УДК 538.221

СПИРАЛЬНЫЕ СОЛИТОНЫ В ФЕРРОМАГНЕТИКЕ

А. Б. Борисов, В. А. Фейгин, Б. Н. Филиппов

Описаны нелинейные малоамплитудные возбуждения спиральной формы в одноосном ферромагнетике при учете релаксации и показана принципиальная возможность их стабилизации внешней накачкой.

К настоящему времени известен целый ряд экспериментальных работ, в которых наблюдались интересные физические явления в магнитно-упорядоченных образцах, такие как динамические преобразования доменных границ (см., например, [1, 2]) и доменных структур в целом [3, 4]. Недавно в магнитных пленках смешанных ферритов-гранатов с осью легкого намагничивания (ОЛН), перпендикулярной поверхности, в присутствии переменного внешнего магнитного поля $\mathbf{H}=\mathbf{H}(t)$, направленного вдоль этой оси, было обнаружено совершенно новое явление [5]. Суть его заключается в том, что при увеличении амплитуды $\mathbf{H}$ до достаточно большой величины, соизмеримой с полем насыщения, при фиксированной частоте переменного поля первоначальная лабиринтная доменная структура существенно изменяется и в какой-то момент в образце появляются спиралевидные образования, наблюдаемые с помощью магнитооптического эффекта Керра. Эти спиральные образования вращаются и могут поступательно перемещаться вдоль пленки с некоторой скоростью. Объяснения наблюдаемого явления пока не существует, что, по-видимому, связано как с большими математическими трудностями его описания, основанного на решении уравнения Ландау—Лифшица (УЛЛ), так и с недостаточностью сведений, полученных экспериментально.

В упомянутых экспериментах, к сожалению, не установлено, соответствует ли наблюдаемая динамическая картина изменению намагниченности в пределах спирали на 180° или имеются лишь небольшие отклонения намагниченности от направления ОЛН. Остается неясным также, в какой мере форма образца, в частности магнитостатические поля, отражается на конкретных параметрах спиралевидных динамических образований. В связи с этим в данной работе мы хотим обратить внимание только на то, что уравнение Ландау—Лифшица допускает существование в одноосных ферромагнетиках малоамплитудных нелинейных волн спиральной формы, которые по своим свойствам сходны с наблюдаемыми в [5].

Мы будем исходить из представления о магнитноодноосном ферромагнетике с ОЛН, направленной вдоль оси z, однако будем считать, что максимальное значение амплитуды $H(t)$ может быть соизмеримо с полем насыщения образца. В таких полях, которые в широкой области температур значительно меньше полей опрокидывания подрешеток в ферримагнетиках, приведенные ниже результаты будут в равной степени применимы не только к ферро-, но и к ферримагнетикам, в частности к ферритам-гранатам с редкоземельными добавками, на которых проведены наблюдения в [5].

Распределение намагниченности $\mathbf{M}$ удовлетворяет УЛЛ

$$\mathbf{M}_t=\gamma\left(\mathbf{M}\times\mathbf{H}_{\mathrm{eff}}+\frac{\delta}{M_0}\mathbf{M}\times\mathbf{M}_t\right), \tag{1}$$

где в соответствии с рассматриваемой моделью

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \alpha \Delta \mathbf{M} + (\beta M_0 + H)\,\mathbf{n}. \tag{2}$$

В (1), (2) $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}_0$ — намагниченность в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t и намагниченность насыщения соответственно; $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали вдоль ОЛН; α и β — константы обмена и анизотропии (случай $\beta > 0$ соответствует ферромагнетику типа «легкая ось»); γ — гиромагнитное отношение; δ характеризует затухание в форме Гильберта; Δ оператор Лапласа. Кроме того, здесь и ниже нижний правый индекс обозначает производную по соответствующей переменной.

