

**РАССЕЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ РЭЛЕЕВСКИХ
И ОБЪЕМНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН
НА ДВУМЕРНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ШЕРОХОВАТОСТИ
СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

В. В. Косачев, Ю. Н. Лохов, В. Н. Чуков

УДК 534.2

© 1990

В борновском приближении теории возмущений решена задача рассеяния объемных акустических волн и поверхностной волны Рэлея двумерной статистической шероховатостью свободной границы изотропного твердого тела. Получены выражения для векторов смещения рассеянных волн на больших расстояниях от шероховатости, коэффициента затухания рэлеевской волны и коэффициентов трансформации (по энергии) объемных падающих волн в рассеянные волны. Рассмотрены предельные случаи малых и больших частот. Исследована зависимость коэффициента затухания рэлеевской волны от коэффициента Пуассона среды σ в случае длинных волн. Представлены графически результаты численного счета для среды с $\sigma=0.25$. Обсуждаются особенности рассеяния двумерными и трехмерными шероховатостями.

1. В работах [1, 2] было детально исследовано рассеяние поверхностных акустических волн (ПАВ) Рэлея [1] и объемных акустических волн (ОАВ) [2] на свободной статистически шероховатой поверхности изотропного твердого тела. Рассматривались трехмерные изотропные шероховатости. Вместе с тем представляет интерес изучение рассеяния ПАВ и ОАВ на двумерных статистических шероховатостях свободной границы изотропного твердого тела. Это объясняется двумя причинами. Во-первых, насколько нам известно, в литературе рассматривались задачи рассеяния ОАВ либо детерминированными и периодическими шероховатостями [3-6], либо статистическими шероховатостями, но для скалярного случая (т. е. когда нет поверхностных и сдвиговых волн) [7-9]. Что касается затухания рэлеевской волны, то этому вопросу посвящены экспериментальные [10, 11] и теоретические [12, 13] работы, выполненные методом среднего поля. В [12] получен закон дисперсии рэлеевской волны, бегущей по шероховатой поверхности. Мнимая часть сдвига частоты [12] характеризует затухание ПАВ Рэлея. В [13] получено и анализируется выражение для коэффициента затухания ПАВ Рэлея. Заметим, что как в [12], так и в [13] конечные результаты получены с точностью до первого исчезающего члена по шероховатости. В настоящей работе для исследования затухания рэлеевской волны использован подход теории рассеяния. Поэтому вызывает интерес сравнение результатов настоящей работы и результатов [12, 13], полученных разными методами, с результатами эксперимента [10, 11].

Кроме этого, интересно сравнить особенности рассеяния ПАВ и ОАВ двумерными и трехмерными шероховатостями.

2. Пусть на шероховатый участок границы раздела изотропное твердое тело—вакуум падает упругая плоская монохроматическая ПАВ Рэлея (R -волна) или ОАВ (поперечная с вертикальной поляризацией SV -волна; поперечная с горизонтальной поляризацией SH -волна или продольная P -волна). Среда занимает полупространство $x_3 \geq 0$. Шероховатый участок имеет форму полосы с шириной L_1 вдоль оси x_1 и бесконеч-

ным размером вдоль оси x_2 . Профиль шероховатости описывается случайной функцией $x_3 = f(x_1)$. Шероховатость предполагается слабой, т. е. $\delta \ll \lambda$, где $\delta^2 = \langle f^2(x_1) \rangle$ (усреднение производится по ансамблю различных реализаций профиля шероховатости поверхности), λ — длина волны, падающей на шероховатый участок. Требуется найти длину затухания ПАВ Рэлея и коэффициенты трансформации (по энергии) ОАВ в рассеянные волны в зависимости от частоты ω , угла скольжения φ (для ОАВ) и поляризации падающей волны от параметров шероховатости δ и a (a — радиус корреляции шероховатости) и коэффициента Пуассона среды σ . Поставленную задачу будем решать с помощью метода теории возмущений, ограничиваясь первым членом малости по f .

3. Полное поле смещения в среде с шероховатой границей запишем в виде

$$u(\mathbf{r}, t) = u_{in}(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^{+\infty} v_l(k) e^{ikx_1 - i\omega t} e^{-\alpha_l(k)x_3} dk + \int_{-\infty}^{+\infty} v_t(k) e^{ikx_1 - i\omega t} e^{-\alpha_t(k)x_3} dk. \quad (1)$$

В случае ОАВ, падающей на шероховатый участок поверхности, первый член в (1) соответствует смещению в падающей волне. Для падающей ПАВ Рэлея в выбранной форме записи (1) первый член отсутствует. Из волнового уравнения $\partial^2 u / \partial t^2 = c_{i,t}^2 \Delta u$ ($c_{i,t}$ — скорость продольного и поперечного звука соответственно) имеем

$$\alpha_{i,t}(k) = \begin{cases} (k^2 - \omega^2/c_{i,t}^2)^{1/2}, & |k| \geq \omega/c_{i,t}, \\ -i(\omega^2/c_{i,t}^2 - k^2)^{1/2}, & |k| \leq \omega/c_{i,t}, \end{cases} \quad (2)$$

где знак перед корнем выбран исходя из условия, что волны являются расходящимися или поверхностными. Граничное условие для свободной шероховатой поверхности имеет вид

$$\sigma_{ik} n_k |_{x_3=f(x_1)} = 0, \quad (3)$$

где σ_{ik} — тензор напряжений, \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности

$$\mathbf{n} = (f'(x_1); 0; -1) / \sqrt{1 + f'^2(x_1)}. \quad (4)$$

Поле смещения в отраженных от шероховатой поверхности волнах в соответствии с теорией возмущений имеет вид ряда

$$v_i = v_i^{(0)} + v_i^{(1)} + \dots, \quad v_t = v_t^{(0)} + v_t^{(1)} + \dots, \quad (5)$$

