1990 ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА Том 32, № 5
1990 SOLID STATE PHYSICS Vol. 32, N 5

УДК 538.22

НЕОДНОМЕРНЫЕ УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ В КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕДАХ

М. З. Песенсон

Для широкого класса нелинейных задач физики твердого тела (нелинейные волны в доменных границах, самофокусировка магнитоакустических солитонов, нелинейные волны на джозефсоновских вихрях и т. д.) описана эволюция возмущений, бегущих по фронту солитонов. Выведены уравнения, учитывающие конечную амплитуду и конечную длину волны поперечных возмущений. Получены условия устойчивости солитонов относительно многомерных возмущений. Вычислен спектр колебаний солитонов.

Развитие физики магнитоупорядоченных сред [1], теории дислокаций [2], теории роста кристаллов (например, формирование макроступеней на вицинальных поверхностях в процессе роста кристаллов [3]), электродинамики сверхпроводящих туннельных контактов [4] ставит широкий круг задач, связанных с описанием интенсивных волновых полей. Основные достижения при решении этих задач связаны с использованием развитых в последнее время мощных методов решения нелинейных одномерных задач. Однако реальная среда неоднородна и на динамику нелинейных волн оказывают существенное влияние рефракция, геометрическая расходимость и т. п. Действительно, реальная волна не является строго одномерной — ее параметры меняются вдоль фронта. Таким образом, вопросы поперечной устойчивости (более обще — вопрос о характере эволюции поперечных возмущений на их фронте) представляют несомненный как теоретический, так и практический интерес для самых разнообразных разделов физики твердого тела.

В настоящей работе для широкого класса задач физики твердого тела описывается динамика возмущений на фронте уединенных волн (самофокусировка), причем для экспоненциальных солитонов учитываются нелинейность и конечность длины волны возмущения.

В работе [5] было впервые выведено уравнение, описывающее квазидвумерные слабонелинейные волны с учетом малой дисперсии, и исследована устойчивость солитона Кортевега де Вриза (КДВ) относительно малых, бесконечно длинных поперечных возмущений. В средах с положительной дисперсией солитон оказался неустойчивым, а в средах с отрицательной дисперсией — устойчивым. В работе [6] на основе метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) была учтена длина волны возмущений, что привело к появлению порога неустойчивости для положительной дисперсии. В работе [7] рассматривалась задача об эволюции малых поперечных возмущений на фронте солитонов и ударных волн на основе метода многих масштабов (МММ). В частности, в случае уравнения Кадомцева—Петвиашвили (КП) был найден тот же, что и в [6], закон дисперсии колебаний солитона и показано образование «хвоста» сзади солитона. В работе [8] при помощи МОЗР было показано, что слабое затухание моды со временем в сочетании со слабым ростом по пространственной переменной на одной из бесконечностей присуще любой гамильтоновой системе и следует из закона сохранения энергии системы.

Ставя задачу описать самофокусировку солитонов с учетом длины волны и амплитуды поперечных возмущений, мы не можем воспользоваться методикой работы [5] — она позволяет получить только волновое уравнение для возмущений. Подход же, использованный в работе [6], позволяет учесть только длину волны возмущения (но не амплитуду) и основан на МОЗР, который имеет пока ограниченное применение в неодномерных задачах и также дает ответ только для уравнения КП.

1. Постановка задачи и вывод уравнения для малых возмущений

При описании интенсивных волновых процессов в конденсированных средах возникают различные (в зависимости от физики описываемых явлений) нелинейные уравнения. Объединим их в следующие классы

$$u_{xt}+\partial^2_{xx}M[u]=\Delta_\perp u,\qquad u_{tt}+\partial^2_{xx}M\,[u]=\Delta_\perp u, \tag{1), (2}$$

$$\Delta_\perp=\partial^2_{yy}+\partial^2_{zz},$$

здесь $M[u]$ — некоторый интегродифференциальный оператор, такой, что уравнения (1), (2) обладают однопараметрическими стационарными решениями в виде бегущей уединенной или ударной волны вида $u_0\,(x—ct)$, устойчивыми в рамках одномерных уравнений. В качестве примеров будем использовать следующие уравнения, возникающие в физике твердого тела и принадлежащие классам (1), (2). Уравнение КП с произвольной нелинейностью

