

УДК 538.913
© 1990СВЯЗАННЫЕ КВАЗИБИФОНОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ
ФРАКТАЛЬНОЙ РЕШЕТКИ

О. А. Дубовский, А. В. Орлов

Исследован спектр связанных двухчастичных (квазибифононных) колебаний фрактальной решетки — треугольного ковра Серпинского — в условиях, когда существенны эффекты ангармонизма, обуславливающего взаимодействие одночастичных колебательных состояний (водород в металлах, примеси в молекулярных кристаллах и т. д.). В рамках решения обратной задачи получено рекуррентное генерационное соотношение, позволяющее поэтапно определять спектр связанных двухчастичных состояний фрактальной структуры с последовательно нарастающей степенью дробления. В отличие от одночастичных состояний, для которых аналогичное рекуррентное соотношение имеет вид квадратного уравнения, для связанных двухчастичных колебательных состояний это рекуррентное соотношение получено в виде соответствующего кубического уравнения. С использованием этого генерационного соотношения на ЭВМ рассчитан спектр связанных двухчастичных колебаний фрактальной решетки с высокой степенью дробления. Показано, что в отличие от одночастичных состояний, для которых скейлинговая самоповторяющаяся структура спектра наблюдалась только на высокочастотном краю спектра, для двухчастичных колебательных состояний такая скейлинговая самоповторяющаяся структура спектра существует на обоих краях полосы связанных состояний — на высокочастотном и низкочастотном. При этом критические индексы спектральной размерности для них существенно различны, т. е. плотность состояний на двух границах полосы связанных двухчастичных колебаний имеет различную энергетическую зависимость.

В настоящее время ведутся теоретические и экспериментальные исследования колебательных спектров кристаллов, в которых вследствие ангармонизма колебаний взаимодействие фононов приводит к образованию связанных многофононных комплексов из двух, трех и т. д. фононов — бифононов, трифононов и т. д. Таким связанным многофононным состояниям в наблюдаемых спектрах колебаний отвечают отдельные линии или полосы, расположенные вне континуума частот несвязанных диссоциированных многофононных состояний. Существующее состояние теории связанных многофононных колебаний, а также состояние экспериментальных исследований в этой области представлены в обзорах [1-3], в последних работах [4-6]. Представляют интерес последние экспериментальные исследования многофононных колебаний в различных материалах (гидриды металлов, молекулярные кристаллы и т. д.) методами нейтронной и оптической спектроскопии, рассеяния электронов [7-12] (в [10] наблюдались обертоны колебаний водорода в гидриде ванадия β -V₂H до 14-го порядка).

Один из основных разделов теории связанных многофононных колебаний связан с изучением особенностей спектров таких колебаний в кристаллах различной размерности с точечными дефектами различного типа — отдельными изотопическими примесями замещения, примесями внедрения, точечными структурными дефектами. Изучались спектры многофононных колебаний в неупорядоченных кристаллах с произвольной концентрацией таких точечных дефектов, кластеров из дефектов, в кристаллах с дефектами большей размерности — одномерными включениями, двумерными образованиями и т. д. [1-6]. При этом исследо-

вались кристаллические системы, дефектные кластерные образования с целой размерностью. Между тем известны многочисленные реальные ситуации, когда размерность объектов такого типа является нецелой, дробной. Такие образования — фракталы — широко исследуются в настоящее время в самых различных областях физики [13], в том числе и методом нейтронной спектроскопии [14] (напыленные пленки на твердых телах, пористые тела, затвердевшие растворы, металлические стекла и т. д.). В частности, различные аспекты физики колебаний таких структур — фрактальных решеток — рассматривались в работах [15, 16] и в последнее время в [17]. При этом в указанных работах изучались только одночастичные колебательные состояния фрактальных структур — кластеров примесных атомов, адатомов на поверхностях и т. д. Между тем в ряде случаев в конденсированных системах, включающих фрактальные структуры (водород в металле и на поверхности металла, примеси в молекулярных кристаллах и т. д.), наблюдаются связанные многофононные колебания. В связи с этим представляет интерес развитие теории связанных квазимонофононных колебаний фрактальных решеток.