где амплитуды $v_i^{(0)}$, $v_t^{(0)}$ соответствуют волнам на плоской поверхности; $v_i^{(1)}$, $v_t^{(1)}$ — малые добавки, обусловленные шероховатостью. Согласно (1), имеем

$$v_{i,t}^{(0)} = \tilde{v}_{i,t}^{(0)} \delta(k - (\omega/c) \cos \varphi), \quad (6)$$

где $\tilde{v}_{i,t}^{(0)}$ и c различны для падающих волн разных поляризаций (R , P , SV , SH) [14]. Далее подставим (1) в (3). Для падающих волн вертикальной поляризации (R , P , SV) получим систему из двух интегральных уравнений, а для падающей SH -волны — одно уравнение. Домножим эти уравнения на $\exp[-igx_1]$ и проинтегрируем по dx_1 . В результате получим уравнения, в которые будут входить интегралы следующего вида:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_3 f(x_1)} e^{i(k_1-g)x_1} dx_1 \equiv (e^{-ik_3 f(x_1)})_{k_1-g}, \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_3 f(x_1)} e^{i(k_1-g)x_1} f'(x_1) dx_1 = (e^{-ik_3 f(x_1)})_{k_1-g} \frac{(k_1-g)}{k_3}. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как шероховатость предполагается слабой, разложим эти выражения в ряд Тейлора по $f(x_1)$ и ограничимся членами первого порядка

$$(e^{-ik_3 f(x_1)})_{k_1-g} \approx 2\pi\delta(k_1-g) - ik_3 f(g-k_1), \quad (8)$$

\hat{f} — Фурье-образ функции f . Кроме этого, из условий

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_t = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{u}_t = 0 \quad (9)$$

получим

$$v_{i3}^{(1)} = \frac{ik}{\alpha_t} v_{i1}^{(1)}, \quad v_{i3}^{(1)} = -\frac{\alpha_t}{ik} v_{i1}^{(1)}. \quad (10)$$

Подстановка (8) и (10) в указанные выше уравнения приводит окончательно к легко разрешимой системе из двух алгебраических уравнений для искомых амплитуд $v_{i1}^{(1)}(k)$, $v_{i1}^{(1)}(k)$ (для R -, P -, SV -волн). Для падающей SH -волны, как отмечалось выше, граничные условия (3) сводятся к одному уравнению, связывающему только x_2 -компоненты векторов смещения в падающих и рассеянных волнах. Поэтому в результате рассеяния SH -волны образуется рассеянная волна только горизонтальной поляризации, для которой

$$\mathbf{v}_i^{(1)}(k) \equiv 0, \quad \mathbf{v}_i^{(1)}(k) = \mathbf{I}_2 A_0 \frac{\omega^2 [(c_t/\omega)k \cos \varphi - 1]}{\pi c_t^2 \alpha_t(k)} \hat{f}\left(k - \frac{\omega}{c_t} \cos \varphi\right) \quad (11)$$

($i, i=1, 2, 3$ — орты осей координат). Согласно (1), вектор смещения в рассеянной волне в первом порядке теории возмущений имеет вид

$$\mathbf{u}^{(s)}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v}_i^{(1)}(k) e^{ikx_1 - i\omega t} e^{-\alpha_t(k)x_3} dk + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v}_i^{(1)}(k) e^{ikx_1 - i\omega t} e^{-\alpha_t(k)x_3} dk. \quad (12)$$

Найдем векторы смещения в рассеянных волнах на больших расстояниях (по сравнению с длиной волны) от шероховатого участка поверхности. Для этого подставим найденные выражения для $\mathbf{v}_i^{(1)}$, $\mathbf{v}_i^{(1)}$ в (12) и оценим полученные интегралы методами стационарной фазы и контурных интегралов [1, 15]. Окончательно получим следующие выражения.

1) Для падающих P -, SV -, R -волн: рассеянная объемная продольная волна

$$\mathbf{u}^{(s)} \approx e^{i\frac{\omega}{c_l} r - i\omega t} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{\omega^{1/2} \sqrt{2\pi}}{c_l^{1/2} \sqrt{r}} \left[\frac{D_1^{P, SV, R}(k^{(t)})}{D(k^{(t)})} \right] \operatorname{tg} \theta_s [I_1 \cos \theta_s + I_3 \sin \theta_s] \quad (13)$$

(θ_s — угол рассеяния, отсчитываемый от оси x_1 ; $0 \leq \theta_s \leq \pi$; $k^{(t)} = (\omega/c_l) \cos \theta_s$), рассеянная объемная поперечная волна

$$\mathbf{u}^{(s)} \approx e^{i\frac{\omega}{c_t} r - i\omega t} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{\omega^{1/2} \sqrt{2\pi}}{c_t^{1/2} \sqrt{r}} \left[\frac{D_2^{P, SV, R}(k^{(t)})}{D(k^{(t)})} \right] [I_1 \sin \theta_s - I_3 \cos \theta_s]. \quad (14)$$

($k^{(t)} = (\omega/c_t) \cos \theta_s$), рассеянная поверхностная рэлеевская волна

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\pm}^{(s)} \approx & \pm \frac{1}{2\pi} \frac{\beta}{c_R c_t^2 R_1} \frac{1}{\omega} \left\{ \left[D_1^{P, SV, R}(\pm k_R) e^{-\alpha \frac{\omega}{c_R} x_3} + D_2^{P, SV, R}(\pm k_R) e^{-\beta \frac{\omega}{c_R} x_3} \right] \mathbf{I}_1 \pm \right. \\ & \left. \pm \left[D_2^{P, SV, R}(\pm k_R) \frac{i}{\beta} e^{-\beta \frac{\omega}{c_R} x_3} + D_1^{P, SV, R}(\pm k_R) i \alpha e^{-\alpha \frac{\omega}{c_R} x_3} \right] \mathbf{I}_3 \right\} e^{\pm i \frac{\omega}{c_R} x_1 - i\omega t}. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\alpha = (1 - c_R^2/c_t^2)^{1/2}, \quad \beta = (1 - c_R^2/c_t^2)^{1/2},$$

где $k_R = \omega/c_R$, знаки « \rightarrow », « \leftarrow » обозначают волны, бегущие в положительном и отрицательном направлениях оси x_1 соответственно. Заметим здесь, что полные выражения для всех функций и констант, входящих в конечные формулы данной работы, приведены в [14].