$$\partial_x\,(u_t+u^pu_x+u_{xxx})=-\beta^2\Delta_\perp u,$$

$$u_0=[v\,(p+1)\,(p+2)/2]^{1/p}\operatorname{sech}^{2/p}(\theta/\gamma),\qquad \gamma=2\sqrt{2}/pv^{1/2},\qquad \theta=x-ct, \tag{3}$$

при $p=2$ это уравнение возникает при рассмотрении задач магнитоупругости в антиферромагнетиках [9], в задаче Ферми—Паста—Улама (посвященной исследованию нелинейных дискретно нагруженных струн) с кубичным законом для сил взаимодействия между частицами.

Неодномерное уравнение Бюргерса — уравнение Заболотской—Хохлова—Кузнецова (ЗХК)

$$\partial_x\,(u_t+uu_x-\mu u_{xx})=-c/2\cdot\Delta_\perp u,\qquad u_0=v\,[1-\operatorname{th}(v\theta/2\mu)]. \tag{4}$$

Уравнение ЗХК возникает при распространении нелинейного звукового пучка в кристалле [10] (описание этих волн позволяет, например, измерять упругие константы материалов). Уравнение Бюргерса возникает также при нелинейном взаимодействии волн деформации с движущимися электронно-дырочными каплями [11], при описании формирования макроступеней в процессе роста кристаллов [3]. В связи с этим отметим, что обычно слабодвумерные обобщения нелинейных уравнений имеют столь же широкую область применения, что и их одномерные аналоги.

Двойное уравнение sin-Гордона (ДСГ)

$$u_{tt}-c^2u_{xx}+\lambda^2\sin u+\gamma\sin 2u=c^2\Delta_\perp u,$$

$$u_0=4\operatorname{arctg}\exp\left(\frac{x-vt}{\delta}\right),\qquad \delta=\frac{c}{\lambda}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}. \tag{5}$$

Уравнение (5) описывает при $\gamma=0$ динамику джозефсоновских вихрей [4], нелинейные волны намагниченности в магнитоупорядоченных средах [1]. Решение u_0 — пример солитона типа «кинка». При $\gamma\neq0$ уравнение (5) описывает магнитоакустические солитоны [9] и спиновые волны в антиферромагнетиках вблизи точки спиновой переориентации. Частными случаями (1), (2) являются также неодномерные версии уравнений Клейна—Гордона с произвольной нелинейностью, Бенжамена—Оно (БО), Буссинеска.

Будем искать решение уравнений (1), (2) в виде следующего асимптотического ряда:

$$u = u_0(\theta + \alpha(T_i, Y_i)) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(\theta + \alpha;\ T_i,\ Y_i), \quad |\alpha| \ll 1, \tag{6}$$

$$\theta = A/2 \cdot (x - A^2 t).$$

Здесь $\varepsilon \ll 1$ — безразмерный параметр, характеризующий отношение дифракции и нелинейности; T_i, Y_i — медленные координаты, определяемые как $T_i = \varepsilon^i t$. Как обычно, в методе многомасштабных разложений решение в виде (6) подставляется в исходные уравнения (1), (2). Последовательно приравнивая члены при одинаковых степенях ε, находим u_i как функцию θ, T_i, Y_i. Условия отсутствия секулярности в каждом порядке по ε дают уравнения для возмущений, справедливые на соответствующих пространственно-временных масштабах. Нашей задачей являются получение и анализ уравнений, справедливых на масштабах $O(\varepsilon^{-3})$.

Сделаем несколько замечаний относительно предложенной асимптотической процедуры.

Обычно при использовании метода возмущений делается предварительное предположение о старшем члене аппроксимирующего ряда. Например, предполагается, что движение адиабатично и берется форма медленно меняющейся уединенной волны. Как отмечается в работе Ньюэлла [12], это не всегда верно, так как в главном члене решение может содержать и неадиабатическую часть.