Полагая $\mathbf{M}=\mathbf{M}(\mathbf{r}, \eta, t)$, уравнение (1) можно привести к виду

$$\psi_{t'} = i\{-\Delta_{\mathbf{R}}\psi(1-|\psi|^2)^{1/2} + \psi\Delta_{\mathbf{R}}[(1-|\psi|^2)^{1/2}]\} +$$
$$+ i\delta\{\psi_{t'}(1-|\psi|^2)^{1/2} - \psi[(1-|\psi|^2)^{1/2}]_{t'} + ih\psi(1-|\psi|^2)^{1/2}\}, \tag{3}$$

где

$$t' = \omega_0 t, \quad \mathbf{R} = \frac{r}{l_0}, \quad h = \frac{\gamma H}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \gamma\beta M_0, \quad l_0 = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/2}, \quad \frac{\partial}{\partial R} = l_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}},$$

$$\psi = \frac{M_+}{M_0}\exp\left\{i\left[t' + \frac{\gamma}{\omega_0}\right]\right\}\int_0^{t'/\omega_0} H\left(\frac{\tau}{\omega_0}\right)d\tau, \quad M_+ = M_x + iM_y. \tag{4}$$

При малых отклонениях намагниченности от основного состояния ($|\psi| \ll 1$), сохраняя главные нелинейные члены, в первом порядке по затуханию получаем

$$i\psi_{t'} - \Delta_{\mathbf{R}}\psi - \frac{1}{2}\psi|\psi|^2 = i\delta\left[\Delta_{\mathbf{R}}\psi + \frac{1}{2}\psi|\psi|^2 - (1+h)\psi\right]. \tag{5}$$

Более строго вывод уравнения (5) можно провести методом многомасштабных разложений [6], используя разложение $M_+ = \varepsilon_0 M_0 \psi(\varepsilon x, \varepsilon y, t', \varepsilon^2 t') + \ldots$. Вращающиеся спиральные волны подробно изучены в реакционно-диффузионных системах [6, 7], где они являются одной из основных пространственно-временных структур. Уравнение (5) отличается от рассмотренных в химической кинетике тем, что является в главном приближении не диффузионным, а эволюционным (из-за наличия множителя i перед $\psi_{t'}$). Следуя [7, 8], удобно ввести вместо пространственных переменных x, y «спиральные» переменные [1] $r=(x^2+y^2)^{1/2}$ и $\eta=\omega t+m\varphi-S(r)$ ($\varphi=\operatorname{arctg}(y/x)$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$). Переменная η зависит от параметра ω, $m=\pm 1, \pm 2\ldots$, вид функции $S(r)$ будет уточнен ниже. В новых переменных лапласиан в (5) принимает следующий вид:

$$\Delta_{\mathbf{R}}\psi = \psi_{RR} + \frac{\psi_R}{R} - 2\psi_{\eta R}S_R + \left[(S_R)^2 + \left(\frac{m}{R}\right)^2\right]\psi_{\eta\eta} - \left[S_{RR} + \frac{S_R}{R}\right]\psi_\eta. \tag{6}$$

Исследуем конфигурацию спиральных волн вдали от центра ($r=0$), полагая, что волна описывается архимедовой спиралью с волновым вектором $\mathbf{q}$. В пределе $r \gg l_0$ при $S(r) \to qr$ поле $\psi(r, \eta) \to \psi(\eta)$ ($\eta=\omega t+m\varphi-qr$) и уравнение (5) редуцируется в нелинейное уравнение Шредингера

$$i\psi_{t'} - \psi_{\eta'\eta'} - \frac{1}{2}\psi|\psi|^2 = i\delta\left[\psi_{\eta'\eta'} + \frac{1}{2}\psi|\psi|^2 - (1+h)\right]. \tag{7}$$

Здесь $\eta' = \eta/ql_0 = (\omega t + m\varphi - qr)/ql_0$.

Отметим, что линии уровня $\psi(\eta)=\text{const}$ будут являться m-рукими спиралями $qr=m\varphi+\omega t$, равномерно вращающимися с частотой ω около центра, если $\psi(\eta)$ — 2π-периодическая функция $\psi(\eta+2\pi)=\psi(\eta)$ [7].

Известно, что невозмущенное уравнение (7) точно интегрируемо [7] и его простейшее периодическое решение (решетка солитонов) имеет вид

$$\psi_0 = 2^{1/2}\Lambda k\,\operatorname{cn}(\Lambda\eta' + C, k)\exp\left[i\left(\frac{\Omega}{2}\eta' + Bt' + C\right)\right], \tag{8}$$

---

[1] Мы ограничиваемся рассмотрением только вращающихся спиралей.