Таким образом, рассеянные объемные волны являются цилиндрическими, а рассеянные рэлеевские — плоскими. Причем в случае падающих ОАВ имеются две рассеянные рэлеевские волны: одна бежит в положительном направлении оси x_1 , вторая — в отрицательном. Когда на шерохо-

ватый участок падает ПАВ Рэлея, волновой вектор которой направлен вдоль оси x_1 , в результате рассеяния образуется только одна рэлеевская волна, как показывают вычисления, бегущая в отрицательном направлении оси x_1 .

2) При рассеянии SH -волны образуется только объемная цилиндрическая волна горизонтальной поляризации

$$u^{(s)} \approx I_2 i A_i e^{-i \frac{\pi}{4}} f(k^{(i)} - \frac{\omega}{c_t} \cos \varphi) e^{i \omega t - i \omega z / r} \frac{\sqrt{2} \omega^{3/2}}{c_t^{3/2} \sqrt{\pi} \sqrt{r}} [\cos \varphi \cos \theta_s - 1]. \quad (16)$$

4. Используя полученные выражения для векторов смещения (13)–(16), найдем векторы плотности потока энергии (вектор Умова–Пойнтинга) в рассеянных волнах

$$\xi_\alpha \equiv \text{Re} \left[-\frac{1}{2} c_{\alpha\beta\mu\nu} \dot{u}_\beta^* \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} \right], \quad (17)$$

где $\vec{\xi}$ — средний по времени вектор Умова–Пойнтинга. Отметим, что дифференцирование предэкспоненциальных множителей в (13)–(16) дает на больших расстояниях от шероховатости члены более высокого порядка малости, чем члены, возникающие при дифференцировании экспонент. Полученные таким образом векторы Умова–Пойнтинга необходимо усреднить по ансамблю различных реализаций профиля шероховатости. При этом используем

$$\langle \hat{f}(k) \hat{f}^*(k') \rangle = 2\pi \delta(k - k') W(k), \quad \langle |\hat{f}(k)|^2 \rangle = L_1 W(k), \quad (18)$$

где $W(k)$ — Фурье-образ корреляционной функции шероховатости. В данной работе используется гауссова форма корреляционной функции

$$W(x_1 - x_1') = \langle f(x_1) f(x_1') \rangle = \delta^2 \exp[-(x_1 - x_1')^2 / a^2], \quad W(k) = \sqrt{\pi} \delta^2 a \exp[-a^2 k^2 / 4]. \quad (19)$$

Интегрирование векторов Умова–Пойнтинга по площади волнового фронта дает выражения для потоков энергии в рассеянных волнах $dE^{(l, i, R)} / dt$.

5. В случае распространения ПАВ Рэлея вдоль слабошероховатой поверхности длина затухания определяется следующим образом [1]:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{L_1} \frac{(dE^{(T)} / dt)}{(dE_0 / dt)} = \frac{1}{l^{(i)}} + \frac{1}{l^{(i)}} + \frac{1}{l^{(R)}}, \quad (20)$$

где dE_0 / dt — поток энергии в падающей ПАВ; $dE^{(T)} / dt$ — полный поток энергии в рассеянных волнах, равный сумме потоков в рассеянных R -, P -, S -волнах; $l^{(i, t, R)}$ — длина затухания, обусловленная рассеянием в P -, S -, R -волны соответственно. Приведем окончательные выражения для коэффициентов затухания

$$\begin{aligned} \frac{1}{l^{(i, t)}} &= \frac{\delta^2 a \omega^4}{c_R^4} \frac{P_{t, l}}{4 \sqrt{\pi} P} \int_0^\pi d\theta_s \frac{B_{t, l}^{(R)}(k^{(t, l)})}{D_{t, l}^{(R)}(k^{(t, l)})} \sin^2 \theta_s e^{-\frac{1}{4} \left(\frac{a\omega}{c_R} \right)^2 \left[\frac{c_R}{c_{t, l}} \cos \theta_s - 1 \right]^2} \equiv \\ &\equiv \frac{\delta^2 a \omega^4}{c_R^4} f_{B_{t, l}} \left(\frac{a\omega}{c_R} \right), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\frac{1}{l^{(R)}} = \frac{\delta^2 a \omega^4}{c_R^4} P_1 e^{-\left(\frac{a\omega}{c_R} \right)^2} \equiv \frac{\delta^2 a \omega^4}{c_R^4} f_R \left(\frac{a\omega}{c_R} \right). \quad (22)$$

В случае длинных волн $a/\lambda \ll 1$ из (21), (22) имеем $1/l^{(i, t, R)} \sim \delta^2 a \omega^4 / c_R^4$. В случае коротких волн $a/\lambda \gg 1$ с помощью метода Лапласа [16] находим

$$\frac{1}{l^{(i, t)}} \approx \frac{\delta^2}{a^2} \frac{\omega}{c_R} B_{t, l}^{(R)} e^{-\frac{1}{4} \left(\frac{a\omega}{c_R} \right)^2 \left[1 - \frac{c_R}{c_{t, l}} \right]^2}. \quad (23)$$

