

© 1991

## ОПТИЧЕСКИЕ САМОПУЛЬСАЦИИ ЭКСИТОНОВ В ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ КВАНТОВЫХ ЯМАХ

*А. И. Бобрышева, В. А. Залож, А. Х. Ротару*

Впервые показана принципиальная возможность возникновения нелинейных периодических и турбулентных оптических самопульсаций экситонов в режиме лазерной генерации в квантовых ямах. Динамика когерентных экситонов и фотонов при этом описывается обобщенной системой дифференциальных уравнений Лоренца. Показано, что в зависимости от параметров уравнений в системе возможны как регулярные, так и стохастические самопульсации. Предсказаны метастабильные, характеризующиеся определенным временем жизни, оптические самопульсации. Проведен численный эксперимент.

Лазер является одним из наиболее ярких примеров самоорганизации систем, далеких от состояния термодинамического равновесия. Современный этап развития теории лазеров тесно связан с интенсивным и плодотворным развитием теории неравновесных фазовых переходов, теории динамических систем и широким применением численного эксперимента.

Теория лазера, как правило, развивается на основе модели двухуровневых атомов. На этом пути удалось объяснить такие хорошо известные эффекты, как стационарная и периодическая генерация лазерного излучения, генерация ультракоротких импульсов, самопульсации и др. Одним из наиболее неожиданных и существенных результатов современной физики лазеров являются предсказание и обнаружение детерминированного динамического хаоса стимулированного излучения. Этот хаос является внутренним свойством системы, и его появление не обусловлено введением случайных функций в начальных условиях или действием внешних случайных сил. Хакен и Ораевский [1, 2] показали, что система уравнений Максвелла—Блоха гомологична системе уравнений Лоренца, которая помимо обычных аттракторов обладает особыми притягивающими множествами в фазовом пространстве — странными аттракторами, наличие которых свидетельствует о динамической стохастичности в диссипативных системах. В настоящее время возникновению динамического хаоса в оптике в модели двухуровневых атомов посвящено большое количество работ [3-8].

Изучение этих явлений в системе экситонов и биэкситонов началось сравнительно недавно. Так, в [9-12] нами предсказана принципиальная возможность возникновения динамического хаоса в области частот экситонного и экситон-биэкситонного переходов, где проявляются гигантские оптические нелинейности. Последнее обстоятельство приводит к тому, что оптическая самоорганизация на длинноволновом краю собственного поглощения кристалла проявляется наиболее ярко.

В последнее время получены принципиально новые полупроводниковые микроструктуры — двумерные (2D) размерно-квантованные слои, (1D) нити и (0D) микрокристаллиты. Они являются уникальными системами для изучения явления размерного квантования, физики многих частиц и представляют интерес для создания новых электронных приборов. Наиболее хорошо разработана технология получения и изучены физиче-

ские свойства полупроводников с квантовыми ямами (КЯ) GaAs/AlGaAs. Эксперименты по оптическому поглощению и люминесценции доказали существование уровней размерного квантования для электронов и дырок [13]; обнаружены полосы поглощения и люминесценции экситонов, биэкситонов [14-16], диэлектрической экситонной жидкости и электронно-дырочной плазмы [17].

Локализация электронов и дырок в одном двумерном слое приводит к увеличению энергии связи экситонов и биэкситонов, в результате чего полосы поглощения экситонов обнаружены даже при комнатной температуре [18].

Гигантские нелинейности, малые времена релаксации квазичастиц и существование экситонов и биэкситонов при высоких температурах в КЯ позволяют надеяться на развитие экситоники и биэкситоники и их использование при создании новых приборов оптоэлектроники и логических элементов для быстродействующей оптической вычислительной машины. Кроме того, представляет интерес предсказание новых кооперативных эффектов в полупроводниковых КЯ с участием экситонов и биэкситонов.

В данной работе впервые построена теория инфракрасной лазерной генерации и предсказаны оптические самопульсации лазерного излучения при межэкситонных переходах в полупроводниковых КЯ. Вычислена константа оптической конверсии между двумя экситонными уровнями в полупроводниковых КЯ. Показано, что динамика когерентных экситонов и фотонов описывается не системой уравнений Лоренца, а более общей системой дифференциальных уравнений. Показано, что в зависимости от величины внешней накачки и соотношения между затуханиями поля и соответствующих экситонных уровней в системе возможны различные режимы самопульсаций. Найдены значения параметров, при которых в системе может происходить стационарная и нестационарная лазерная генерация. При определенных значениях параметров в системе возможно образование сложных нелинейных временных структур.