Наше разложение, как будет видно из дальнейшего, может быть записано в следующем виде:

$$u = (1 - \varepsilon A^{-2}\alpha_{T_1}(T_i,\ Y_i))\, u_0(\theta + \alpha(T_i,\ Y_i)) - \varepsilon A^{-2}\alpha_{T_1} \frac{\theta}{2} u_0'(\theta + \alpha;\ T_i,\ Y_i) + O(\varepsilon^2).$$

Здесь второе слагаемое имеет тот же порядок, что и адиабатическая амплитуда, и характеризует неадиабатическую часть. В частности, эта неадиабатическая добавка дает вклад как в нелинейный, так и в «диффузионный» члены уравнения для u. Это говорит о том, что нелинейность и диффузия (возмущений) не могут быть учтены аддитивно как два малых независимых эффекта. Последнее обусловлено характером рассматриваемой асимптотики: параметр Урселла $U \sim 1$ (ширина фронта ~ 1), дифракционный параметр $D \to 0$.

Выведем уравнение для $\alpha(T_i,\ Y_i)$ на примере уравнения КП. Подставляя разложение (6) в уравнение КП, группируя члены одного порядка по ε и пренебрегая высшими степенями α (линейное приближение), получим

$$L_0[u_0] = 0, \qquad L[u_1] = -\alpha_{T_1}(T_i,\ Y_i)\, u_0'', \tag{7), (8}$$

$$L[u_2] = -\alpha_{T_2} u_0'' - \alpha_{T_1} u_1'' - u_{1T_1}' - \beta^2 \alpha_{Y_1 Y_1} u_0', \tag{9}$$

$$L[u_3] = -\alpha_{T_2} u_1'' - u_{1T_2}' - u_{2T_1}' - \beta^2 u_{1Y_1Y_1} - 2\beta^2 \alpha_{Y_1 Y_2} u_0', \tag{10}$$

$$L_0\psi \equiv -A^2 \partial_{\theta\theta}^2 \psi + \partial_{\theta\theta}^2 (\psi^2 + \psi_{\theta\theta}), \qquad L\psi \equiv -A^2 \partial_{\theta\theta}^2 \psi + \partial_{\theta\theta}^2 (u_0 \psi + \psi_{\theta\theta}),$$

условия отсутствия секулярных членов в (7)—(10) суть условия ортогональности правых частей уравнений (7)—(10) к нулевой собственной функции ψ оператора L^*, сопряженного к L

$$\psi = \int_{-\infty}^{\theta} u_0(\theta)\, d\theta = 6A(\operatorname{th}\theta - 1), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\theta)\, R_n'' d\theta = 0, \tag{11}$$

где R_n'' — правые части уравнений (7)—(10). Отсюда легко видеть, что для членов в R_n, имеющих ту же четность, что и u_0, достаточным условием ортогональности является стремление $R_n(\theta)$ при $|\theta| \to \infty$ к константам или «достаточно медленное» возрастание; произвольные константы (точнее, функции от медленных переменных), возникающие в (7)—(10), устраняются требованием убывания $u_i(\theta)$ на бесконечности. Решая уравнения (7), (8), получим

$$u_0 = 3A^2 \operatorname{ch}^{-2}\left[\frac{A}{2}(x - A^2 t)\right], \quad u_1 = -a_{T_1}(T_i,\ Y_i)\, a_{11}(\theta),$$

$$a_{11}(\theta) = A^{-2}\left[u_0(\theta) + \frac{\theta}{2} u_0'(\theta)\right].$$

Применяя условие ортогональности (11) к правой части (9) и приравнивая нулю не ортогональные члены, находим

$$\gamma_1 a_{T_1 T_1} - \gamma_2 a_{Y_1 Y_1} = 0, \quad \gamma_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi a_{11}' d\theta, \quad \gamma_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi u_0' d\theta, \tag{12}$$

где $L^* \psi = 0$. Уравнение (12) описывает линейную эволюцию возмущений в приближении геометрической оптики. Оно применимо на масштабах $O(\varepsilon^{-1})$. Если $\gamma_2/\gamma_1 < 0$, то из (12) следует, что солитон неустойчив, возмущения всех масштабов растут экспоненциально, причем инкремент неограниченно возрастает с ростом поперечного волнового числа. Уравнение (12) и следующий из него критерий неустойчивости были впервые получены в [5, 6] для солитонов КП, для произвольных однопараметрических в [7].