Как видно из (22), (23), все три коэффициента затухания с ростом частоты экспоненциально стремятся к нулю, причем экспонента в (22) является более «резкой», чем в (23), т. е. в области высоких частот $a\omega/c_R \gg 1$ затухание ПАВ Рэля за счет рассеяния в ОАВ является определяющим по сравнению с затуханием из-за рассеяния во вторичные ПАВ Рэля. Причем из (23) видно, что подавляющая доля энергии переходит в поперечные ОАВ. На рис. 1 представлены результаты численного расчета функций f_{Bt} , f_{Bl} , f_R , проведенного по формулам (21), (22) для упругой среды с коэффициентом Пуассона $\sigma = 0.25$. На рис. 2 приведены диаграммы углового распределения рассеяния в ОАВ $F_{Bt, l}(\theta_s)$

$$f_{Bt} = \int_0^\pi F_{Bt}(\theta_s) d\theta_s, \quad f_{Bl} = \int_0^\pi F_{Bl}(\theta_s) d\theta_s. \quad (24)$$

Как видно из рис. 2, а, б, в случае длинных волн $a/\lambda \ll 1$ энергия в рассеянных ОАВ распределена примерно равномерно по всем направлениям в среде. В случае коротких волн $a/\lambda \gg 1$ рассеяние происходит в основном вперед, т. е. на углы θ_s , близкие к нулю. Для рассеяния в поперечные ОАВ, кроме $\theta_s = 0$ и $\theta_s = \pi$ (как для продольных рассеянных ОАВ), имеется еще одно «запрещенное» направление $\theta_s \approx 148^\circ$. Исследовалась также зависимость коэффициентов затухания от природы материала. Числен-

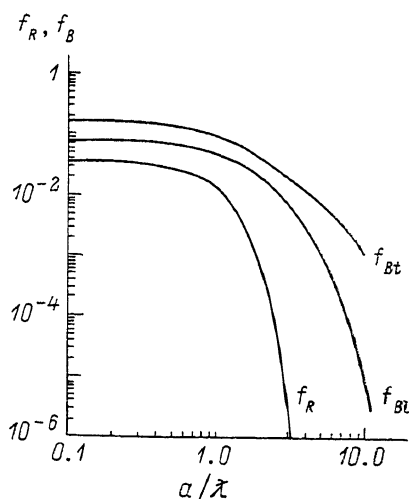


Рис. 1. Результаты численного счета функций f_{Bl} , f_{Bt} , f_R для упругой среды с $\delta = 0.25$.

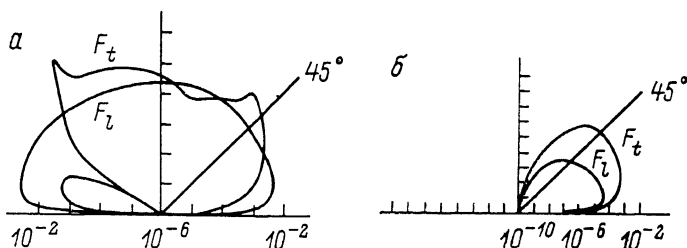
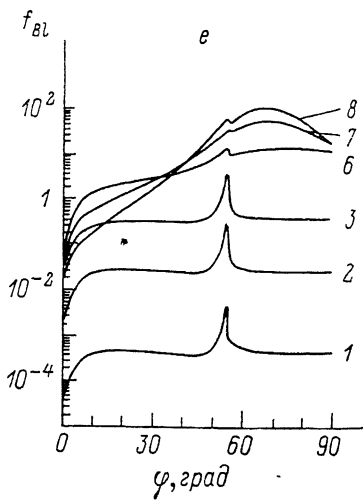
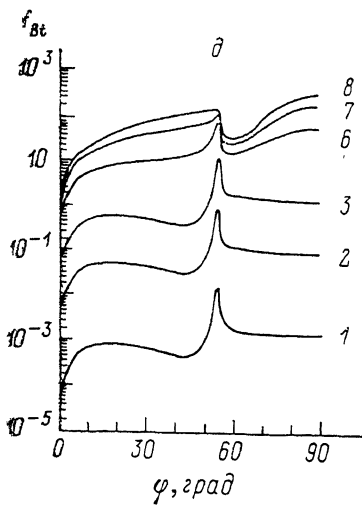
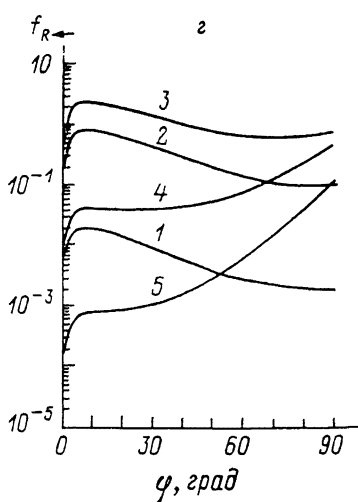
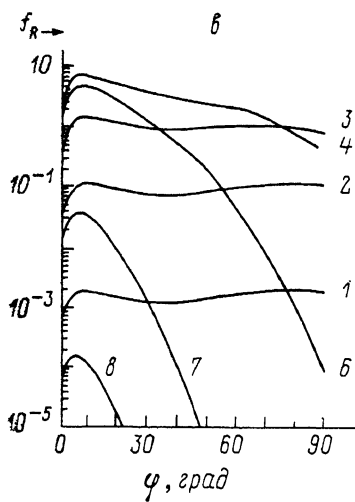
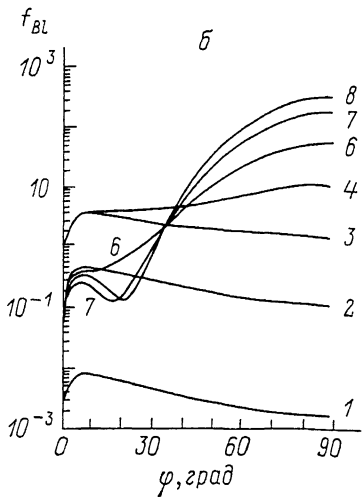
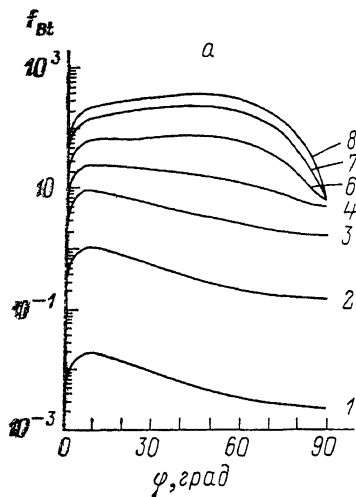