В настоящей работе найден спектр связанных двухчастичных (квазибифононных) колебаний наиболее широко исследуемой фрактальной решетки — треугольного ковра Серпинского, получающегося последовательным вписыванием в равносторонний треугольник треугольных же ячеек меньшего размера с соответствующей последовательностью выбрасывания центральных ячеек (процедура построения изложена, например, в [16]). Найдены особенности спектра двухчастичных состояний, отличающие его от спектра одночастичных состояний. Спектр одночастичных состояний такого фрактала был найден в работе [16]. При этом было показано, что решение уравнения Шредингера $\hat{H}|1\rangle = E|1\rangle$ для энергии E одночастичных состояний может быть получено с помощью соответствующего рекуррентного соотношения, связывающего энергию $E_{N_n, i}$ i -го одночастичного состояния фрактальной решетки из N_n узлов на уровне n генерации треугольных ячеек с энергией $E_{N_{n-1}, j}$ j -го одночастичного состояния решетки из N_{n-1} узлов на предыдущем уровне $n-1$ генерации. Это соотношение имеет следующий вид:

$$\varepsilon_{N_{n-1}, j} = \varepsilon_{N_n, i}(\varepsilon_{N_n, i} - 3), \quad \varepsilon_{N_n, i} \equiv E_{N_n, i}/V, \quad (1)$$

где V — энергия взаимодействия ближайших соседей на фрактале (относительно [16] изменен знак V). Использование генерационной схемы (1) и соответствующего учета особых точек $\varepsilon = -2, -1$, непосредственно не являющихся решением (1), но используемых в левой части (1) в качестве источников генерации, позволило определить спектр одночастичных колебательных состояний фрактала, скейлинговые особенности зависимости плотности состояний на высокочастотном краю спектра, характер локализации волновых функций и т. д. [16].

Перейдем к изучению квазибифононных колебаний фрактальной решетки. При учете ангармонизма колебаний 3-го и 4-го порядков по смещениям соответствующих осцилляторов (например, атомов водорода в металле, молекулярных комплексов в молекулярном кристалле в направлении, перпендикулярном плоскости фрактала) модельный гамильтониан \hat{H} в представлении вторичного квантования имеет следующий вид [1-3]:

$$\hat{H} = \sum_n E_0 \hat{B}_n^+ \hat{B}_n + \sum_{n \neq m} V_{nm} \hat{B}_n^+ \hat{B}_m - A \sum_n (\hat{B}_n^+)^2 (\hat{B}_n)^2, \quad (2)$$

где E_0 — энергия собственных колебаний; \hat{B}_n^+, \hat{B}_n — Бозе-операторы рождения, уничтожения колебательных возбуждений в узле n ; V_{nm} — энергия взаимодействия, определяющая перенос возбуждений; $A > 0$ — константа ангармонизма, определяющая двухчастичное взаимодействие возбуждений (учет трехчастичного взаимодействия см. в [3]).

$$\hat{H} |2\rangle = E |2\rangle \quad (3)$$

для двухчастичных колебательных состояний $|2\rangle$ с энергией E ищется в виде

$$|2\rangle = \sum_{nm} \Psi_{nm} \hat{B}_n^+ \hat{B}_m^+ |0\rangle. \quad (4)$$

Подстановка (4) в (3) с использованием соответствующих коммутационных соотношений для операторов \hat{B}_n^+ , \hat{B}_n позволяет сформулировать следующую систему уравнений для функций Ψ_{nm} и величины E :

$$(E - 2E_0 + 2A\delta_{nm}) \Psi_{nm} = \sum_p (V_{np} \Psi_{pm} + V_{mp} \Psi_{np}). \quad (5)$$

Дальнейшее развитие теории связанных колебаний в стандартном направлении, аналогичном использованному в [16] для одночастичных состояний, с прямым поиском соответствующего генерационного соотношения для энергии E двухчастичных состояний представляется затруднительным. Отметим в связи с этим, что в идеальных 1-, 2-, 3-мерных кристаллах решение уравнения Шредингера (3) дает следующее дисперсионное уравнение для энергии E связанного бифонаона с волновым вектором K [1-3]:

$$1 = 2A \frac{1}{N} \sum_k (E - E_k - E_{K-k})^{-1}, \quad (6)$$

где

$$E_k = E_0 + \sum_{n (\neq m)} V_{nm} \exp[ik(n-m)]$$

— энергия одночастичных состояний; n, m — узлы идеальной кристаллической решетки; N — число узлов в основном объеме. Из этого уравнения определяется спектр бифонаонов $E = E(A, K)$ при данной константе ангармонизма A и $N \rightarrow \infty$ (при конечном N , естественно, N термов $E_{k_i}(A)$). При сильном ангармонизме полоса этих термов целиком отщепляется от полосы диссоциированных несвязанных двухфононных состояний $E = E_{k_1} + E_{k_2}$ в низкочастотную сторону на энергию связи $\sim 2A$. При определении спектра связанных трех- и четырехфононных колебаний нового типа [4, 6] нами использовалось решение обратной задачи, т. е. при фиксированной энергии связи E определялся «спектр» значений константы ангармонизма, который удовлетворял соответствующему дисперсионному уравнению. По определенной таким образом зависимости $A(E, K)$ затем может быть непосредственно восстановлена зависимость $E(A, K)$. Аналогичным образом и в случае бифононных колебаний из уравнения (6) может быть при конечном N определен «спектр» A , значений величины A при фиксированной энергии связи E или зависимость $A(E)$ при $N \rightarrow \infty$.

Воспользуемся аналогичным [4, 6], упомянутым выше, методом решения обратной задачи и в настоящей работе применительно к фрактальным решеткам, т. е. определим спектр значений величины $\bar{A} \equiv 2A$, удовлетворяющих уравнениям (5) при фиксированной энергии связи E . Последующее определение зависимости $E(A)$ по зависимости $A(E)$ при сильном ангармонизме ($E \approx 2(E_0 - A)$) не представляет принципиальных затруднений.

Будем, как и в работах [16, 17], рассматривать фрактальную решетку — треугольный ковер Серпинского — с циклическими граничными условиями, учитывая взаимодействие ближайших соседей ($V_{nm} = V\delta_{n, m+1}$). Индексами со штрихом n' фиксируем, как и в [16], узлы подсистемы «внутренних» треугольников $i+1$ -го шага генерации и индексами n без штрихов — узлы n «внешних» треугольников i -го предыдущего шага генерации. В [16] из уравнений для $\Psi_{n'}$ определялась функциональная

зависимость $\Psi_{n'} = f(\{\Psi_n\})$, и последующая подстановка этой зависимости в уравнения для Ψ_n давала рекуррентное соотношение (1) для энергии одночастичных состояний. Для двухчастичных состояний необходимо провести аналогичную процедуру перехода $n'm' \rightarrow nm$ уже для функций двух аргументов $\Psi_{n'm'}$, $\Psi_{n'm}$, Ψ_{nm} . При сильном ангармонизме, когда имеет смысл учет взаимодействия возбуждений, эффективный радиус связанных двухчастичных состояний с увеличением A существенно уменьшается (в пределе $A \rightarrow \infty$ волновые функции имеют δ -образные особенности $\Psi_{nm} \sim \delta_{nm}$). Поэтому для упрощения расчетов учитываются волновые функции $\Psi_{n'm'}$, $\Psi_{n'm}$, Ψ_{nm} с индексами $n'm'$, $n'm$, nm , относящимися только к одним и тем же или соседним узлам. В связи с относительной громоздкостью расчетов приведем лишь их фрагментарную последовательность. На первом этапе из недиагональных (по индексам) уравнений для $\Psi_{n'm}$ определялось представление $\Psi_{n'm} = f_1(\{\Psi_{\bar{n}'\bar{m}'}\}, \{\Psi_{\bar{n}\bar{n}}\})$ и затем с использованием этой связи находилось представление для недиагональных функций $\Psi_{n' \neq m'} = f_2(\{\Psi_{\bar{n}'\bar{n}'}\}, \{\Psi_{\bar{n}\bar{n}}\})$. С помощью f_1 и f_2 определяется затем представление $\Psi_{n'm} = f_3(\{\Psi_{\bar{n}'\bar{n}'}\}, \{\Psi_{\bar{n}\bar{n}}\})$, и последующая подстановка в диагональные уравнения для $\Psi_{n'n'}$, включающие константу ангармонизма A , дает представление $\Psi_{n'n'} = f_4(\{\Psi_{\bar{n}\bar{n}}\})$.