## 1. Оптические переходы между экситонными состояниями в квантовых ямах

Ограничимся случаем многослойных структур, где как электроны, так и дырки локализованы в слое материала с меньшей запрещенной зоной, например GaAs/AlGaAs. Воспользуемся моделью отдельной КЯ с бесконечно высоким потенциальным барьером, которая оправдана в случае достаточно большой толщины  $d_b \sim 100 \text{ \AA}$  барьера. При малой толщине  $d_w \sim 100 \text{ \AA}$  КЯ в GaAs существуют уровни размерного квантования электрона и две системы уровней размерного квантования дырок тяжелой  $HHl$  и легкой  $LHl$ ,  $l$  — номер уровня размерного квантования.

Волновые функции электронов (дырок) факторизуются

$$\Psi_i(\mathbf{k}_i) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_i} \Phi_{\Gamma_{\mathbf{k}_i}}(\mathbf{R}_i) W_i(z_i), \quad i = e, h,$$

$$W_l(z_i) = \sqrt{2/d} \sin(l\pi z_i/d), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad R = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad (1)$$

$\Phi_{\Gamma_{\mathbf{k}}}(\mathbf{R}_i)$  — блоховская волновая функция. В точке  $\mathbf{k}=0$  зоны Бриллюэна волновая функция электрона преобразуется по неприводимому представлению  $\Gamma_6^-$ , тяжелой дырки  $\Gamma_7^*$ , легкой дырки  $\Gamma_6^*$ .

Волновые функции экситона  $HH$ , содержащего тяжелую дырку, и экситона  $LH$ , содержащего легкую дырку, представим в виде

$$\Psi_{HH}^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\mathbf{k}_e, \mathbf{k}_h} \varphi_{\mathbf{k}_e, \mathbf{k}_h}^{\mathbf{k}} [a_{l_2}^+ b_{l_1}^+ - a_{l_1}^+ b_{l_2}^+] |0\rangle,$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{HH}^y &= \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{\mathbf{k}_e, \mathbf{k}_h} \varphi_{\mathbf{k}_e, \mathbf{k}_h}^{\mathbf{k}} [a_{l_{s_1}}^+ b_{l_{t_1}}^+ + a_{l_{s_2}}^+ b_{l_{t_2}}^+] |0\rangle, \\
\Psi_{LH}^x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\mathbf{k}_e, \mathbf{k}_h} \varphi_{\mathbf{k}_e, \mathbf{k}_h}^{\mathbf{k}} [a_{l_{s_1}}^+ b_{l_{r_2}} - a_{l_{s_2}}^+ b_{l_{r_1}}^+] |0\rangle, \\
\Psi_{LH}^y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\mathbf{k}_e, \mathbf{k}_h} \varphi_{\mathbf{k}_e, \mathbf{k}_h}^{\mathbf{k}} [a_{l_{s_2}}^+ b_{l_{r_1}}^+ + a_{l_{s_1}}^+ b_{l_{r_2}}^+] |0\rangle,
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь  $a_{l_s}^+$  ( $b_{l_s}^+$ ) — оператор рождения электрона (дырки) с двумерным волновым вектором  $\mathbf{k}_e$  ( $\mathbf{k}_h$ ) на уровне размерного квантования  $l$ ;  $s$ ;  $t$ ;  $r$  — сборные индексы  $s_j = \mathbf{k}_e$ ,  $\Gamma_6^e$ ,  $j$ ;  $t_j = \mathbf{k}_h$ ,  $\Gamma_7^*$ ,  $j$ ;  $r_j = \mathbf{k}_h$ ,  $\Gamma_6^*$ ,  $j$ ;  $j = 1, 2$  — строка соответствующего неприводимого представления;  $\varphi_{\mathbf{k}_e, \mathbf{k}_h}^{\mathbf{k}}$  — Фурье-образ функции  $\varphi_{nm}$  относительного движения экситона

$$\varphi_{nm}(\bar{\rho}, \varphi) = \left[ \frac{2(n-|m|)!}{\pi a_0^2 (2n+1)^3 (n+|m|)!} \right]^{1/2} e^{-\bar{\rho}/2} \bar{\rho}^{|m|} e^{im\varphi} L_{n-|m|}^{|m|}(\bar{\rho}), \tag{3}$$

где  $\bar{\rho} = 2\rho/a_0$  ( $2n+1$ ),  $a_0 = \hbar^2 \varepsilon_0 / 2\mu_{\perp} e^2$  — радиус двумерного экситона,  $n$  и  $m$  — главное и магнитное квантовые числа соответственно,  $\mu_{\perp}$  — приведенная масса электрона  $m_e$  и дырки  $m_{h\perp}$  в плоскости  $x, y$ .