Рис. 2. Угловое распределение рассеяния в объемные волны. $\delta = 0.25$, $a/\pi = 0.1$ (а) и 9.0 (б).

ный расчет показал, что они сильно зависят от коэффициента Пуассона среды σ . В таблице представлены результаты численного расчета в случае длинных волн. Видно, что в области $0 < \sigma \leq 0.25$ затухание, связанное с рассеянием в ОАВ, примерно того же порядка, что и затухание,

Зависимость коэффициента затухания рэлеевской волны от коэффициента Пуассона среды σ в случае длинных волн $a/\lambda \ll 1$

σ	f_{Bt}	f_{Bl}	$f_B = f_{Bt} + f_{Bl}$	f_R	f_B/f_R
0.05	0.128	0.201	0.329	0.103	3.19
0.17	0.151	0.127	0.278	0.057	4.88
0.25	0.162	0.079	0.241	0.036	6.69
0.34	0.162	0.039	0.201	0.020	10.0
0.45	0.148	0.009	0.157	0.009	17.4
0.49	0.140	0.002	0.142	0.007	20.3



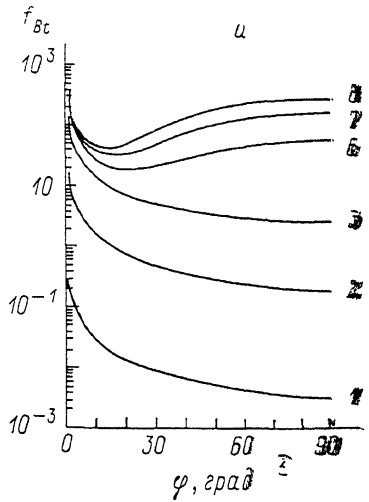
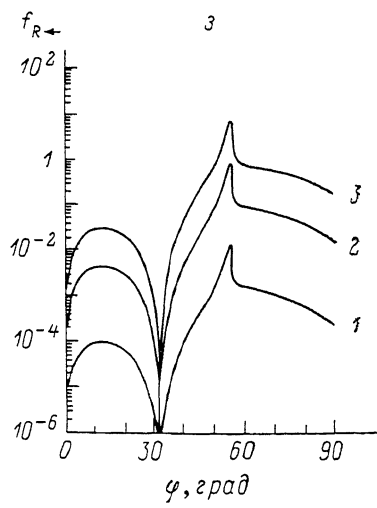
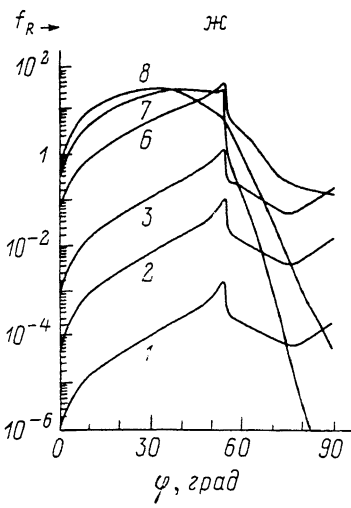


Рис. 3. Результаты численного расчета функций f_{Bt} , f_{Bt} , f_R ($\delta = 0.25$).

Для падающей P-волны: а - f_{Bt} , б - f_{Bt} , в - $f_{R \rightarrow}$, г - $f_{R \leftarrow}$; для падающей SV-волны: д - f_{Bt} , е - f_{Bt} ; жс - $f_{R \rightarrow}$, з - $f_{R \leftarrow}$; и - f_{Bt} для падающей SH-волны. a/λ : 1 - 0.1, 2 - 0.4, 3 - 1.0, 4 - 2.0, 5 - 2.5, 6 - 4.0, 7 - 7.0, 8 - 9.0.

обусловленное рассеянием во вторичные ПАВ Рэлея. В области же $0.25 < \sigma < 0.5$ затухание в ОАВ на порядок превосходит затухание в ПАВ Рэлея.