Используя эти результаты, из диагональных уравнений для Ψ_{nn} находим соответствующее рекуррентное соотношение, связывающее величины $\bar{A}_{i-1} \equiv 2A_{i-1}$ на $i-1$ -м уровне генерации фрактальной структуры и величины $\bar{A}_i \equiv 2A_i$ на i -м уровне генерации. В дальнейшем для уменьшения громоздкости представления вычислений будем использовать те же обозначения E , A для безразмерных приведенных величин $(E - 2E_0)/V$, A/V и введем смещенную величину x_i :

$$x_i \equiv 2A_i + E - S(E), \quad (7)$$

где функция энергии связи $S(E)$ определена соотношением

$$\begin{aligned} S(E) &= 4[a + R(1 + a + b)], \quad b(E) = (E^2 - 1)^{-1}, \quad a(E) = Eb(E), \\ R(E) &= \bar{a}\epsilon(\epsilon + 1)^{-1}(\epsilon - 2)^{-1}, \quad \bar{a}(E) = E(E - 1)^{-1}, \quad \epsilon(E) = E - 2E^{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Рекуррентное соотношение для x_i имеет следующий вид:

$$x_i^3 + \alpha_2(x_{i-1})x_i^2 + \alpha_3(x_{i-1})x_i + \alpha_4(x_{i-1}) = 0, \quad (9)$$

т. е. в отличие от квадратного уравнения (1) для одночастичных состояний [16] рекуррентное соотношение для двухчастичных состояний имеет вид кубического уравнения относительно x_i . Коэффициенты этого кубического уравнения $\alpha_2(x_{i-1})$, $\alpha_3(x_{i-1})$, $\alpha_4(x_{i-1})$, зависящие от x_{i-1} предыдущего уровня генерации, имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_2(x_{i-1}) &= S - t - 8(a + b)(p + 1) - 2qC(x_{i-1}), \quad \alpha_3(x_{i-1}) = \\ &= -2t^2 - tS - 8(a + b)[W(2R + 1) + Q\bar{V} - t(p + 1)] - \\ &- C(x_{i-1})[(2R + 1)(\bar{V} + W) + 2QW - 2qt], \quad \alpha_4(x_{i-1}) = -2t^2S - \\ &- 8t(a + b)[\bar{V}(2R + 1) + Q(2W - \bar{V}) - 2t(p + 1)] - \\ &- 2tC(x_{i-1})[W(2R + 1) + Q\bar{V} - 2qt], \end{aligned} \quad (10)$$

где функции $t(E)$, $p(E)$, $q(E)$, $W(E)$, $\bar{V}(E)$, $Q(E)$ определены соотношениями

$$\begin{aligned} t &= 2[b + (1 + a + b)(R + Q)], \quad q = 2\bar{b}(\epsilon + 1)^{-1}(\epsilon - 2)^{-1}, \quad p = (\epsilon - 1)q, \\ Q &= 2\bar{a}(\epsilon + 1)^{-1}(\epsilon - 2)^{-1}, \quad W = 2[(1 + a + b)(p + q) + (a + b)], \quad \bar{V} = 4q(1 + a + b). \end{aligned} \quad (11)$$

Функция $C(x_{i-1})$ в (10), включающая x_{i-1} предыдущего уровня генерации, имеет следующий вид:

$$C(x_{i-1}) = (a + b)[x_{i-1} + S - 8(\gamma + \delta)](\gamma + 3\delta)^{-1}, \quad (12)$$

где $\delta(E)$ и $\gamma(E)$ имеют представление

$$\delta(E) = (E + 1)^{-1}(E - 2)^{-1}, \quad \gamma(E) = (E - 1)\delta(E).$$

Таким образом, уравнение (9) позволяет относительно просто с помощью ЭВМ последовательно по решениям $x_{i-1, \alpha}$ $i-1$ -го уровня генерации находить спектр значений $x_{i, \beta}$ на i -м уровне, достигая при этом высоких значений i , т. е. большого числа узлов $N_i = 3^i - \sum_{j=1}^{i-1} 3^j$ на фрактальной решетке. При этом, так же как и для одночастичных колебаний [16], наборы $x_{i, \beta}$ собственных значений, получаемых при генерации по схеме (9), не должны включать некоторые выделенные особые точки, поскольку уравнение (9) получено в предположении, что они не являются решениями.