где cn — эллиптический косинус; Λ, B, C, Ω и модуль k — постоянные. Учет периодичности ψ для амплитуды и фазы дает

$$\Lambda=\frac{2Kql_0}{\pi},\quad \Omega=\frac{\omega}{\omega_0 ql_0}=2nql_0=\frac{\pi n\Lambda}{K},\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots, \tag{9}$$

где K (k) — полный эллиптический интеграл первого рода. Подставляя (8) с учетом (9) в (7), получаем

$$B=\Lambda^2\left[1-2k^2-\left(\frac{\pi n}{2K}\right)^2\right]. \tag{10}$$

Окончательно ψ_0 выражается только через две постоянные Λ и k

$$\psi_0=A\exp(iD),\quad A=G\operatorname{cn}(\Lambda\eta',\ k),\quad G=2\Lambda k, \tag{11}$$

$$D=\frac{\pi n\Lambda\eta'}{2K}+\Lambda^2\left[1-2k^2-\left(\frac{\pi n}{2K}\right)^2\right]t'. \tag{12}$$

Поскольку период эллиптического косинуса равен $4K$, из (11), (12), (9) следует, что значения амплитуды ($\sim M_+$) и фазы ψ_0 будут постоянными на архимедовых спиралях, вращающихся с квантованной угловой частотой ω. Шаг спирали равен $d=2\pi/q$. Для типичных значений $\alpha\cong10^{-8}$ см^2, $\beta\cong\cong10^3$, $M_0\cong10$ Э имеем $l_0\cong3\cdot10^{-5}$ см. Если шаг спирали составляет $d\cong\cong10^{-2}$ см, то для частоты вращения $\nu=\omega/2\pi$ из (9) получаем (при $n=1$) $\nu\cong10^4$.

Поскольку решение (11), (12) характеризуется двумя параметрами, достаточно исследовать эволюцию двух интегралов движения, в качестве которых мы выберем энергию I_2 и отклонение z-компоненты намагниченности от номинальной

$$I_0=\int\limits_0^{4K/\Lambda}|\psi|^2d\eta'=16\Lambda\left(E-k'^2K\right), \tag{13}$$

$$I_2=\int\limits_0^{4K/\Lambda}[|\psi|^4-4|\psi'|^2]d\eta'=-4\Lambda^2I_0\left[1-2k^2+3\left(\frac{\pi n}{2K}\right)^2\right]-\frac{64}{3}\Lambda^3k^2k'^2K, \tag{14}$$

где E (k) — полный эллиптический интеграл второго рода. Если ψ удовлетворяет возмущенному уравнению (7), можно вычислить производные по времени от I_0 и I_2 (13), (14) (считаем $h=\mathrm{const}$)

$$I_{0t'}=-2\delta\int\limits_0^{4K/\Lambda}d\eta'\left[|\psi_{\eta'}|^2+(1+h)|\psi|^2-\frac{1}{2}|\psi|^4\right], \tag{15}$$

$$I_{2t'}=4\delta\int\limits_0^{4K/\Lambda}d\eta'\,[\mathrm{Re}\,|\psi_{\eta'}|^2\psi^*\psi_{\eta'\eta'}+2|\psi_{\eta'\eta'}|^2+(1+h)(2|\psi_{\eta'}|^2-|\psi|^4)+$$

$$+\left[\frac{1}{2}|\psi|^6-2|\psi|^2|\psi_{\eta'}|^2-\mathrm{Re}\,(\psi\psi^*_{\eta'})^2\right]. \tag{16}$$

Подставляя решение (11), где параметры Λ и k предполагаются зависящими от времени, в (15), (16), получаем

$$I_{0t'}=8\delta\Lambda^2I_0\left\{(1+h)+\Lambda^2\left[1-2k^2+\left(\frac{\pi n}{2K}\right)^2\right]\right\}, \tag{17}$$

$$I_{2t'}=8\delta\Lambda^2I_0\left\{(1+h)\left[1-2k^2+\left(\frac{\pi n}{2K}\right)^2\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\Lambda^2\left[(1-2k^2)^2-2(1-2K^2)\left(\frac{\pi n}{2K}\right)^2-\left(\frac{\pi n}{2K}\right)^4\right]\right\}+$$

$$+\frac{1}{15}(4\Lambda)^5\left(\frac{\pi n}{2K}\right)^2\left[\frac{1}{16\Lambda k^2}(1-k^2+k^4)I_0-\frac{1}{2}(1-2k^2)k'^2K\right]+$$

$$+\frac{8}{15}(2\Lambda)^5\left(\frac{\pi n}{2K}\right)^2\left[\frac{1}{16\Lambda k^2}(10-40k^2+40k^4)I_0-(3-14k^2+16k^4)k'^2K\right]. \tag{18}$$

Анализ (17), (18) может быть упрощен в предельных случаях малых $k \ll 1$ и k, близких к единице ($k'=(1-k^2)^{1/2} \ll 1$). Имеющийся опыт расчета распределений намагниченности показывает, что случай $k \ll 1$ соответствует достаточно тонким пленкам с толщиной L порядка ширины доменной стенки l_0. Случай k порядка единицы ($k' \ll 1$) имеет место при $L \gg l_0$. В этом плане наблюдения [5] отвечают ситуации $k' \ll 1$.