Правило отбора  $\Delta l = 0$  приводит к тому, что запрещены переходы между двумя экситонными состояниями с различными номерами уровней размерного квантования, например  $HHl_1 \rightarrow HHl_2$ . Запрещены и переходы между  $LHl \rightarrow HHl$  из-за ортогональности волновых функций легких и тяжелых дырок. Поэтому могут иметь место только внутрисерийные экситонные переходы.

Гамильтониан взаимодействия электронов и дырок со светом, ответственный за данный процесс, имеет вид

$$\begin{aligned}
H_{\text{int}} &= -\frac{i e \hbar}{m_0} \left( \frac{2\pi \hbar}{s_0 d} \right)^{1/2} \sum_{\mathbf{q}_i} \left( \frac{1}{\omega_{\mathbf{q}_i} \varepsilon_{\infty}} \right)^{1/2} \left\{ \sum_{\mathbf{k}_e, \mathbf{k}'_e, j} \langle \Psi_l(\mathbf{k}_e) | e^{i\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{r}_e}(\mathbf{e}_{\mathbf{q}_i}, \mathbf{V}) | \Psi_l(\mathbf{k}'_e) \rangle \times \right. \\
&\times a_{l_{s_j}}^+ a_{l_{s'_j}}^+ + \left. \sum_{\mathbf{k}_h, \mathbf{k}'_h, j} \langle \Psi_l(\mathbf{k}_h) | e^{i\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{r}_h}(\mathbf{e}_{\mathbf{q}_i}, \mathbf{V}) \Psi_l(\mathbf{k}'_h) \rangle b_{l_{\bar{t}_j}^+}^+ b_{l_{\bar{t}'_j}^+}^+ \right\} c_{\mathbf{q}_i}. \tag{4}
\end{aligned}$$

В (4) матричные элементы построены на функциях (1);  $s, t, r$  — набор индексов, указанный выше;  $s', t', r'$  означает замену  $\mathbf{k}_i$  на  $\mathbf{k}'_i$ ;  $\bar{t}, \bar{r}$  означает замену  $\mathbf{k}_h$  на  $-\mathbf{k}_h$ ;  $c_{\mathbf{q}_i}$  — оператор уничтожения фотонов. Матричный элемент перехода между состояниями  $n, m=0, 0$  и  $n, m=1, 1$  отличен от нуля при поляризации света в плоскости слоя и для  $HH$  имеет вид

$$M_{HH} = \frac{i}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{N_q} \left( \frac{2\pi \hbar}{s_0 d} \right)^{1/2} \frac{1}{(\omega_{\mathbf{q}_i} \varepsilon_{\infty})^{1/2}} \frac{e \hbar}{\mu_{\perp} a_0}, \tag{5}$$

а в случае  $LH$  экситона  $M_{LH} = 1/3 M_{HH}$ .

## 2. Модельный гамильтониан задачи.

Обобщенные лазерные уравнения Лоренца

Ниже мы рассмотрим теорию лазерной генерации и условия возникновения оптических самопульсаций при экситон-экситонных переходах в полупроводниковых КЯ. Выделим два экситонных состояния с относительным движением  $n, m = (0, 0)$ ;  $(1, 1)$ , связанных с уровнями размерного квантования электрона и дырки  $l_e = l_h = 1$  (рис. 1). Система состоит из электромагнитного поля, активного экситонного вещества, внешней накачки и термостата, вызывающего релаксационные процессы. Простоты ради, по аналогии с теорией лазера в модели двухуровневых атомов [2, 19] ограничимся одномодовым приближением. Когерентное взаимодействие полупроводника с электромагнитным излучением, вызывающим переходы между экситонными уровнями, обнаруживает сходство с мо-

делью двухуровневых атомов. Однако имеется и существенное отличие. В частности, экситоны являются переходными возбуждениями кристалла и характеризуются определенными временами жизни. Это вызывает необходимость предварительно подготовить систему экситонов, тогда как система двухуровневых атомов в основном состоянии существует сколь угодно долго. Благодаря этому, как будет показано ниже, динамика лазерных траекторий описывается обобщенной системой Лоренца в четырехмерном фазовом пространстве, а не в трехмерном, как это имеет место в двухуровневой модели.