В то же время эти точки как источники генерации должны учитываться соответствующим образом. Напомним, что для одночастичных колебаний эти точки в спектре соответствуют $\varepsilon = -2, -1, 2$ [16]. Точки $\varepsilon = -1, 2$ отвечают полюсам в некоторых промежуточных величинах при выводе (1), т. е. (1) получено при условии $\varepsilon \neq -1, 2$, и этим выделенным точкам в спектре отвечают колебательные состояния определенной симметрии. Аналогичным образом и для двухчастичных состояний существуют выделенные точки в спектре, которые отвечают полюсам функции f_4 в представлении $\Psi_{n'n'} = f_4(\{\Psi_{nn}\})$ (см. выше). Эти точки $x_1 = -t(E)$ и $x_2 = 2t(E)$, где $t(E)$ определено соотношением (11), также отвечают колебательным состояниям определенной симметрии. Эти состояния необходимо соответствующим образом учитывать, т. е. исключать из результатов рекуррентной схемы при каждом шаге генерации, поскольку (9) получено при условии $x \neq x_{1, 2}$, и одновременно включать их в определенной последовательности как входные данные перед каждым последующим шагом генерации. Подробный алгоритм вычислений, в некотором смысле обобщающий соответствующий алгоритм работы [16], который отнюдь, заметим, не ограничивался правилом (1), предполагается опубликовать в дальнейшем.

Описанный вкратце генерационный алгоритм определения спектра собственных значений A_i был реализован на ЭВМ ЕС-1061. При этом параллельно был разработан алгоритм определения спектра собственных значений E_i при фиксированной константе ангармонизма непосредственно из уравнений (5) для фракталов с малыми числами узлов $N=3, 6, 15, 42$ (соответственно $i=0, 1, 2, 3$ уровни генерации). Переход к большим N ограничен уже мощностью ЭВМ (число уравнений (5) порядка N^2). Программа расчета по генерационной схеме (9) с соответствующими коррекциями на особые точки тестировалась по программе расчета собственных значений E_i на малых N . Последнее обстоятельство представляет существенным, поскольку позволило проверить корректность упомянутой выше процедуры учета особых точек. Одновременно были разработаны и реализованы на ЭВМ алгоритм определения спектра одночастичных колебаний по схеме (1) с соответствующими коррекциями на особые точки и тестирующий алгоритм определения спектра одночастичных состояний непосредственно из уравнений, аналогичных (5), но, естественно, для одночастичных состояний. При этом для одночастичных состояний мощность машины для тестирующей программы допускала расчет решетки с $N=123$.

Результаты вычислений непосредственно с графопостроителя ЭВМ ЕС-1061, показывающие некоторые характерные особенности спектра двухчастичных состояний фрактальной решетки, отличающиеся от соответствующих особенностей спектра одночастичных состояний, представлены на рис. 1, 2. На рис. 1, а представлен спектр одночастичных колебательных состояний фрактальной решетки (плотность одночастичных состояний), полученный по схеме (1) с соответствующим учетом особых точек на $i=9$ уровне генерации ($N=3^{10} - \sum_{j=1}^9 3^j = 29\,526$). Особенности этого спектра, визуально состоящего из отдельных дискретных линий и групп линий, повторяющихся при увеличении энергии от $\varepsilon = -2.0$ до $\varepsilon = 4.0$, обсуждались в [16]. Отметим, что вблизи высокочастотного края $\varepsilon \equiv (4 - \varepsilon) \geq 0$ при последовательном многократном увеличении