Для $k \ll 1$ из (15)—(18) получаем

$$\Lambda = \Lambda_0 \left[1 + \frac{2\delta n^2 \Lambda_0^2 t'}{n^2+1}\right]^{-1/2}, \tag{19}$$

$$k = k_0 \exp\left[-\delta(1+h)t'\right]\left[1 + \frac{2\delta n^2 \Lambda_0^2 t'}{n^2+1}\right]^{-(2n^4+3n^2+2)/4} \tag{20}$$

(Λ_0 и k_0 — значения Λ и k при $t=0$). Амплитуда G спиральных волн, согласно (11), меняется как Λk. Из (19), (20) видно, что при $h < -1$ амплитуда может возрастать; модуль k при этом также возрастает. Отсюда следует, что если внешнее поле меньше поля анизотропии ($|h| < 1$), амплитуда спиральных волн затухает (время жизни $\sim[\delta(1+h)]^{-1}$), а шаг спирали $d=2\pi/q=4Kl_0/\Lambda$ увеличивается. Однако в случае сильных $h < -1$ амплитуда может возрастать, а шаг спирали уменьшаться.

При $k' \ll 1$ аналогично находим

$$\Lambda = \Lambda_0 \exp\left[-2\delta(1+h)t'\right], \quad k = \{1-(1-k_0^2)\exp\left[-\delta(1+h)t'\right]\}^{1/2}. \tag{21}$$

Из (21) видно, что зависимость амплитуды от времени для этого случая

$$G = 2\Lambda k \cong 2\Lambda_0 \exp\left[-2\delta(1+h)t'\right], \tag{22}$$

а модуль k при $h < -1$ медленно падает. Такое поведение величины k со временем (рост при малых k и уменьшение при k порядка единицы) позволяет предположить, что при некотором значении k может произойти стабилизация спиральных волн, а также надеяться, что при отказе от условия малости амплитуды для полного УЛЛ также имеются устойчивые решения типа спиралей.

Рассмотрим более подробно случай $k' \ll 1$. Пусть внешнее поле подается в виде прямоугольных импульсов с амплитудой $H=-\omega_0 h_0/\gamma < 0$ длительностью τ/ω_0, с промежутками между импульсами T/ω_0. Нетрудно показать, что тогда при $h_0=1+T/\tau$ энергия I_2 периодична: $I_2(t=0) = I_2(t=(T+\tau)/\omega_0)$. При этом амплитуда спиральных волн, как следует из (22), возвращается за время $(T+\tau)/\omega_0$ к своему начальному значению.

Таким образом, мы показали принципиальную возможность существования устойчивых спиральных волн в модели одноосного ферромагнетика. Стабилизация спиральной структуры может быть осуществлена подбором конфигурации переменного поля.

Список литературы

[1] Малоземов А., Слонзуски Дж. Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами. М.: Мир, 1982. 382 с.

[2] Горчаков В. С., Дедух Л. М., Кабанов Ю. П., Никитенко Л. И. // ЖЭТФ. 1982. Т. 82. № 6. С. 2007—2019.

[3] Драгошанский Ю. Н., Хан Е. Б., Зайкова В. А. // ФММ. 1975. Т. 39. С. 289—294.

[4] Зайкова В. А., Филиппов Б. Н., Шур Я. С. // Структура и свойства электротехнической стали. Труды ИФМ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1977. В. 33. С. 4—16.

[5] Кандаурова Г. С., Свидерский А. Э. // ЖЭТФ. 1990. Т. 97. № 4. С. 1218—1230.

[6] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.

[7] Koga S. // Progr. Theor. Phys. 1982. V. 67. P. 164—178.

[8] Greenberg J. M. // SIAM J. Appl. Math. 1976. V. 30. P. 199—207.

Институт физики металлов
СО АН СССР
Свердловск

Поступило в Редакцию
4 февраля 1991 г.