Основна рассмотрена лазерной генерации при экситон-экситонной конверсии — это гамильтониан однородно распределенных в пространстве когерентных в смысле Боголюбова экситонов и фотонов. Предполагается, что амплитуды квазичастиц характеризуются определенной фазой, волновым вектором и макроскопическим заполнением одночастичного состояния

$$\mathcal{H} = \hbar\omega_1 a_1^+ a_1 + \hbar\omega_2 a_2^+ a_2 + \hbar\omega_q c_q^+ c_q + ig\hbar (a_2^+ a_1 c_q - a_1^+ a_2 c_q^+), \quad (6)$$

где  $a_1^+$ ,  $a_2^+$  и  $c_q^+$  — бозе-операторы рождения экситонов на уровнях 1 и 2 и фотонов с энергиями  $\hbar\omega_1$ ,  $\hbar\omega_2$  и  $\hbar\omega_q$  соответственно;  $g$  — константа экситон-экситонной конверсии в полупроводниковых КЯ

$$g = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{s_0}{N_q}} |M|, \quad (7)$$

где  $M$  определяется выражением (5);  $s_0$  — площадь двумерного слоя КЯ. Здесь и далее индексы волновых векторов опускаем.

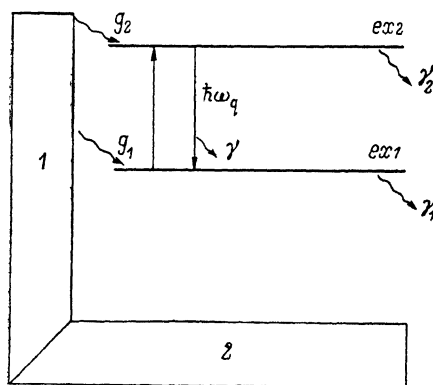


Рис. 1.

1 — возбужденное состояние кристалла, 2 — основное состояние кристалла

Гамильтонианы, обеспечивающие внешнюю накачку и затухание, мы учтем на определенном этапе феноменологически, как и в теории лазеров в модели двухуровневых атомов [2, 19]. Отметим только, что они могут быть учтены строго в рамках квантовой теории затуханий и флуктуаций лазера с использованием управляющего уравнения Фоккера—Планка, потоковая часть которого определяет динамику классических лазерных траекторий. Это приводит к существенному усложнению задачи, однако не меняет конечную систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих динамическую эволюцию системы. Это показано в нашей работе [20], где изучалась двухфотонная лазерная генерация при экситон-бикситонной конверсии.

Вводя в рассмотрение разность населенностей  $S = n_2 - n_1 = a_2^+ a_2 - a_1^+ a_1$ , полное число экситонов  $F = n_2 + n_1$  и поляризацию экситонного вещества  $Q = a_1^+ a_2$ , с помощью (6) получаем следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих динамику системы:

$$\begin{aligned} dc/dt &= -i\omega_q c - gQ - \gamma c, \\ dQ/dt &= -i(\omega_2 - \omega_1) Q - gSc - (\gamma_1 + \gamma_2) Q, \\ dS/dt &= -(\gamma_1 + \gamma_2) S + (\gamma_1 - \gamma_2) F + 2g(Qc^+ + Q^+c) + g_2 - g_1, \\ dF/dt &= -(\gamma_1 + \gamma_2) F + (\gamma_1 - \gamma_2) S + g_2 + g_1, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\gamma$ ,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — константы затухания фотонов и экситонных уровней;  $g_1$  и  $g_2$  — внешние накачки, поставляющие собой экситоны в соответствующие уровни. Эти величины введены в уравнения (8) феноменологи-

чески. Из (8), в частности, следует, что в отсутствие внешних накачек полное число экситонов стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . В этом состоит существенное отличие нашей задачи от случая двухуровневых атомов, где их полное число является интегралом движения.

Амплитуду фотонов и поляризацию среды представим в виде

$$c = \tilde{c} \exp(-i\omega_q t), \quad Q = \tilde{Q} \exp(-i\omega_q t). \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8), в случае точного резонанса  $\omega_q = \omega_2 - \omega_1$  получаем, что концентрация стационарно генерируемых когерентных фотонов определяется выражением

$$n_{st} = |\tilde{c}_{st}|^2 = \frac{g_2 \gamma_1 - g_1 \gamma_2}{2\gamma(\gamma_1 + \gamma_2)} - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{g^2}. \quad (10)$$

Из (10) следует, что для возникновения лазерной генерации необходимо выполнение условия

$$R = \frac{g^2 (g_2 \gamma_1 - g_1 \gamma_2)}{2\gamma \gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1 + \gamma_2)} > 1, \quad (11)$$

где параметр  $R$  играет роль эффективной накачки. Нетрудно видеть, что при  $R < 1$  система уравнений (8) допускает одно стационарное состояние, соответствующее отсутствию лазерной генерации экситонами.