Решая уравнение (9), найдем

$$u_2 = -a_{T_2} a_{11}(\theta) + a_{T_1 T_1} a_{21}(\theta) + C_1(T_i,\ Y_i)\, a_{22}(\theta) - \beta^2 a_{Y_1 Y_1} a_{24}(\theta),$$

$$a_{21} = H\left[\int a_{11}(\theta)\, d\theta\right] = 3A^{-3}\left[\frac{1}{2}\operatorname{th}\theta + \theta \operatorname{ch}^{-2}\theta - \frac{\theta^2}{2}\operatorname{sh}\theta \operatorname{ch}^{-3}\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sh}\theta \operatorname{ch}\theta\right],$$

$$a_{22}(\theta) = H[1] = -2A^{-2}\left[-\operatorname{ch}^{-2}\theta + \frac{3}{2}\theta \operatorname{sh}\theta \operatorname{ch}^{-3}\theta + \frac{1}{2}\operatorname{th}^2\theta\right],$$

$$H(\varphi) \equiv u_0' \int \frac{1}{(u_0')^2}\left[\int u_0' \varphi\, d\theta\right] d\theta.$$

Нетрудно видеть, что условие ортогональности (12) приводит к сокращению секулярного члена $a_{24}(\theta)$ с соответствующим секулярным слагаемым в $a_{21}(\theta)$. Заметим, что для $u_2(\theta)$ нельзя удовлетворить однородным краевым условиям одновременно на $+\infty$ и $-\infty$. $C_1(T_i,\ Y_i)$ находится из условия $u_2 \to 0$ при $\theta \to +\infty$ в случае отрицательной дисперсии и при $\theta \to -\infty$ в случае положительной. Используемое разложение не является равномерно пригодным — им не описывается структура «хвостов». Следует отметить, что возникающий «хвост» имеет порядок $\sim \varepsilon^2$, в то время как амплитуда возмущения $\sim \varepsilon$.

Условие ортогональности в третьем порядке дает уравнение для

$$a_{T_1 T_2} - c^2 a_{Y_1 Y_2} - \mu a_{T_1 Y_1 Y_1} = 0, \tag{13}$$

$$\mu = \frac{1}{2\gamma_1}\left[\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi a_{21}' d\theta + 2\beta^2 A \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi a_{22}' d\theta - \beta^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi a_{11} d\theta\right].$$

В случае экспоненциальных солитонов все несобственные интегралы в (13) существуют. Действительно, $a_{11}(\theta)$, $a_{2j}'(\theta)$ при $|\theta| \to \infty$ стремится к нулю экспоненциально. Для $a_{2j}'(\theta)$ это следствие того, что выполнено условие ортогональности во втором порядке. Из приведенного вывода следует, что уравнение типа (13) может быть получено для произвольных экспоненциальных солитонов. Действительно, подставляя разложение (6) в (1), (2), получаем уравнение типа (7)—(10), где решения должны удовлетворять однородным краевым условиям. Далее $R_1 \sim a_{T_1}$ и решение u_1 можно записать в виде некоторого линейного оператора H от правой части уравнения (8). Линейность H следует из линейности L ($L\varphi = 0$ — линеаризованное на фоне $u_0(\theta)$ исходное уравнение)

$$u_1 = H[-a_{T_1} u_0] = a_{T_1} a_{11}(\theta).$$

Предположим, что $u_0''(\theta)$ ортогонально к сопряженной собственной функции $\psi(\theta)$; это имеет место для всех солитонных решений, перечисленных в (1), (2). Последнее обеспечивает нетривиальность $\alpha(T_i; Y_i)$. Аналогично для $u_2(\theta; T_i; Y_i)$. Применяя условие ортогональности (11) во втором порядке, получаем уравнение (12) (в рассмотренных нами уравнениях последний член в (9) ортогонален $\psi(\theta)$), где

$$\gamma_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi \partial_\theta a_{11}(\theta)\, d\theta, \quad \gamma_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi u_0'(\theta)\, d\theta,$$

