УДК 534.222.2 : 530.1

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СОЛИТОНОВ В ОБЛАСТИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕГО ПОЛЯ

В. И. Сериков, С. В. Воронин

Рассматривается распространение солитонов скалярного поля упорядочения при наличии внешнего поля, сопряженного параметру порядка. Рассматриваются случаи переменного поля в виде уединенной волны и поля с постоянной составляющей, в том числе и статического поля. Определены условия, при которых могут существовать солитоны параметра порядка, и получены соотношения, определяющие амплитуды и скорости солитонов в области фазового перехода.

Уравнение Гинзбурга—Ландау, описывающее релаксацию скалярного поля упорядочения $\varphi(x, t)$ в области фазового перехода [1]

$$\dot{\varphi}(x, t) = -\Gamma \frac{\delta F}{\delta \varphi(x, t)}, \tag{1}$$

где Γ — кинетический коэффициент, F — свободная энергия, рассматриваемая как функционал от поля

$$F = \int \left[\frac{1}{2} a\varphi^2 + \frac{1}{4} b\varphi^4 + \frac{1}{2} c(\varphi_x)^2 - h\varphi\right] dx, \tag{2}$$

в отсутствие внешнего поля h, сопряженного параметру порядка φ, имеет решение в виде уединенных волн [2]. Аналогичные решения уравнение (1) имеет и при наличии полей упругих деформаций [3]. Представляет интерес изучение таких решений, если они имеются, при наличии внешнего поля h. В этой работе уравнение (1) и свободная энергия (2) исследуются в предположении пространственно-одномерного распределения параметра порядка φ, а нижние индексы обозначают дифференцирование по соответствующей переменной. Уравнение Гинзбурга—Ландау для рассматриваемого случая можно записать в форме [1]

$$\varphi_t + \Gamma(a\varphi + b\varphi^3 - c\varphi_{xx} - h) = 0. \tag{3}$$

Известно, что в статическом случае в отсутствие внешнего поля ($\varphi_t = 0$, $h = 0$) уравнение (3) имеет решение вида [4]

$$\varphi = \varphi_0 \operatorname{th}(x/\Delta), \tag{4}$$

где $\varphi_0 = (|a|/b)^{1/2}$, $\Delta = (2c/|a|)^{1/2}$. Это решение обычно интерпретируется как распределение параметра порядка в области доменной стенки. Для нестационарного случая можно искать решение аналогичного вида

$$\varphi = \varphi_0 \operatorname{th}[(x + vt)/\Delta], \tag{5}$$

но при наличии внешнего поля, которое имеет форму уединенной волны (солитона)

$$h = h_m \operatorname{sech}^2[(x + vt)/\Delta]. \tag{6}$$

Легко видеть, что скорость движения уединенных волн и амплитуда поля h_m оказываются связанными соотношением

$$h_m = \varphi_0 v/(\Gamma\Delta). \tag{7}$$

из которого следует, что при любой конечной скорости солитон поля исчезает в точке фазового перехода, определяемой равенством $a=\tilde{a}(T-T_c)=0$ (7). Рассмотрим далее более общий случай, когда сопряженное поле h содержит постоянную составляющую h_0, связанную со стационарным значением параметра порядка φ_0 обычным образом [1]

$$a\varphi_0 + b\varphi_0^3 - h_0 = 0. \tag{8}$$

Поле упорядочения φ и сопряженное поле h в этом случае представим в форме

$$\varphi = \varphi_0 + \tilde{\varphi}(x, t), \quad h = h_0 + \tilde{h}(x, t). \tag{9}$$

Уравнение Гинзбурга—Ландау с учетом соотношения (8) теперь можно записать в форме

$$\tilde{\varphi}_t + \Gamma\,[\tilde{a}\tilde{\varphi} + 3b\varphi_0\tilde{\varphi}^2 + b\tilde{\varphi}^3 - c\tilde{\varphi}_{xx} - \tilde{h}] = 0, \tag{10}$$

где $\tilde{a}=a+3b\varphi_0^2$. Решение уравнения (10) будем искать в виде

$$\tilde{\varphi} = \varphi_m\,[\operatorname{th}((x+vt)/\Delta) - 1], \quad \tilde{h} = h_m \operatorname{sech}^2((x+vt)/\Delta). \tag{11}$$

Параметры решения определяются из условий

$$\Delta^2 = \frac{2c}{b\varphi_m^2}, \quad \varphi_m^2 - \frac{3}{2}\varphi_0\varphi_m + \frac{\tilde{a}}{4b} = 0, \quad v = \frac{\Delta\Gamma}{\varphi_m}\left(\frac{\tilde{a}}{2}\varphi_m - b\varphi_m^3 + h_m\right). \tag{12}$$

Амплитуда волны параметра порядка φ_m, как видно из второго уравнения системы (12), определяется величиной φ_0 и, следовательно, зависит от поля h_0. Кроме того, из третьего уравнения системы (12) видно, что решение существует и при $h_m=0$, т. е. в случае статистического сопряженного поля ($h \equiv h_0$). Рассмотрим, следуя [1], случаи сильного $h \gg h_c$ и слабого $h \ll h_c$ полей ($h_c=|a|^{3/2}b^{-1/2}$).