Система уравнений (8) относится к классу систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих открытые динамические системы. Для таких систем возможно несколько стационарных решений. Однако в зависимости от соотношения между параметрами не все стационарные состояния могут быть устойчивыми.

В самом общем случае величины  $\tilde{c}$  и  $\tilde{Q}$  являются комплексными  $\tilde{c} = \tilde{c}_1 + i\tilde{c}_2$ ,  $\tilde{Q} = \tilde{Q}_1 + i\tilde{Q}_2$ . Поэтому динамика когерентных экситонов и фотонов описывается в шестимерном фазовом пространстве, а не в пятимерном, как это имеет место в модели двухуровневых атомов. Нетрудно видеть, что разность фаз между амплитудой фотонного поля и поляризацией стремится к нулю, что приводит к редукции размерности фазового пространства.

После введения безразмерных величин

$$\sigma = \frac{\gamma}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \alpha = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \beta = \frac{g_2 - g_1}{g_2 + g_1}, \quad P = R \frac{1 + \alpha\beta}{\alpha + \beta}, \quad c_* = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2g},$$

$$Q_* = -\frac{\gamma(\gamma_1 + \gamma_2)}{2g^2}, \quad S_* = \frac{\gamma(\gamma_1 + \gamma_2)}{g^2}, \quad F_* = \frac{g_1 + g_2}{\gamma_1 + \gamma_2} + \frac{\gamma(\gamma_1 + \gamma_2)}{g^2}, \quad (12)$$

замены переменных

$$x = \frac{\tilde{c}_1}{c_*}, \quad y = \frac{\tilde{Q}_1}{Q_*}, \quad z = R - \frac{S}{S_*}, \quad f = \frac{F}{F_*}, \quad \tau = (\gamma_1 + \gamma_2)t \quad (13)$$

и несложных преобразований система уравнений (8) в условиях точного резонанса принимает вид

$$\begin{aligned} dx/d\tau &= -\sigma x + \sigma y, \\ dy/d\tau &= -y + (R - z)x, \\ dz/d\tau &= -z + \sigma y - \alpha P(f - 1), \\ df/d\tau &= -f + 1 - (\alpha/P)z. \end{aligned} \quad (14)$$

Эти уравнения описывают динамическую эволюцию когерентных квазичастиц в полупроводниковых КЯ в условиях действия внешних накачек и затуханий. Они являются обобщенным аналогом знаменитой системы уравнений Лоренца на случай систем двухуровневого типа, которые требуют их предварительной подготовки. Они переходят в систему уравнений Лоренца лишь при определенных соотношениях между вели-

гиной внешней накачки и константами затухания квазичастиц. Действительно, в случае  $\Upsilon_1 = \Upsilon_2$  и  $f = f_0 = \text{const}$  уравнения (14) переходят в систему Лоренца с константой  $b=1$ . Этот частный случай был изучен нами в [11, 12], где рассматривался оптический хаос в области  $M$ -полосы люминесценции полупроводника.

### 3. Образование временных структур

Система уравнений (14) в зависимости от параметра  $R$  может иметь одну или три стационарные критические точки

$$\begin{aligned} C_0(x, y, z, f) &= C_0(0, 0, 0, 1), \\ C_+(x, y, z, f) &= C_+(\sqrt{R-1}, \sqrt{R-1}, 1, 1 + \alpha/P), \\ C_-(x, y, z, f) &= C_-(-\sqrt{R-1}, -\sqrt{R-1}, 1, 1 + \alpha/P). \end{aligned}$$

Точка  $C_0$  соответствует безызлучательному состоянию системы. Точки  $C_+$  и  $C_-$  соответствуют двум физическим стационарным состояниям лазерной генерации на экситонных уровнях в КЯ, которые имеют противоположные фазы, но одинаковую интенсивность лазерного излучения. Они появляются в случае, если эффективная накачка  $R > 1$ .

Анализ решений системы уравнений (14) связан с изучением их устойчивости. Изменения во времени малых возмущений  $x_0(\tau)$ ,  $y_0(\tau)$ ,  $z_0(\tau)$  и  $f_0(\tau)$  описываются линеаризованными уравнениями

$$\begin{bmatrix} dx_0/d\tau \\ dy_0/d\tau \\ dz_0/d\tau \\ df_0/d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 & 0 \\ (R-z) & -1 & -x & 0 \\ y & x & -1 & -\alpha P \\ 0 & 0 & -\alpha P & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ f_0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Элементы якобиана (15) зависят от времени, и поэтому общее аналитическое решение найти очень трудно, кроме случая, когда рассматриваются состояния равновесия системы [21]. Из (15) следует, что четырехмерный фазовый объем системы уравнений стремится к нулю при  $\tau \rightarrow \infty$  с характерным временем  $(\sigma+3)^{-1}$ . Однако это не означает, что он стягивается в точку. Если стационарные решения неустойчивы, то аттракторами в фазовом пространстве могут быть либо предельный цикл, либо тор, либо странный аттрактор, что соответствует периодическим, квазипериодическим или стохастическим движениям системы соответственно.

