1990 ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА Том 32, в. 1
1990 SOLID STATE PHYSICS Vol. 32, N 1

УДК 538.221

СОЛИТОНЫ В МОДУЛИРОВАННОЙ МАГНИТНОЙ СТРУКТУРЕ MnOOH И ИЗОМОРФНЫХ ЕМУ СОЕДИНЕНИЙ

А. Б. Борисов, В. В. Киселев

Исследован спектр спиновых волн и предсказаны солитоноподобные возбуждения в модулированной магнитной структуре моноклинных антиферромагнетиков (пространственная группа $C_{2h}^2-P2_1/m$). Получены эффективные уравнения нелинейной динамики.

При феноменологическом описании модулированных магнитных структур (ММС) в моноклинных антиферромагнетиках (пространственная группа $C_{2h}^2-P2_1/m$) в выражении для свободной энергии используются [1] инварианты, линейные по пространственным производным от двух неприводимых магнитных векторов. Такой новый механизм образования ММС может быть реализован в соединениях типа MnOOH, DyOOH [2] или их аналогах $Mn_{1-x}A_xOOH$ (A — немагнитный ион). Учитывая, что ММС соединения MnOOH — одномерна, выражение для свободной энергии перепишем в виде [1]

$$F=\frac{1}{2}\int d\xi\,\{\alpha(\partial_\xi M)^2+\alpha''(\partial_\xi L)^2+\delta M^2+\delta'' L^2+D(M\partial_\xi L-L\partial_\xi M)\}. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{M}=\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2$, $\mathbf{L}=\mathbf{M}_1-\mathbf{M}_2$ — векторы ферро- и антиферромагнетизма соответственно ($\mathbf{M}_i$ — намагниченности двух подрешеток системы, $M_i^2=M_0^2=\mathrm{const}$, $i=1, 2$); ξ — координата вдоль направления пространственных градиентов; феноменологические постоянные α, α'', δ, δ'', D имеют обменное происхождение; $\alpha>0$, $\alpha''>0$. Очевидно, что обменное приближение (1) не фиксирует плоскость разворота векторов $\mathbf{M}_i$ в равновесном состоянии. В дальнейшем считаем, что в основном состоянии векторы $\mathbf{M}_i$ лежат в плоскости (x, y), и используем параметризацию

$$\mathbf{M}_i=(\cos\theta_i\cos(\gamma\xi+\varphi_i),\ \cos\theta_i\sin(\gamma\xi+\varphi_i),\ \sin\theta_i)\,M_0 \quad (i=1,\ 2). \qquad (2)$$

Общий случай может быть получен умножением (2) на определенную ортогональную матрицу, не зависящую от ξ, t.

Свободная энергия в переменных θ_i, φ_i имеет вид

$$F=\frac{M_0^2}{2}\int d_\xi\,\{(\alpha+\alpha'')\,[(\partial_\xi\theta_1)^2+(\partial_\xi\theta_2)^2+\cos^2\theta_1(\partial_\xi\varphi_1+\gamma)^2+\cos^2\theta_2(\partial_\xi\varphi_2+\gamma)^2]+$$
$$+2(\alpha-\alpha'')\,[\partial_\xi\theta_1\partial_\xi\theta_2(\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\Phi+\cos\theta_1\cos\theta_2)+(\partial_\xi\varphi_1+\gamma)(\partial_\xi\varphi_2+\gamma)\times$$
$$\times\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\Phi-\partial_\xi\theta_1(\partial_\xi\varphi_2+\gamma)\sin\theta_1\cos\theta_2\sin\Phi+\partial_\xi\theta_2(\partial_\xi\varphi_1+\gamma)\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\Phi]+$$
$$+2(\delta-\delta'')(\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\Phi+\sin\theta_1\sin\theta_2)+2D\,[\partial_\xi\theta_1(-\cos\theta_2\sin\theta_1\cos\Phi+$$
$$+\sin\theta_2\cos\theta_1)+\partial_\xi\theta_2(\cos\theta_1\sin\theta_2\cos\Phi-\sin\theta_1\cos\theta_2)-(\partial_\xi\varphi_2+\gamma)\cos\theta_1\cos\theta_2\sin\Phi-$$
$$-\cos\theta_2\cos\theta_1\sin\Phi(\partial_\xi\varphi_2+\gamma)]\}, \qquad (3)$$

$$\Phi=\varphi_1-\varphi_2.$$

Минимизация энергии (3) дает углы θ_i, Φ, описывающие ММС и волновой вектор спирали γ

$$\theta_i = 0, \quad \operatorname{ctg}\frac{\Phi}{2} = \frac{-\alpha\alpha''(\delta-\delta'') + [\alpha\alpha''(D^2+(\delta-\delta'')(\alpha-\alpha''))]^{1/2}}{\alpha(D^2+\alpha(\delta-\delta''))}, \tag{4}$$

$$\gamma = \frac{1}{2} D \sin\Phi\left(\alpha\cos^2\frac{\Phi}{2} + \alpha''\sin^2\frac{\Phi}{2}\right)^{-1}. \tag{5}$$