условие ортогональности в третьем порядке дает уравнение (13), коэффициенты которого в общем случае в квадратурах не выражаются и здесь не приводятся из-за громоздкости.

Приведенные наводящие соображения нельзя, конечно, рассматривать как общий строгий вывод. Далее будет видно, что в случае неэкспоненциальных солитонов (кинков) возникает уравнение, отличное от (13).

Приведем в качестве примера коэффициенты линеаризованного уравнения Бюргерса для КП

$$c_0 = 2/\sqrt{3} \cdot A\beta, \quad \mu = {}^2/_3 A^{-1}\beta^2.$$

Приведем окончательный вид уравнений для $\alpha(T_i, Y_i)$ в исходных переменных

$$\alpha_{tt} - c_0^2 \Delta_\perp \alpha - \mu \Delta_\perp \alpha_t = 0. \tag{14}$$

Здесь c_0 имеет смысл длинноволнового предела скорости распространения инфинитизимальных возмущений (в среде с положительной дисперсией c_0 — чисто мнимая величина; в среде с отрицательной дисперсией или диссипацией $c_0^2 > 0$); $\mu\Delta_\perp \alpha_t$ — диссипативный член, возникающий вследствие дифракции, обусловленной конечностью поперечного масштаба возмущений.

Для уравнений ЗХК, БО одномерные решения которых не убывают на бесконечности (или убывают неэкспоненциально, как, например, солитон уравнения БО), формулы (13) для расчета коэффициентов в уравнении для возмущений не применимы и дают расходимость. В результате для перечисленных уравнений удается построить (в рамках данной схемы) приближенное решение только с точностью до $O(\varepsilon^{-2})$ (относительно уравнения СГ см. ниже).

2. Эволюция малых возмущений на фронте уединенных волн

Начнем с исследования одномерного уравнения (14). На масштабах порядка самого возмущения $O(\varepsilon^{-1})$ начальные возмущения разбегаются по характеристикам (согласно уравнению (12), влияние диссипации сказывается на масштабах $O(\varepsilon^{-2})$ и его естественно учитывать в одноволновом приближении). В этом приближении, учитывая, что возмущенная амплитуда $V \simeq \alpha_{T_1}(T_i, Y_i)$ (7), получаем непосредственно из (14) линеаризованное уравнение Бюргерса для возмущенной амплитуды

$$V_t - c_0 V_y - \mu V_{yy} = 0.$$

В рамках двумерного уравнения (14), возникающего в трехмерных задачах, в отличие от ситуации одномерного распространения локализованное начальное возмущение не полностью убегает из начально возмущенной области фронта.

С точки зрения вопроса об устойчивости плоских солитонов и ударных волн по отношению к одномерным и двумерным поперечным возмущениям, из вышесказанного следует, что если плоская волна устойчива по отношению к одномерным поперечным возмущениям, то она устойчива и по отношению к двумерным. Как одномерные, так и двумерные возмущения затухают, причем двумерные затухают быстрее (за счет цилиндрической расходимости). Находя c_0, нетрудно получить, что солитоны (5) — решения уравнения СГ — всегда устойчивы, солитоны (3) — решения МКП — устойчивы.

