим по обычным формулам [4]. При $T \geqslant \bar{T}_C + 3\Delta T$ находим

$$\begin{gathered}Z = \bar{Z}\left[1 + i\left(\Delta R_N/\bar{R}_N\right)^2 (b/a)^2 \left(\omega/\omega_N\right)\right],\\ \bar{Z} = (1 - i)\bar{R}_N\left(\omega/\omega_N\right)^{1/2},\end{gathered} \tag{4}$$

где $\bar{Z}$ — импеданс, полученный простой заменой параметров среды их средними по объему значениями. Учитывая условия применимости континуального приближения (3), из (4) получаем, что при $\bar{R}_N \gg \Delta R_N$, $b \sim a$ корреляционная поправка к среднему значению $\bar{Z}$ мала. При комнатной температуре соответствующий интервал частот, согласно данным [2, 3], ограничен условием $\omega/(2\pi) < 10^{11}$ Гц. Можно показать, что для $T \leqslant \bar{T}_C - 3\Delta T$ аналогичная поправка также мала в области частот, отвечающих второму из условий (3).

Аналогичным образом находим выражение для эффективного импеданса Z' в корреляционном приближении по флуктуирующему полю $L_J(\mathbf{r})$ при $T \leqslant \bar{T}_C - 3\Delta T$

$$Z' = \bar{Z}'\left[1 + (1 + i\theta)^{-1}\left(\Delta L_J/\bar{L}_J\right)^2 (b/a)^2 \left(\omega_C/\omega_N\right)\right], \qquad (5)$$
$$\bar{Z}' = i\theta \bar{R}_N\left[\left(\omega_N/2\omega_C\right)(1 + i\theta)\right]^{-1/2}.$$

Из (5) видно, что поправка к среднему значению импеданса растет при понижении температуры, так как отношение $\omega_C/\omega_N \sim I_c(T)$. Из экспериментальных данных [2, 3] можно установить, что $\omega_C/\omega_N \gg 1$ для $T \leqslant T_* = 40$ К. Однако при $\omega_C/\omega_N \simeq 1$ мы оказываемся на границе области применимости континуального приближения. Поэтому утверждать, что использованная в [2] однородная модель не работает при $T < T_*$, нельзя, можно лишь говорить о тенденции к ухудшению описания измерений поверхностного сопротивления при низких температурах, полученного с ее помощью.

Интервал температур, относящихся к области размытого фазового перехода $|T - \bar{T}_C| \leqslant 3\Delta T$, необходимо рассмотреть отдельно. Предположив гауссово распределение поля $T_C(\mathbf{r})$ с радиусом корреляции $r_0 \sim a$, приходим к выводу о перколяционном характере такого перехода [6, 7].

Стохастическое уравнение (1) принимает вблизи точки перехода (порога перколяции сверхпроводящей фазы) вид

$$-a^2 \Delta V + 2\left[i\left(\omega/\omega_N\right) + \left(\omega_C/\omega_N\right)(\tau + \varphi(\mathbf{r}))\right] V = V_0, \qquad (6)$$

где $\tau = \langle \hat{\Theta}(T_C(\mathbf{r}) - T)\rangle$ — относительная доля сверхпроводящей фазы, коррелятор случайного поля $\varphi(r) = \hat{\Theta}(T_C(\mathbf{r}) - T) - \tau$ является функцией Орнштейна—Цернике

$$\langle \varphi(\mathbf{r})\varphi(0)\rangle = \frac{1}{3}(r_0/r)\exp(-r/\rho),$$

$$\rho = r_0\left|\left(\tau - \tau_C\right)/\tau_C\right|^{-\nu}$$

— средний размер сверхпроводящего кластера, $\nu \simeq 0.9$ — соответствующий критический индекс, $\tau_C \simeq 0.2$ — порог протекания.

Для оценки области применимости итерационной процедуры для уравнения (6) вблизи $\bar{T}_C$ удобно записать флуктуирующий член как $v_0\varphi(\mathbf{r})$ и вычислять поправку к $v_0 = 2\omega_C/\omega_N$ — параметру разложения итерационного ряда для средней функции Грина $\langle G\rangle$ (подробнее см. в [7]). Результат вычислений имеет вид

$$v = v_0\left[1 + (1/12)\left(r_0/\lambda_э\right)\left(\rho/\lambda_э\right)\left(\tau_C + i\theta\right)^{-1}\right]. \qquad (7)$$

Согласно данным [2], для $T = 78$ К $\simeq \bar{T}_C$ отношение $r_0/\lambda_э \simeq a/\lambda_э \simeq 0.03$. Поэтому поправка к v_0 станет заметной лишь при $\rho > 1$ см, что превышает толщину исследовавшихся пленок. Однако вывод о малости поправки можно сделать, строго говоря, только для частот $\omega > \omega_C$. Дело в том, что при $\omega \leqslant \omega_C$ случайная «добавка» $v_0\varphi(\mathbf{r})$ становится относительно большой в $\hat{L}$-операторе уравнения (6) и двухфазная среда вблизи $\bar{T}_C$ оказывается сильно неоднородной. В этом случае гауссово распределение, использовавшееся при вычислении поправки (7), может стать неприменимым. Подобная ситуация имеет место, например, для фазовых переходов в дефектных кристаллах вблизи трикритической точки, когда для описания перехода необходимо использовать эффективный гамильтониан перколяционной задачи, а не гамильтониан Хмельницкого—Лютера—Эмери (пригодный для описания фазовых переходов второго рода) [8].

Так как частота $\omega_C/2\pi=1.4\cdot10^7$ Гц при $T=78$ К [2] и $\omega_C \sim I_C(T)$, то ясно, что отклонения измеренных значений поверхностного сопротивления ВТСП керамики от его средней величины могут оказаться заметными лишь для частот $\omega/2\pi \leqslant 10^7$ Гц при $T \simeq \bar{T}_C$. Эта область заслуживает специального анализа. В то же время интервал частот в экспериментах [2, 3] составлял $5\cdot10^7$ Гц $< \omega/2\pi < 10^{11}$ Гц, и, следовательно, использование модели однородной решетки гранул, параметрами которой служат усредненные по объему параметры керамики, является вполне корректным.

Авторы выражают свою благодарность О. Г. Вендику за полезные обсуждения рассмотренных в статье вопросов.

Список литературы

[1] Сонин Э. Б. // Письма в ЖЭТФ. 1988. Т. 47. № 8. С. 415—418.
[2] Вендик О. Г., Козырев А. Б., Попов А. Ю. // ЖТФ. 1989. Т. 59. № 1. С. 107—112.
[3] Бельски М., Вендик О. Г., Гайдуков М. М., Гольман Е. К., Карманенко С. Ф., Козырев А. Б., Колесов С. Г., Самойлов Т. Б. // Письма в ЖЭТФ. 1987. Т. 46. Приложение. С. 172—175.
[4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., 1982. 620 с.
[5] Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М., 1977. 399 с.
[6] Гинзбург С. Л. // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. № 9. С. 1145—1158.
[7] Корженевский А. Л., Лужков А. А. // ЖЭТФ. 1990. Т. 97. № 2. С. 707—719.
[8] Пентегов В. Н., Фейгельман М. В. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. № 10. С. 345—357.

Электротехнический институт
им. В. И. Ульянова (Ленина)
Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию
16 января 1991 г.
В окончательной редакции
21 мая 1991 г.