ММС реализуется в области температур, определяемой условиями

$$\delta > 0, \quad \delta'' > 0, \quad D \geqslant (\alpha\delta'')^{1/2} + (\alpha''\delta)^{1/2}, \quad \nu_1 \leqslant \operatorname{ctg}^2\frac{\Phi}{2} \leqslant \nu_2,$$

$$\nu_{1,2} = (2\alpha\delta)^{-1}\{-(\alpha''\delta+\alpha\delta''-D^2) \pm [(\alpha\delta''+\alpha''\delta-D^2)-4\alpha\alpha''\delta\delta'']^{1/2}\}. \tag{6}$$

При $\delta=0$, $\delta''>0$ ($\delta''=0$, $\delta>0$) в системе имеет место непрерывный фазовый переход в пространственно-однородное ферромагнитное (антиферромагнитное) состояние $\mathbf{M}\neq 0$, $\mathbf{L}=0$ ($\mathbf{L}\neq 0$, $\mathbf{M}=0$). Будем называть антиферромагнитной областью ММС область, где $\delta''\sim 0$, $\delta>0$ и, следовательно, выполняются соотношения

$$\mathbf{L}^2 \gg \mathbf{M}^2, \quad \operatorname{ctg}^2\frac{\Phi}{2} \approx \left(\frac{\alpha''\delta''}{\alpha\delta}\right)^{1/2}, \quad \gamma^2 \approx \left(\frac{\delta\delta''}{\alpha\alpha''}\right)^{1/2}. \tag{7}$$

В ферромагнитной области $\delta\sim 0$, $\delta''>0$ имеем

$$\mathbf{M}^2 \gg \mathbf{L}^2, \quad \operatorname{tg}^2\frac{\Phi}{2} \approx \left(\frac{\alpha\delta}{\alpha''\delta''}\right)^{1/2}, \quad \gamma^2 \approx \left(\frac{\delta\delta''}{\alpha\alpha''}\right)^{1/2}. \tag{8}$$

В настоящей работе мы исследуем спектр спиновых волн над ММС. В ферро- и антиферромагнитных областях ММС из уравнений Ландау—Лифшица для двух магнитных векторов мы получим более простое уравнение для одного вектора, пригодное для корректного описания нелинейной динамики. Покажем, что во всей области существования ММС слабонелинейное взаимодействие акустических мод описывается уравнением Буссинеска, которое допускает полное теоретическое описание на основе метода обратной задачи решения. Мы предсказываем возможность возбуждения солитонов на фоне ММС и, следовательно, «прозрачность» ММС для нелинейных спиновых волн.

Заметим, что ранее солитоны ММС были исследованы лишь в одноподрешеточном ферромагнетике без центра инверсии [3] и простом антиферромагнетике с инвариантом типа $L_1\partial_\xi L_2 - L_2\partial_\xi L_1$ в разложении свободной энергии [4].

1. Эффективные уравнения в ферро- и антиферромагнитных областях ММС

Динамика квазиодномерных возбуждений ММС определяется уравнениями

$$\partial_t\mathbf{M} = -g\left\{\left[\mathbf{M}, \frac{\delta F}{\delta\mathbf{M}}\right] + \left[\mathbf{L}, \frac{\delta F}{\delta\mathbf{L}}\right]\right\}, \tag{9а}$$

$$\partial_t\mathbf{L} = -g\left\{\left[\mathbf{L}, \frac{\delta F}{\delta\mathbf{M}}\right] + \left[\mathbf{M}, \frac{\delta F}{\delta\mathbf{L}}\right]\right\}, \tag{9б}$$

$$\mathbf{M}^2 + \mathbf{L}^2 = (2M_0)^2, \quad (\mathbf{ML}) = 0,$$

где g — гиромагнитное отношение. Линеаризация (9) вблизи ММС дает следующий закон дисперсии для спиновых волн:

$$\left(\frac{\omega}{2M_0 g}\right)^2 = \frac{1}{2}(Q \pm [Q^2+R]^{1/2}), \quad \beta = \left(\alpha''\sin^2\frac{\Phi}{2} + \alpha\cos^2\frac{\Phi}{2}\right)^{-1},$$

$$Q = \alpha\beta^3\left(D\cos\frac{\Phi}{2}\right)^4 + p^2\left(D\beta\cos\frac{\Phi}{2}\right)^2\left[2\alpha\alpha'' + 2\alpha^2\cos^2\frac{\Phi}{2} + \left(\sin\frac{\Phi}{2}\cos\frac{\Phi}{2}(\alpha-\alpha'')\right)^2\right] +$$
$$+ p^4\left[2\alpha\alpha''\sin^2\frac{\Phi}{2} + (\alpha^2+(\alpha'')^2)\cos^2\frac{\Phi}{2}\right],$$

$$R = -4aa''p^2\left[aa''(D\beta\sin\Phi)^2 + p^2\left(aa'' + \left(\sin\frac{\Phi}{2}\cos\frac{\Phi}{2}(a-a'')\right)^2\right)\right]\times$$
$$\times\left[\left(D\beta\sin\frac{\Phi}{2}\cos\frac{\Phi}{2}\right)^2 - p^2\right]^2. \qquad (10)$$