Характеристические уравнения системы имеют вид:

$$[(\lambda + \sigma)(\lambda + 1) - R\sigma][(\lambda + 1)^2 - \alpha^2] = 0, \quad (16)$$

для точки  $C_0$  и

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0, \quad (17)$$

для точек  $C_+$  и  $C_-$ , где

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \quad a_1 = \sigma + 3, \quad a_2 = 2(\sigma + 1) + R(1 + \alpha^2) > 0, \\ a_3 &= [(2\sigma + 1)(R - 1) + \sigma + 1](1 + \alpha^2), \quad a_4 = 2\sigma(R - 1)(1 - \alpha^2). \end{aligned}$$

Корни уравнения (16) имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1/2[-(\sigma + 1) + \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(R - 1)}], \quad \lambda_3 = \alpha - 1, \\ \lambda_2 &= 1/2[-(\sigma + 1) - \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(R - 1)}], \quad \lambda_4 = -\alpha - 1. \end{aligned} \quad (18)$$

При  $0 < R < 1$  все они являются отрицательными и точка  $C_0$  — устойчивый узел. При  $R > 1$ ,  $\lambda_1 > 0$  и  $C_0$  становится неустойчивой. Однако при этом ( $R > 1$ ) появляется еще две критические точки  $C_+$  и  $C_-$ . Для

анализа их устойчивости применим критерий Рауса—Гурвица. Точки  $C_+$  и  $C_-$  будут устойчивыми, если определители диагональных миноров матрицы Гурвица положительны: 1)  $\Delta_1 = a_1 > 0$ , 2)  $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ , 3)  $\Delta_3 = a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_0 a_2^2 a_4 > 0$ , 4)  $\Delta_4 = a_4 \Delta_3 > 0$ . Нетрудно видеть, что при  $\sigma < 2$  стационарные решения  $C_+$  и  $C_-$  всегда устойчивы для всех значений эффективной накачки  $R > 1$ . Если  $\sigma > 2$ , то существует некоторое критическое значение параметра

$$R = R_{кр} = (B + \sqrt{B^2 + 4AC})/2A, \quad (19)$$

ниже которого  $1 < R < R_{кр}(\sigma, \alpha)$  точки  $C_+$  и  $C_-$  являются устойчивыми. В этом случае в системе возможна стационарная лазерная генерация.

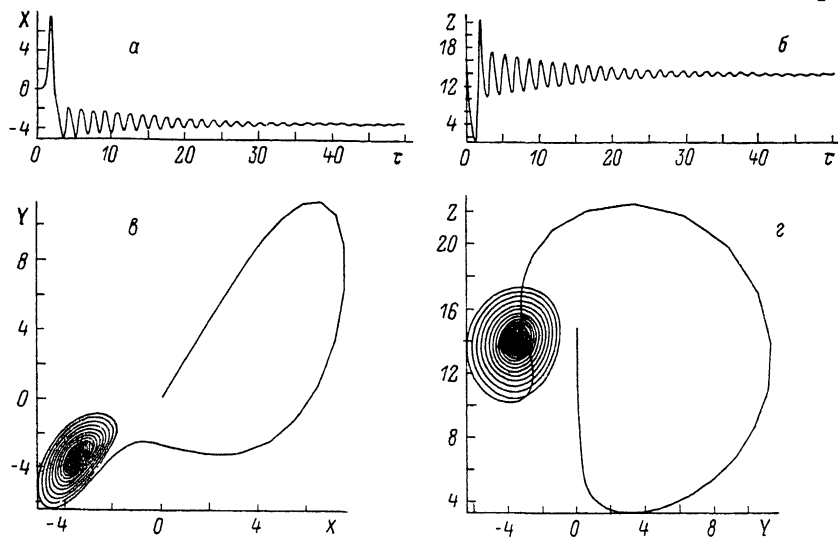


Рис. 2.