6. Определим коэффициенты трансформации энергии падающих ОАВ в энергию рассеянных ОАВ и ПАВ Рэлея соответственно

$$\chi_{L, t} = \frac{dE^{(L, t)}}{dt} \bigg/ \frac{dE_0}{dt}, \quad \chi_R = \frac{dE_R}{dt} \bigg/ \frac{dE_0}{dt}. \quad (25)$$

Приведем окончательные выражения для коэффициентов трансформации в энергию продольных χ_L , поперечных χ_t ОАВ и ПАВ Рэлея χ_R

$$\chi_{L, t}^{(P, SV)} = \frac{\delta^2}{a^2} f_{Bt, t}^{(P, SV)} \left(\frac{a}{\lambda}; \varphi; \sigma \right), \quad \chi_R^{(P, SV)} = \frac{\delta^2}{a^2} f_{R, \vec{z}}^{(P, SV)} \left(\frac{a}{\lambda}; \varphi; \sigma \right). \quad (26), (27)$$

Здесь верхние индексы обозначают поляризацию падающей ОАВ. Коэффициент трансформации χ_t^{SH} имеет вид

$$\begin{aligned} \chi_t^{SH} &= \frac{\delta^2}{a^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{a\omega}{c_t} \right)^3 \frac{1}{\sin \varphi} \int_0^\pi d\theta_s [\cos \varphi \cos \theta_s - 1]^2 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{a\omega}{c_t} \right)^2 [\cos \theta_s - \cos \varphi]^2} \equiv \\ &\equiv \frac{\delta^2}{a^2} f_{Bt}^{SH} \left(\frac{a}{\lambda}; \varphi \right). \end{aligned} \quad (28)$$

На рис. 3, $a-u$ приведены результаты численного расчета функций $f_{Bl, i}^{P, SV}, f_R^{P, SV}, f_{Bi}^{SH}$ в зависимости от угла скольжения φ при некоторых фиксированных значениях a/λ ($\sigma=0.25$). Возможная физическая картина рассеяния акустических волн на статистической шероховатости, определяющая сложный характер поведения функций $f_{Bl, i}, R$, подробно обсуждалась в [2]. Заметим, что на двумерной шероховатости меньшая доля энергии трансформируется в ПАВ Рэля по сравнению с трехмерной шероховатостью [2]. Например, для падающей P -волны при $\varphi=10^\circ$, $\delta/a=0.09$, $a/\lambda=2.0$, $\chi_i \approx 20.2\%$, $\chi_R \approx 3.2\%$, $\chi_{R \leftarrow} \approx 0.03\%$, $\chi_{R \rightarrow} \approx 5.7\%$.

Введем угловое распределение энергии для рассеянных ОАВ

$$\chi_{i, i}^{(P, SV, SH)} = \frac{\delta^2}{a^2} \int_0^\pi F_{i, i}^{(P, SV, SH)}(\theta_s) d\theta_s. \quad (29)$$

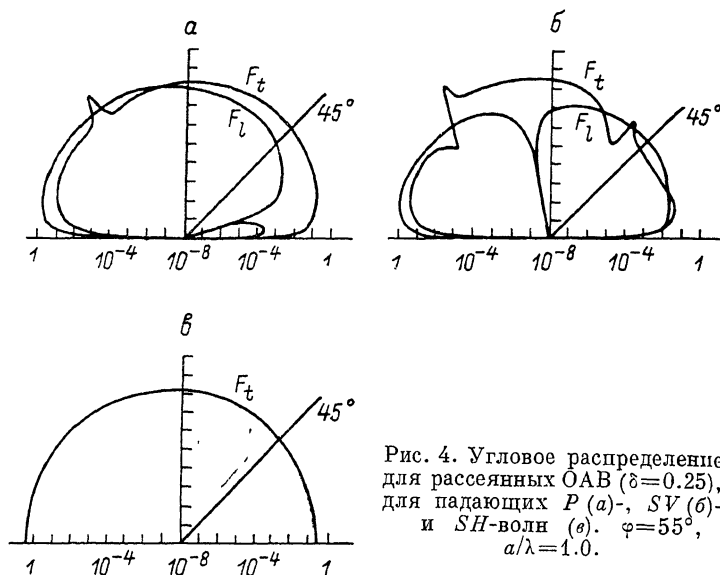


Рис. 4. Угловое распределение для рассеянных ОАВ ($\delta=0.25$), для падающих P (a)-, SV (b)- и SH -волн (b). $\varphi=55^\circ$, $a/\lambda=1.0$.

На рис. 4 представлены диаграммы $F_{i, i}^{(P, SV, SH)}(\theta_s)$ при фиксированных значениях угла скольжения φ и параметра a/λ . Из рис. 4, a, b видно, что при рассеянии P - и SV -волн имеются «запрещенные» направления рассеяния. Энергия длинных рассеянных волн ($a/\lambda \ll 1$) распределена в среде примерно изотропно, а энергия рассеянных коротких волн ($a/\lambda \gg 1$) сосредоточена вблизи направлений зеркального отражения (т. е. направлений отражения волн в отсутствие шероховатости; см. формулы (30)—(34)). С помощью выражений (26)—(28) найдем предельные формулы для коэффициентов трансформации. В случае малых частот $a/\lambda \ll 1$ все коэффициенты трансформации $\chi \sim \delta^2 a \omega^3$. В случае больших частот падающих ОАВ $a/\lambda \gg 1$ методом Лапласа [16] получим следующие асимптотические формулы для коэффициентов трансформации: для падающей P -волны

$$\chi_i^P \approx \frac{\delta^2 \omega^2}{c_i^2} \frac{c_f^4}{c_i^2} \frac{D_{ii}}{D_i} \Big|_{\theta_s=\varphi}. \quad (30)$$

$$\chi_i^P \approx \begin{cases} \frac{\delta^2 \omega^2}{c_i^2} \frac{c_f}{c_i} \frac{[1 - (c_f^2/c_i^2) \cos^2 \varphi]^{1/2}}{\sin \varphi} \frac{D_{ii}^{(1)}}{D_i^{(1)}} \Big|_{\theta_s=\theta_{ii}^{(p)}}, & 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \\ 32 \frac{\delta^2}{a^2} \frac{c_f^3}{c_i^3}, & \varphi = \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (31)$$