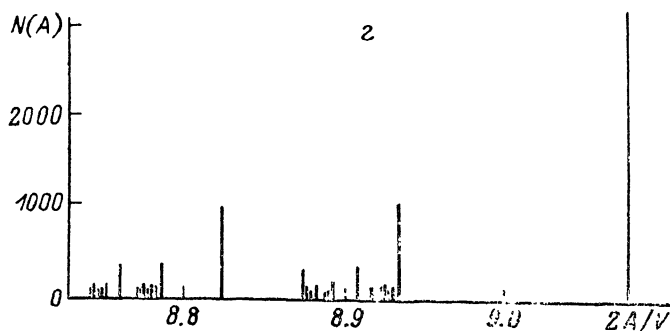
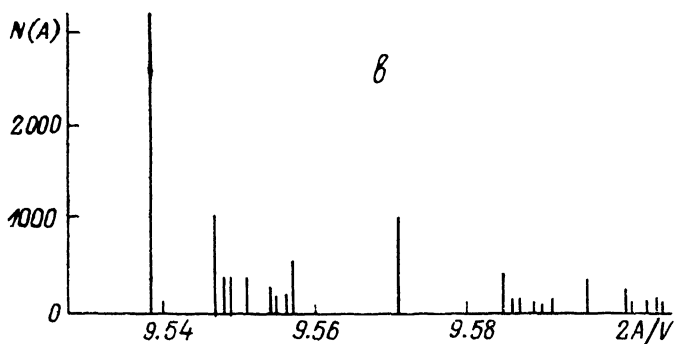
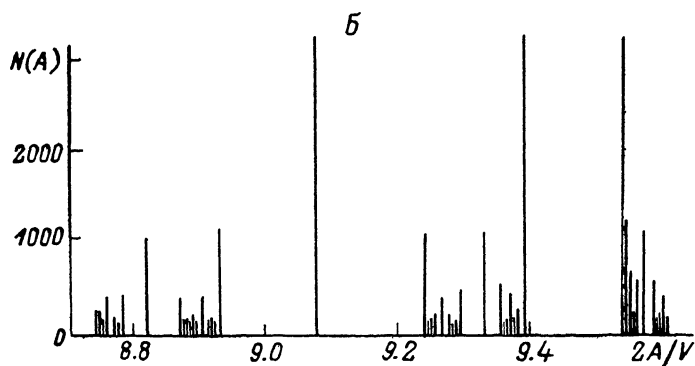
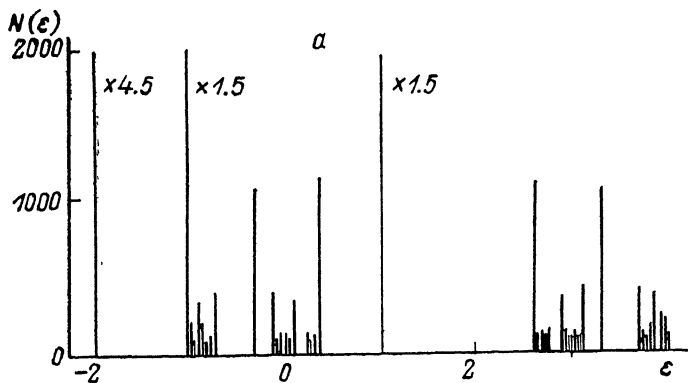


Рис. 1. Спектр одночастичных состояний (а) и спектр значений величины $2A$ при фиксированной энергии связи двухчастичных связанных колебательных состояний (б—г).

масштаба видно скейлинговое самоподобное повторение особенностей спектра с поведением плотности состояний $N(\varepsilon) = \alpha^\nu N(\varepsilon/\alpha)$, где $\alpha=5$ и дробный критический индекс спектральной размерности $\nu = \ln 3 / \ln 5 = 0.68$, т. е. особенности спектра самоподобно повторяются при увеличении масштаба в 5 раз и при этом интенсивность соответствующих пиков уменьшается в 3 раза.

На рис. 1, б представлен спектр значений величины $\bar{A}=2A$ при фиксированной энергии связи $E-2E_0=-10V$, т. е. число значений $\bar{A}_i(N(\bar{A}_i))$, попадающих в канал p : $\bar{A}_p \leq \bar{A}_i < \bar{A}_{p+1}$ ($\bar{A}_{\min} < \bar{A}_p < \bar{A}_{\max}$, $p \leq 200$), $N \simeq 3^{10}$. Фактически при сильном ангармонизме рис. 1, б представляет (с несущественными изменениями оси абсцисс $\bar{A} \rightarrow E$; при $E \simeq 2(E_0 - A)$) плотность двухчастичных колебательных состояний на фрактальной решетке. Визуально полученный спектр, так же как и одночастичный