При  $R > R_{кр}$  точки  $C_+$  и  $C_-$  теряют свою устойчивость и в системе возможны сложные автомодуляционные колебания. Величины  $A, B, C$  определяются выражениями

$$A = (2\sigma + 1)(\sigma - 2)(1 - \alpha^2),$$

$$B = 2(\sigma + 3)[(2\sigma + 1)(\sigma + 1) - \sigma(\sigma + 3)] + \sigma(3\sigma - 1)(1 - \alpha^2),$$

$$C = \sigma[4(\sigma + 3) - \sigma(1 - \alpha^2)].$$

Таким образом, при  $\sigma > 2$  и  $R > R_{кр}$  все состояния равновесия неустойчивы, а любой малый объем фазового пространства стремится к нулю. В этом случае в системе возникают нелинейные самопульсации. Поскольку в настоящее время отсутствует стандартный алгоритм решения нелинейных дифференциальных уравнений общего вида, получение аналитических решений системы уравнений (14) является трудной задачей. В связи с этим нами проведено численное интегрирование вышеупомянутой системы. Схема интегрирования является неявной, относительная точность 0.001.

На рис. 2, а, б приведены зависимости величин  $X$  и  $Z$  от безразмерного времени  $\tau$  при  $R=20, \sigma=3, \alpha=-0.3$ . Как видно из этого рисунка, совершив несколько регулярных самопульсаций, система приходит к своему устойчивому стационарному состоянию спустя  $\tau \sim 20$  безразмерных единиц времени. Возникающие при этом метастабильные самопульсации имеют характерное время жизни, зависящее от параметров системы. На рис. 2, в, г приведены проекции траекторий в фазовом пространстве с координатными осями: поле—поляризация среды ( $X, Y$ ) и поле—ин-

версия. Видно, что в этом случае в фазовом пространстве возникает простой аттрактор — устойчивый фокус.

На рис. 3, *a—г* представлены динамическая эволюция и соответствующие фазовые портреты при  $R=25$ ,  $\sigma=3$ ,  $\alpha=-0.3$ , когда все стационарные

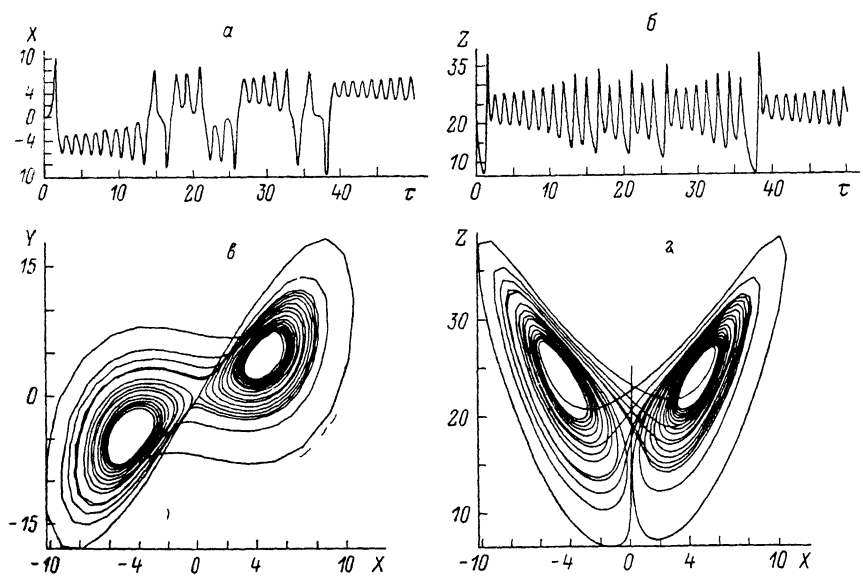


Рис. 3.

точки системы неустойчивы. При выполнении этих условий стационарный режим генерации сменяется сложным нерегулярным автомодуляционным процессом. В системе происходят постепенно нарастающие самопульсации