В неустойчивом случае ($c_0^2 < 0$) нет эффективного способа построения решений, отвечающих произвольным начальным условиям. В случае одномерной версии решение задачи Коши для (14) полностью определяется линейным дисперсионным соотношением

$$\omega^2 = c_0^2 k^2 - \mu k^2 \omega, \quad V \sim \exp i\,[-\omega t - ky].$$

Рассмотрим инкремент Г, характеризующий неустойчивость возмущений. Легко видеть, что существует пороговое значение волнового числа k, равное $k_{пор} = c_0/\mu$ ($\Gamma(k_{пор}) = 0$). При $k > k_{пор}$ $\Gamma > 0$, при $k < k_{пор}$ $\omega^2 < 0$. Пороговое значение $k_{пор}$ находится при приравнивании двух членов асимптотического ряда, что, строго говоря, некорректно. Косвенным подтверждением возможности использовать найденное значение $k_{пор}$ в качестве оценочного является совпадение дисперсионного соотношения (26) для случая КП с полученными другими, неасимптотическими методами [6].

Другой важнейший масштаб, определяемый дисперсионным соотношением, — это k_{max}, соответствующий максимальному значению инкремента Γ_{max}

$$k_{max} = \frac{1}{2} k_{пор} = \frac{1}{2} \frac{|c_0|}{\mu}, \quad \Gamma_{max} = -\frac{1}{4} \frac{c_0^2}{\mu}.$$

Таким образом, учет конечности длины возмущения позволяет найти границы области неустойчивости, выделить наиболее неустойчивый масштаб, оценить соответствующее ему значение инкремента. Приведем в качестве примера значения порогового волнового числа и максимального инкремента для солитонов КП

$$k_{пор} = c_0/\mu = (\sqrt{3}/4)\,A, \quad \Gamma_{max} = -{}^1/_8 A^{3/2}.$$

3. Эволюция конечных возмущений

Оставаясь в рамках линейной теории, нельзя построить достаточно общую теорию устойчивости солитонов; независимо от вопросов устойчивости нелинейная эволюция возмущений на фронте уединенных волн имеет большое самостоятельное значение. Для учета конечности амплитуды возмущения откажемся от предположения, что $|\alpha| \ll 1$ (см. (6)).

С учетом конечности амплитуды возмущения получим искомое нелинейное уравнение для амплитуды возмущения

$$\alpha_{tt} - c_0^2 \Delta_\perp \alpha + [\lambda_1 (\alpha_t)^2 + \gamma_1 (\alpha_y)^2 + \gamma_1 (\alpha_z)^2]_t - \mu \Delta_\perp \alpha_t = 0. \tag{15}$$

Из (15) получим в одноволновом приближении уравнение Бюргерса $\alpha_{T_1} \equiv V$

$$V_t \pm c_0 V_y + \lambda V V_y - \mu V_{yy} = 0,$$

$$\lambda = \frac{1}{2\gamma_1} \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} \left[-2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi a'_{23} d\theta + 5\beta^2 \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi (a_{11} a_{21})'' d\theta - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi a''_{21} d\theta \right]. \tag{16}$$

В случае уравнения КП

$$\lambda = \frac{A^{-1}}{2\sqrt{3}} \left(\frac{2}{5} \pi^2 - \frac{13}{2} \right).$$

Нелинейность в (15) приводит к росту высших гармоник, убегающих из возмущенной области и уносящих энергию. Уже вторая гармоника наиболее неустойчивого возмущения лежит вне области неустойчивости по k ($2k_{max} = 4/3\ k_{пор}$).

Уравнение (16) хорошо изучено, известно большое количество его точных решений [2]. Для нас является важным, что асимптотиками широкого класса начальных возмущений являются слабые ударные волны огибающей, интегрально зависящие от начальных условий. Ширина фронта этих ударных волн определяется параметром высокочастотной диссипации. Таким образом, уравнение (16) позволяет описать внутреннюю структуру слабых ударных волн огибающей. Рассмотрим, например, решение уравнения Бюргерса в виде стационарной ударной волны, связывающей различные состояния

$$\alpha = \boldsymbol{a}\left[1 - \operatorname{th}\frac{a\theta}{2\mu}\right].$$

Подобное решение описывает скачок амплитуды и скорости солитона, при этом фаза α (T_i, Y_i) при $Y \to \pm\infty$ стремится к разным пределам a, 0 (изгиб фронта). Подставляя разложение (6) в уравнение (5), получим во втором порядке по ε

$$V_t - \lambda_2 V_y - \lambda_3 V V_y = 0,$$

$$\lambda_2 = c\Big/\left[1 - \frac{v^2}{2(v^2 - c^2)}\right]^{1/2}, \quad \lambda_3 = \frac{v^3 \lambda_2^3 \delta}{4(v^2 - c^2)^2 c^2}.$$

Это так называемое уравнение простой волны, которое подробно исследовано [2].