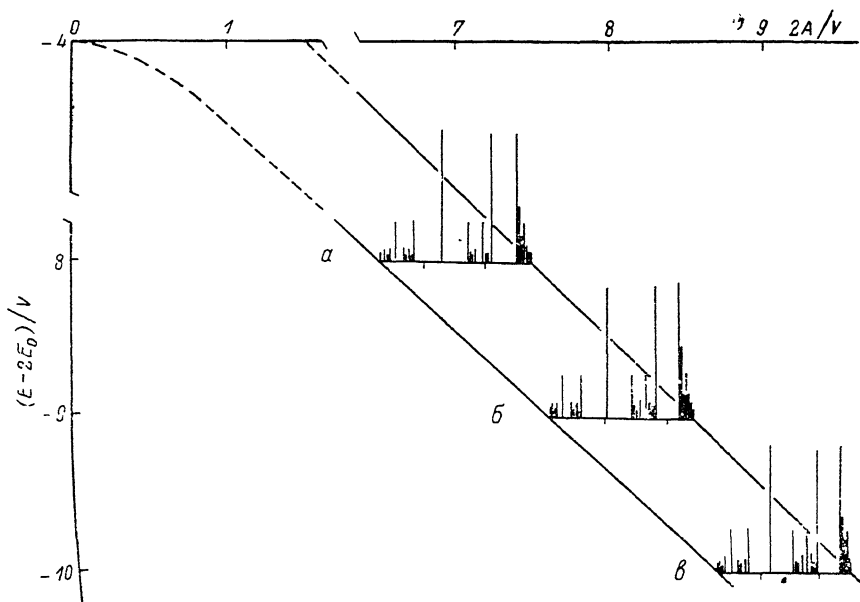


Рис. 2. Плотность связанных двухчастичных состояний при различных значениях энергии связи (константы ангармонизма).

(рис. 1, а), состоит из отдельных монолиний и групп линий. Изолированный пик при $2A/V=9.08$ отвечает выделенным корням $x_2=2t$ (см. выше), пик при $2A/V=9.39$ отвечает выделенным состояниям с $x_1=-t$, и пик при $2A/V=9.54$ отвечает состояниям, подобным одночастичным состояниям с $\varepsilon=-2.0$, но, естественно, не тождественным им. В отличие от одночастичных состояний (рис. 1, а), где скейлинговые особенности наблюдаются на одном высокочастотном краю спектра, в спектре двухчастичных состояний скейлинговые особенности наблюдаются на обоих краях спектра — высокочастотном при $9.54 < 2A/V < 9.61$ и низкочастотном при $8.74 < 2A/V < 9.1$. На рис. 1, в в увеличенном по оси абсцисс масштабе представлен спектр двухчастичных колебательных состояний в области $9.52 < 2A/V < 9.61$, на котором отчетливо видно скейлинговое самоподобное повторение спектральных особенностей. При этом масштабный фактор $\alpha_b=2$ и соответствующее уменьшение интенсивности по-прежнему в 3 раза, так что критический индекс спектральной размерности оценивается как $\nu_b = \ln 3 / \ln 2 = 1.59$. Таким образом, плотность двухчастичных состояний на высокочастотном краю имеет нулевую первую производную и это также визуально отмечается на высокочастотном краю на рис. 1, б. На рис. 1, г в увеличенном масштабе

представлена область низкочастотного края $8.74 < 2A/V < 8.98$. Также видна скейлинговая самоподобная структура спектра с масштабом повторения особенностей $\alpha_{\kappa}=4$ и прежним уменьшением амплитуд в 3 раза, так что критический индекс спектральной размерности ν_{κ} оценивается как $\nu_{\kappa} = \ln 3 / \ln 4 = 0.79$. Таким образом, плотность двухчастичных состояний на низкочастотном краю имеет бесконечную производную и это также визуально отмечается на низкочастотном краю (рис. 1, б). Указанные особенности спектра необходимо учитывать при определении соответствующих кинетических коэффициентов.