$$\theta_{ii}^{(p)} = \arccos \left(\frac{c_f}{c_i} \cos \varphi \right),$$

для падающей SV -волны

$$\alpha_i^{SV} \approx \frac{\delta^2 \omega^2}{c_i^2} \frac{D_{i1}}{D_1} \Big|_{\theta_s = \varphi}, \quad (32)$$

$$\alpha_i^{SV} \approx \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta^2}{a^2} \left(\frac{c_l}{c_t} \right)^{7/2} \frac{D_{i1}}{D} \Big|_{\theta_s=0} \frac{\exp[-1/4 (a\omega/c_l)^2 (c_t/c_l - \cos \varphi)^2]}{\sin \varphi [\cos \varphi - c_t/c_l]^{3/2}}, \\ \quad 0 < \varphi < \arccos(c_t/c_l), \\ \frac{\delta^2 \omega^{3/2}}{\sqrt{a} c_l^{3/2}} g_l, \quad \varphi = \arccos(c_t/c_l), \\ \frac{\delta^2 \omega^2}{c_i^2} \frac{c_l^4}{c_t^4} \frac{[c_l^2/c_t^2 - \cos^2 \varphi]^{1/2}}{\sin \varphi} \frac{D_{i1}}{D} \Big|_{\theta_s = \theta_{sl}^{(SV)}}, \quad \arccos \frac{c_t}{c_l} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \\ 32 \frac{\delta^2}{a^2} \frac{c_l}{c_t}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \\ \theta_{sl}^{(SV)} = \arccos \left(\frac{c_l}{c_t} \cos \varphi \right), \end{array} \right. \quad (33)$$

для падающей SH -волны

$$\alpha_i^{SH} \approx 4 \frac{\delta^2 \omega^2}{c_i^2} \sin^2 \varphi. \quad (34)$$

Коэффициенты трансформации в ПАВ Рэлея при рассеянии P - и SV -волн для $a/\lambda \gg 1$ экспоненциально малы (см. [14]).

7. В заключение интересно сравнить частотные зависимости и характер рассеяния ОАВ и ПАВ Рэлея в случае трехмерных [1, 2] и двумерных статистических шероховатостей.

Для трехмерных шероховатостей в [1, 2] было получено, что в случае длинных волн $a/\lambda \ll 1$ коэффициент затухания ПАВ Рэлея $1/l \sim \omega^5$, а коэффициенты трансформации ОАВ $\alpha \sim \omega^4$. В настоящей работе получено, что при рассеянии длинных волн $a/\lambda \ll 1$ на двумерных шероховатостях коэффициент затухания рэлеевской волны $1/l \sim \omega^4$, а коэффициенты трансформации ОАВ $\alpha \sim \omega^3$. Таким образом, одновременно с понижением мерности шероховатостей на единицу понижается на единицу и степень частоты в частотной зависимости коэффициентов рассеяния для длинных волн. Это является следствием того факта, что сечение рассеяния волны на неоднородности в случае, когда длина волны много больше характерного размера неоднородности (рэлеевское рассеяние) $\sigma \sim \omega^{n+1}$, где n — мерность неоднородности.

В случае рассеяния коротких ПАВ Рэлея $a/\lambda \gg 1$ частотная зависимость коэффициента затухания за счет рассеяния во вторичные ПАВ Рэлея $1/l^{(R)}$ имеет принципиально разный характер для трехмерной и двумерной шероховатостей. Для трехмерных шероховатостей $1/l^{(R)} \sim \sim \text{const}$ [1], а для двумерной $1/l^{(R)} \sim \omega^4 \exp[-(a\omega/c_R)^2]$, т. е. экспоненциально мал (22). С физической точки зрения, такое резкое различие определяется тремя факторами: структурой шероховатости (ее корреляционной функции), граничными условиями и геометрией рассеяния. Структура шероховатости приводит к тому, что в коротковолновом пределе $a/\lambda \gg 1$ направление «вперед» (нулевой угол рассеяния) является «резонансным» (см. [2]) для рассеяния в ПАВ Рэлея и в двумерном, и в трехмерном случаях, т. е. в этом направлении должно происходить максимальное рассеяние, растущее с частотой, но более медленно, чем для длинных волн $a/\lambda \ll 1$. (Математически это выражается в возможности использования метода Лапласа [16] для получения коротковолновой асимптотики, так как экспоненциальный множитель коррелятора имеет максимум для этого направления). Но вследствие граничных условий направление рассеяния «вперед» является запрещенным как для двумерной, так и для трехмерной шероховатости (точно обращается в нуль предкорреляционный множитель для этого направления). Тем не менее для трехмерной шероховатости остаются разрешенными направления,

близкие к нулевому углу рассеяния, поскольку рассеянная ПАВ является цилиндрической; в этих направлениях и происходит максимальное рассеяние, а частотная зависимость определяется именно этими волнами. Такое малое отклонение направления рассеяния от «резонансного» и приводит к дополнительному замедлению роста рассеяния с частотой, т. е. к выходу коэффициента затухания $1/l^{(R)}$ на константу по частоте. Для двумерной же шероховатости рассеянная ПАВ является плоской (см. (15)) и не может рассеиваться на углы, близкие к нулевому; поэтому частотная зависимость коэффициента затухания $1/l^{(R)}$ в этом случае определяется рассеянием назад, которое экспоненциально мало (22). Это вносит качественное изменение в саму картину рассеяния: в случае трехмерных шероховатостей при $a/\lambda \gg 1$ затухание ПАВ Рэлея за счет рассеяния во вторичные рэлеевские волны является главным по сравнению с затуханием из-за рассеяния в ОАВ, причем суммарный коэффициент затухания выходит на константу [1]. В случае же двумерной шероховатости при $a/\lambda \gg 1$ рассеяние в объемные волны является основным по сравнению с рассеянием во вторичные ПАВ Рэлея, а суммарный коэффициент затухания экспоненциально стремится к нулю.