Здесь ω, p — частота и волновой вектор спиновых волн. Иными словами, имеем две акустические и две оптические моды. Для дальнейшего полезно разложение акустической ветви спектра по степеням $p\,(p \ll \gamma)$

$$\left(\frac{\omega}{2M_0 g}\right)^2 = c^2p^2 + bp^4, \quad c^2 = 4a\left(Da''\sin^3\frac{\Phi}{2}\cos\frac{\Phi}{2}\right)^2\beta^3,$$
$$b = a''\beta\sin^4\frac{\Phi}{2}\left[-7aa'' + \left(\sin\frac{\Phi}{2}\cos\frac{\Phi}{2}(a-a'')\right)^2 - 4\beta a''\sin^2\frac{\Phi}{2}\left(2aa'' + 2a^2\cos^2\frac{\Phi}{2} +\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\sin\frac{\Phi}{2}\cos\frac{\Phi}{2}(a-a'')\right)^2 - 4\beta a(a'')^2\sin^6\frac{\Phi}{2}\right)\right]. \qquad (11)$$

В ферромагнитной (антиферромагнитной) области ММС наличие малого параметра $L^2/M^2 \ll 1$ $(M^2/L^2 \ll 1)$ позволяет существенно упростить уравнения Ландау—Лифшица (9). Подобная процедура впервые использовалась в работе [5] при исследовании нелинейных волн в двухподрешеточном антиферромагнетике. В отличие от [5] в данном случае имеются два характерных пространственных масштаба. Первый масштаб γ^{-1} определяет шаг «невозмущенной» магнитной спирали, второй представляет размер d пространственных модуляций этой спирали, причем $d \gg \gamma^{-1} \gg a$ (a — постоянная решетки). Наша задача состоит в нахождении эффективных уравнений, определяющих динамику нелинейных возбуждений ММС на масштабах порядка d.

Рассмотрим сначала ферромагнитную область. При упрощении уравнений мы учли, что обычно $\alpha \sim \alpha'' \sim \delta''a^2$, $D \sim \delta''a$, и использовали оценки

$$D^2 - \delta''\alpha \approx 2(\delta\delta''\alpha\alpha'')^{1/2} = O((\gamma a^2\delta'')^2), \qquad \delta(\delta'')^{-1} = O((\gamma a)^4),$$
$$\left|\frac{L}{M}\right| = O(\gamma a), \qquad \left|\frac{\partial_t L}{2M_0 gL}\right| = O(\gamma^3 d^{-1}a^4\delta''), \qquad (12)$$

которые следуют из формул (6), (8), (10). С учетом этих оценок из (9б) выражаем вектор $\mathbf{L}$ через $\mathbf{M}$ с точностью до членов порядка $(ad^{-1})^3\,M$ включительно

$$\mathbf{L} = \frac{D}{\delta''}\left(\partial_\xi\mathbf{M} - \frac{\mathbf{M}(\mathbf{M}\partial_\xi\mathbf{M})}{\mathbf{M}^2}\right) + \frac{Da''}{(\delta'')^2}\left(\partial_\xi^3\mathbf{M} - \frac{\mathbf{M}(\mathbf{M}\partial_\xi^3\mathbf{M})}{\mathbf{M}^2}\right). \qquad (13)$$

После подстановки (13) в уравнение (9а) получаем замкнутое уравнение для определения $\mathbf{M}$

$$\partial_t\mathbf{M} + g\left(\frac{D^2}{\delta''} - a''\right)[\mathbf{M}, \partial_\xi^2\mathbf{M}] + \frac{D^2a''}{(\delta'')^2}[\mathbf{M}, \partial_\xi^4\mathbf{M}] = 0. \qquad (14)$$