На рис. 2 представлены зависимости плотности состояний $N(A)$ при трех различных значениях энергии связи $E - 2E_0 = -8V$ (а), $E - 2E_0 = -9V$ (б), $E - 2E_0 = -10V$ (в). Эти зависимости имеют тот же характер, что и на рис. 1, б-г, и при этом границы спектра в плоскости E, A сдвигаются, приближаясь при уменьшении A к границе полосы двух несвязанных одночастичных состояний $E - 2E_0 = -4V$, аналогично тому, как это имеет место для бифононов в идеальной кристаллической решетке [1-3]. При уменьшении энергии связи $|E - 2E_0|$ высокочастотный край полосы E_{κ} смещается линейно $E_{\kappa} \sim 2(E_0 - A)$, низкочастотный же край E_{κ} смещается к краю полосы диссоциированных двухчастичных состояний при $A=0$ (рис. 2). Плотность состояний при фиксированном значении константы ангармонизма A непосредственно получается сечением полосы найденных состояний (рис. 2) при фиксированной абсциссе. Более детальный анализ показывает, что это дает лишь несущественное линейное преобразование оси абсцисс на рис. 1, б-г.

В настоящей работе отмечены лишь основные особенности спектра связанных двухчастичных колебаний фрактальной решетки, отличающиеся от соответствующих особенностей спектра одночастичных состояний на такой решетке. При этом не обсуждался характер волновых функций колебательных двухчастичных состояний, отвечающих отдельным линиям и группам на рис. 1, 2 (пространственная зависимость, степень локализации и т. д.), что предполагается опубликовать в дальнейшем. Представляет интерес дальнейшее обобщение результатов данной работы применительно к трехмерным фрактальным решеткам типа трехмерного ковра Серпинского, реальным фрактальным структурам различного типа в условиях, когда существенны эффекты ангармонизма колебаний.

В заключение авторы выражают искреннюю признательность В. М. Аграновичу и А. Г. Мальшукову за полезные замечания.

Список литературы

- [1] Agranovich V. M. // Spectroscopy and Excitation Dynamics Condensed Molecular Systems / Ed. V. M. Agranovich, R. M. Hochstrasser. Amsterdam, North-Holland, 1983. P. 83-175.
- [2] Агранович В. М., Ладов И. Й. // УФН. 1986. Т. 146. № 2. С. 267-302.
- [3] Agranovich V. M., Dubovsky O. A. // Optical Properties of Mixed Crystals / Ed. R. J. Elliott, I. P. Ipatova. Amsterdam, North-Holland, 1988. P. 297-398.
- [4] Agranovich V. M., Dubovsky O. A., Orlov A. V. // Phys. Lett. A. 1986. V. 119. N 2. P. 83-88.
- [5] Agranovich V. M., Dubovsky O. A., Orlov A. V. // Sol. St. Comm. 1989. V. 70. N 6. P. 675-681.
- [6] Agranovich V. M., Dubovsky O. A., Orlov A. V. // Sol. St. Comm. 1989. V. 72. N 5. P. 491-496.
- [7] Ikeda S., Watanabe N. // KEK Preprint. 1986. N 66. 30 p.
- [8] Anderson I. S., Rush J. J., Uvodic T., Rowe J. M. // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57. N 22. P. 2822-2827.
- [9] Goyal P. S., Penfold J., Tomkinson J. // Chem. Phys. Lett. 1986. V. 127. N 5. P. 483-486.
- [10] Hempelman R., Richter D., Price D. L. // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. N 10. P. 1016-1019.
- [11] Жижин Г. Н., Москалева М. А., Шафрановский П. А., Шуб Б. Р. // Поверхность. 1987. В. 7. С. 141-143.
- [12] Richter L. J., Germer T. A., Sethna J. P., Ho W. // Phys. Rev. B. 1988. V 38. N 15. P. 10403-10420.

- [13] Фракталы в физике. Тр. VI Междунар. симпозиума по ффракталам в физике / Под ред. Л. Пьетронеро, Э. Тозатти. М.: Мир. 1988. 670 с.
- [14] Page J. N., Harrison J. P. // Phys. Rev. B. 1989. V. 39. N 9. P. 6120—6135.
- [15] Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature. San-Francisco, Freeman, 1982. P. 237.
- [16] Domany E., Alexander S., Bensimon D., Kadanoff L. P. // Phys. Rev. B. 1983. V. 28. N 6. P. 3110—3123.
- [17] Мальшуков А. Г. // Письма в ЖЭТФ. 1987. Т. 46. № 2. С. 65—67.

Поступило в Редакцию
10 октября 1989 г.