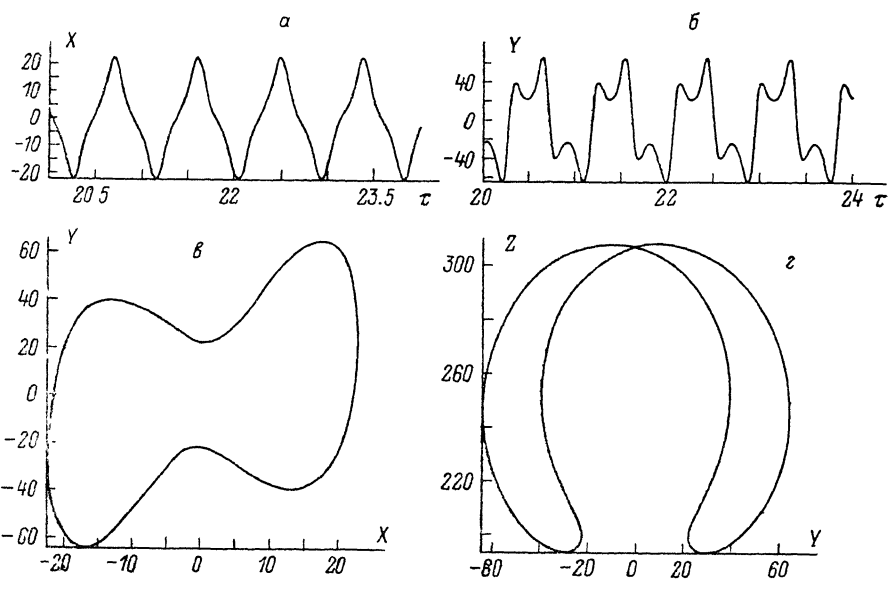


Рис. 4.

около состояния равновесия  $C_+$ , после чего происходит скачок в область состояния равновесия  $C_-$ , затем этот процесс хаотически повторяется. Все траектории в этом случае притягиваются к странному аттрактору и в системе возникает хаотические самопульсации.



Представляет интерес исследование самопульсаций при больших значениях внешней накачки  $R > R_{кр}$  и  $\sigma > 2$ . Один такой пример приведен на рис. 4,  $a-g$  при  $R=250$ ,  $\sigma=3$ ,  $\alpha=-0.3$ . В этом случае в системе возникают устойчивые периодические нелинейные колебания, период которых в приведенных единицах  $\tau \sim 1$ . Фазовая диаграмма при этом представляет собой предельный цикл в виде восьмерки.

Резюмируя результаты работы, отметим, что возникновение временных самопульсаций при межэкситонных переходах в полупроводниковых КЯ является ярким примером самоорганизации квазичастиц в конденсированных средах. Отметим, что аналогичные эффекты возможны и при биэкситон-экситонной конверсии в квантовых ямах.

#### С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] Haken H. // Phys. Lett. 1975. V. 53A. N 1. P. 77.
- [2] Ораевский А. Н. // Квант. электр. 1981. Т. 8. С. 130.
- [3] Bonifacio R., Lugiato L. A. // Lett. Nuovo Cimento. 1978. V. 21. P. 510.
- [4] Casagrande F., Lugiato L. A., Asquini M. L. // Opt. Commun. 1980. V. 32. P. 492.
- [5] Ikeda K., Akimoto P. // Phys. Rev. Lett. 1981. V. 48. P. 617.
- [6] Ikeda K., Daido H., Akimoto O. // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 709.
- [7] Narducci L. M., Sadiqy H., Lugiato L. A., Abraham N. B. // Opt. Commun. 1985. V. 55. P. 1370.
- [8] Ораевский Е. Н. // Тр. ФИАН СССР. 1986. Т. 171. С. 3.
- [9] Залож В. А., Москаленко С. А., Ротару А. Х. // ЖЭТФ. 1989. Т. 95. С. 601.
- [10] Москаленко С. А., Ротару А. Х., Залож В. А. // ФТТ. 1989. Т. 31. № 3. С. 265—268.
- [11] Rotaru A. H., Shibarshina G. D. // Phys. Lett. A. 1985. V. 109. P. 292.
- [12] Ротару А. Х. // ФТТ. 1986. Т. 28. № 8. С. 2492.
- [13] Devigle R., Wiegman W., Henry S. H. // Phys. Rev. Lett. 1974. V. 33. P. 827—830.
- [14] Miller S. T., Kleinman D. A., Gossard A. S., Munteanu O. // Phys. Rev. B. 1982. V. 25. N 10. P. 6545—6548.
- [15] Masselink W. T., Pearah P., Clem J. et al. // Phys. Rev. B. 1985. V. 32. N 12. P. 8027—8034.
- [16] Fu Q., Lee D., Mysyrowicz A., Nurmikko A. et al. // Phys. Rev. B. 1988. V. 37. P. 8791—8794.
- [17] Le H. Q., Lax V. // Phys. Rev. B. 1985. V. 32. N 2. P. 1419—1422.
- [18] Chemla D. S., Miller D. A. B. // Opt. Soc. Am. 1985. V. 2. N 7. P. 1155—1173.
- [19] Арекии Ф., Скалли М., Хакен Г., Вайдлих В. Квантовые флуктуации излучения лазера. М.: Мир, 1974.
- [20] Москаленко С. А., Ротару А. Х., Швера Ю. М. // ТМФ. 1988. Т. 75. С. 295.
- [21] Лоренц Э. Н. Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 88.

Институт прикладной физики  
АН МССР  
Кишинев

Поступило в Редакцию  
29 октября 1990 г.