4. Обсуждение результатов

Имеется большое количество объектов физики твердого тела (перечисленных в начале статьи), которые описываются одномерными солитонами (решениями одномерных уравнений (1), (2)).

Целью данной работы было исследование влияния неодномерности на динамику плоских солитонов. Полученные в данной работе результаты позволяют описать такие явления, как нелинейные спиновые волны, распространяющиеся в доменных границах слабых ферромагнетиков [13, 14], нелинейные колебания джозефсоновских вихрей и др. В частности, с последней задачей тесно связана проблема расчета уширения линии излучения джозефсоновских контактов при учете пространственного изменения поля в переходе [4].

Выше получены условия устойчивости уединенных волн относительно многомерных возмущений и описана эволюция возмущений конечной амплитуды и длины волны на фронте солитонов. Вычислен спектр колебаний солитонов. Вычислены граница области неустойчивости, наиболее неустойчивый масштаб и соответствующее ему значение инкремента. Описан эффект образования ударных волн огибающей экспоненциальных солитонов конечной ширины (параметр Урселла ~ 1). Получено описание внутренней структуры вторичных ударных волн [2]. Показано, что конечная ширина их фронта определяется высокочастотной диссипацией, обусловленной «диффузией» возмущений по фронту солитона. Полученные вторичные ударные волны соответствуют тройной точке при маховском отражении нелинейных волн и позволяют описывать нерегулярное взаимодействие косых солитонов [2].

Предложенный в данной работе подход является обобщением традиционной квазиоптики на случай модуляции сильно нелинейных волн — солитонов.

В заключение выражаю благодарность Г. И. Баренблатту за подробное обсуждение результатов, М. Д. Спектору за критические замечания и А. Е. Боровику за обсуждение результатов и вопросов, связанных с самофокусировкой кинков.

Список литературы

[1] Косевич А. М., Иванов Б. А., Ковалев А. С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. Киев, 1983. 230 с.
[2] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М., 1977. 568 с.

[3] Барьяхтар В. Г., Боровик А. Е., Кагановский Ю. С. // Письма в ЖЭТФ. 1988. Т. 47. № 8. С. 396—399.
[4] Кулик И. О., Янсон И. К. Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. М., 1970. 272 с.
[5] Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. // ДАН СССР. 1970. Т. 192. № 4. С. 753—756.
[6] Захаров В. Е. // Письма ЖЭТФ. 1975. Т. 22. № 7. С. 364—367.
[7] Песенсон М. З. // Изв. вузов, радиофизика. 1983. Т. 26. № 7. С. 504—506.
[8] Бурцев С. П. // ЖЭТФ. 1985. Т. 88. № 2. С. 461—469.
[9] Ожогин В. И., Преображенский В. Л. // УФН. 1988. Т. 155. № 4. С. 593—622.
[10] Заболотская Е. А. // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 1. С. 61—64.
[11] Гусев В. Э. // Письма в ЖЭТФ. 1987. Т. 45. № 6. С. 288—291.
[12] Ньюэлл А. Солитоны / Под ред. А. Буллара, Ф. Кодри. М., 1984. 458 с.
[13] Звездин А. К., Попков А. Ф. // Письма в ЖЭТФ. 1984. Т. 39. № 8. С. 348—351.
[14] Pesenson M. Z., Borovik A. E. // Phys. Lett. 1989 (in press).

ПО «Саратовнефтегеофизика»
Саратов

Поступило в Редакцию
17 июля 1989 г.
В окончательной редакции
14 декабря 1989 г.