Для поля $h_0=0$ ($a<0$) уравнение (8) имеет три решения $\varphi_0=\pm(|a|/b)^{1/2}$, $\varphi_0=0$. При $\varphi_0=0$ имеем в системе уравнений (12) ($\tilde{a}=a$)

$$\varphi_m^2 = |a|/(4b), \quad \Delta^2 = 8c/|a|, \quad v = (\Gamma\Delta/\varphi_m)(b\varphi_m^3 + h_m). \tag{13}$$

Последнее уравнение системы (13) показывает, что амплитуда

$$h_m = \varphi_m (v - \Gamma\Delta|a|/4)/(\Gamma\Delta), \tag{14}$$

при $\varphi_0=0$ ($a<0$) зависит от скорости солитона v, однако такое решение является неустойчивым в низкосимметричной фазе. При $\varphi_0=\pm(|a|/b)^{1/2}$ получаем $\tilde{a}=-2a$ и третье уравнение системы (12) принимает вид

$$\varphi_m^2 \mp \frac{3}{2}\varphi_m\sqrt{\frac{|a|}{b}} + \frac{|a|}{2b} = 0. \tag{15}$$

Условия неотрицательности дискриминанта для второго уравнения системы (12) выполняются, и решения имеют вид

$$\varphi_m = \left(\frac{3}{4} \mp \frac{1}{4}\right)\left(\frac{|a|}{b}\right)^{1/2} \tag{16}$$

для знака минус и

$$\varphi_m = \left(-\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\right)\left(\frac{|a|}{b}\right)^{1/2} \tag{17}$$

для знака плюс.

Таким образом, как видно из системы уравнений (12), при $h_0=0$ должны существовать четыре различных солитонных решения, отвечающих значениям $\varphi_m=\pm(|a|/(2b))^{1/2}$, $\varphi_m=\pm(|a|/b)^{1/2}$. Первый тип решений, отвечающих $\varphi_m^2=|a|/b$, исследован выше, а для второго типа решений

$$\Delta^2=2c/|a|, \tag{18}$$

зависимость амплитуды h_m от скорости определяется формулой, аналогичной (14).

Для поля $h_0\neq0$ при $a<0$ три вещественных решения уравнения (8) существуют для малых значений поля [1], меньших по модулю величины $\tilde h_c=2|a|^{3/2}/(3^{3/2}b^{1/2})$. Для таких значений параметра φ_0 требование неотрицательности дискриминанта во втором уравнении системы (12) приводит к условию $h_0\leqslant3\tilde h_c$, которое в силу наложенного выше ограничения $h<h_c$ должно выполняться. Следовательно, и в этом случае должна существовать система солитонов, определяемых для каждого значения φ_0 соответствующей парой значений φ_m. При больших значениях $h_0\gg h_c$, пренебрегая, как и в [1], первым членом уравнения (8), $\varphi_0=(h_0/b)^{1/3}$. Неотрицательность дискриминанта в уравнении для φ_m в этом случае приводит к условию

$$|a|\geqslant2h_0^{3/2}b^{-1/2}, \tag{19}$$

ограничивающему область существования солитонных решений в окрестности фазового перехода.

Выше точки фазового перехода при $a>0$ для малых величин поля $h_0\ll h_c$ уравнение (8) имеет лишь одно решение $\varphi_0\approx h_0/a$. Для таких значений параметра φ_0 второе уравнение системы (12) действительных решений не имеет и решений типа (11) для уравнения (1) не существует.

Список литературы

[1] Паташинский А. З., Покровский В. Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1982. 381 с.
[2] Мелькер А. И., Овидько И. А. // ФТТ. 1985. Т. 27. № 2. С. 594—597.
[3] Сериков В. И., Воронин С. В. // ФТТ. 1988. Т. 30. № 9. С. 2884—2885.
[4] Струков Б. А., Леванюк А. П. Физические основы сегнетоэлектрических явлений в кристаллах. М.: Наука, 1983. 240 с.

Липецкий политехнический институт

Поступило в Редакцию
22 января 1990 г.