В случае рассеяния объемных волн на трехмерных и двумерных шероховатостях частотные зависимости коэффициентов трансформации при $a/\lambda \gg 1$ совпадают. Этот результат также «вписывается» в рассматриваемую картину рассеяния, так как понижение мерности неоднородности влечет за собой соответствующее изменение геометрии рассеяния, к которой «чувствительна» корреляционная функция в случае коротких волн.

Коэффициенты затухания рэлеевских волн сильно зависят от коэффициента Пуассона среды как в случае трехмерной [1], так и двумерной шероховатости. Заметим, что в двумерном случае (см. таблицу) возникло явление, отсутствующее для трехмерного случая: при значениях коэффициента Пуассона, близких к нулю $\sigma \geq 0$, функция f_{B1} более чем в полтора раза превосходит f_{B1} , а затем резко уменьшается и становится значительно меньше, чем f_{B1} ; функция f_{B1} в свою очередь при $\sigma \sim 0.3$ имеет максимум, а затем плавно уменьшается до значения (при $\sigma \sim 0.5$), которое превышает ее значение при $\sigma \approx 0$. В случае трехмерной шероховатости функция f_{B1} монотонно убывает во всем диапазоне изменения σ и всюду превышает функцию f_{B1} [1].

Интересно также сравнить результаты настоящей работы для коэффициентов затухания ПАВ Рэлея с результатами экспериментальных [10, 11] и теоретических [12, 13] работ, выполненных методом среднего поля. Мнимая часть сдвига частоты в законе дисперсии ПАВ Рэлея, найденного в [12, 13], характеризует затухание рэлеевской волны $1/l = 2 | \text{Im } \Delta \omega | / c_R$. В случае длинных волн $a/\lambda \ll 1$ частотные зависимости коэффициента затухания, полученные в данной работе и в [12, 13], совпадают. Кроме этого, совпадают результаты численного счета $1/l$ (для $\sigma = 0.25$) настоящей работы и [12] в области $a/\lambda \leq 10.0$ (данные для $a/\lambda > 10.0$ в [12] отсутствуют). Отметим, что в области $a/\lambda \gg 1$ при совпадении частотных зависимостей $1/l^{(R)} \sim \omega^4 \exp[-(a\omega/c_R)^2]$ и качественной картины рассеяния (преобладает рассеяние в объем) частотные зависимости $1/l^{(1)} \sim \omega \exp[-1/4(a\omega/c_R)^2(1-c_R/c_t)^2]$ настоящей работы и $1/l^{(1)} \sim \omega^2 \times \exp[-1/4(a\omega/c_R)^2(1-c_R/c_t)^2]$ работы [13] отличаются предэкспоненциальным множителем.

В экспериментальных работах [10, 11] исследовалось затухание рэлеевской волны на двумерной и трехмерной статистической шероховатости. В случае двумерной шероховатости в [10] получено, что $1/l \sim \omega^5$ при $a/\lambda \ll 1$. Для трехмерной шероховатости в случае длинных волн $a/\lambda \ll 1$ авторы [10] обнаружили более сильное, чем $\sim \omega^5$, затухание. Однако оба указанных результата [10] противоречат закону чисто рэлеевского рассеяния и, по-видимому, обусловлены другими факторами. В [11] подтверждены выводы теории о пропорциональности затухания (в длинноволновом случае $a/\lambda \ll 1$) на двумерных и трехмерных шероховатостях 4-й и 5-й степени частоты соответственно.

Список литературы

- [1] Косачев В. В., Лохов Ю. Н., Чуков В. Н. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. № 9. С. 162—172.
- [2] Косачев В. В., Лохов Ю. Н., Чуков В. Н. // ФТТ. 1989. Т. 31. № 6. С. 105—113.
- [3] Григорьевский В. И., Гуляев Ю. В., Котелянский И. М., Мишкинис Р. А., Плесский В. П. // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 5. С. 711—712.
- [4] Лапин А. Д. // Акуст. журн. 1982. Т. 28. № 3. С. 359—363.
- [5] Sato R. // Zisin. J. Seismolog. Soc. Jap. 1955. V. 8. N 1. P. 8—21.
- [6] Abubakar I. I. // Proc. Camb. Philos. Soc. 1962. V. 58. N 1. P. 136—157.
- [7] Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972. 424 с.
- [8] Воронович А. Г. // Акуст. журн. Т. 30. № 6. С. 747—753.
- [9] Лысанов Ю. Н. Акустика океана. М., 1974. С. 231—330.
- [10] De Billy M., Quentin G., Baron E. // J. Appl. Phys. 1987. V. 61. P. 2140—2145.
- [11] Крылов В. В., Попел И. В. // Тез. докл. XIV Всес. конф. по акустоэлектронике и физической акустике твердого тела. Кишинев, 1989. Ч. II. С. 8—10.
- [12] Maradudin A. A., Huang X. // Phys. Rev. B. 1987. V. 36. N 15. P. 7827—7839.
- [13] Дунин С. З., Максимов Г. А. // Препринт МИФИ № 032-88. М., 1988. 24 с.
- [14] Косачев В. В., Лохов Ю. Н., Чуков В. Н. // Препринт МИФИ № 034-88. М., 1988. 28 с.
- [15] Maradudin A. A., Mills D. L. // Ann. Phys. 1976. V. 100. P. 262—309.
- [16] Эрдейи А. Асимптотические разложения. М.: ГИФМЛ, 1962. 127 с.

Московский
инженерно-физический институт

Поступило в Редакцию
3 января 1990 г.