Ввиду малости коэффициента при членах с квадратами градиентов в уравнениях (14) (см. (12)) мы удержали члены четвертой степени по градиентам. При выводе (14) мы использовали оценку $(\mathbf{M}\partial_\xi\mathbf{M})/\mathbf{M}^2 = O((\gamma a)^2/d)$, которую нетрудно извлечь из (13) и соотношения $L^2 + M^2 = (2M_0)^2$. Существенно, что в рамках рассматриваемых приближений решение системы (14) достаточно найти при условии $M^2 = (2M_0)^2$. Свободная энергия в ферромагнитной области имеет вид

$$F = \frac{1}{2}\int d\xi\left\{-\left[\frac{D^2}{\delta''} - a\right](\partial_\xi\mathbf{M})^2 + \left(\frac{D}{\delta''}\right)^2 a''(\partial_\xi^2\mathbf{M})^2\right\}. \qquad (15)$$

Минимуму энергии (15) отвечает магнитная спираль с волновым вектором $\gamma^2 = (D^2 - \alpha\delta'')\delta''/2D^2\alpha'' \simeq (\delta\delta''|\alpha\alpha'')^{1/2}$, что соответствует (8). Закон дисперсии, полученный из укороченных уравнений (14), согласуется с пределом (11) при $\delta \to 0$.

В антиферромагнитной области имеем оценки

$$\alpha \sim \alpha'' \sim \delta a^2, \quad D \sim \delta a, \quad D^2 - \delta\alpha'' \approx 2(\delta\delta''\alpha\alpha'')^{1/2} = O((\gamma a^2\delta)^2),$$
$$\delta''\delta^{-1} = O((\gamma a)^4), \quad \left|\frac{M}{L}\right| = O(\gamma a), \quad \left|\frac{\partial_t M}{2M_0 gM}\right| \sim \left|\frac{\partial_t L}{2M_0 gL}\right| = \{O((\gamma a)^2\delta), \quad O(\gamma d^{-1}a^2\delta)\},$$
$$\frac{(\mathbf{L}\partial_\xi \mathbf{L})}{L^2} = O((\gamma a)^2 d^{-1}),$$
$$(\mathbf{L}\partial_t \mathbf{L})/(2M_0 gL^2) = O((\gamma a)^4\delta),$$

с учетом которых из (9б) можно выразить $\mathbf{M}$ через $\mathbf{L}$

$$\mathbf{M} = -\frac{D}{\delta}\left\{\partial_\xi \mathbf{L} - \frac{\mathbf{L}(\mathbf{L}\partial_\xi \mathbf{L})}{L^2} + \frac{\alpha}{\delta}\left(\partial_\xi^3 \mathbf{L} - \frac{\mathbf{L}(\mathbf{L}\partial_\xi^3 \mathbf{L})}{L^2}\right)\right\} + \frac{[\mathbf{L}, \partial_t \mathbf{L}]}{L^2 g\delta}. \tag{16}$$

Тогда для $\mathbf{L}$ получаем замкнутое уравнение

$$\frac{\delta[\mathbf{L}, \partial_t^2 \mathbf{L}]}{(2M_0 g\delta)^2} + \left(\frac{D^2}{\delta} - \alpha''\right)[\mathbf{L}, \partial_\xi^2 \mathbf{L}] + \left(\frac{D}{\delta}\right)^2 \alpha[\mathbf{L}, \partial_\xi^4 \mathbf{L}] = 0, \tag{17}$$

которое корректно учитывает нелинейное взаимодействие акустических и оптических мод. При решении (17) можно считать $L^2 = (2M_0)^2$.

Свободная энергия в антиферромагнитной области

$$F = \frac{1}{2}\int d\xi \left\{\frac{\delta(\partial_t L)^2}{(2M_0 g\delta)^2} - \left(\frac{D^2}{\delta} - \alpha''\right)(\partial_\xi L)^2 + \left(\frac{D}{\delta}\right)^2 \alpha(\partial_\xi^2 L)^2\right\}$$

минимальна, если основное состояние представляет магнитную спираль с волновым вектором $\gamma = [(D^2 - \alpha''\delta)\delta/2D^2\alpha]^{1/2} \approx (\delta\delta''/\alpha\alpha'')^{1/4}$.

На основе укороченных уравнений (14), (17) возможно эффективное описание существенно нелинейных волн намагниченности. Известно [6], что в отсутствие членов с четвертой производной уравнения (14), (17) являются интегрируемыми и допускают солитонные решения с произвольной амплитудой на однородном фоне. Оказывается, что для таких уравнений с помощью задачи Римана нетрудно найти и солитоны на фоне ММС. В ферромагнитной области схема интегрирования остается той же, что и при наличии одноосной анизотропии [7], но на матрицу решений задачи Римана не накладывается других ограничений, кроме условия унитарности. Односолитонное решение описывает (на фоне $M_x + iM_y = 2M_0 \exp i\gamma\xi$) прецессионный солитон

$$M_z = 2(\lambda - \lambda^*)|\gamma + \varkappa|^2 n [\operatorname{sh} y \cos s (1 - |\gamma\lambda|^2)(\lambda - \lambda^*) +$$
$$+ i \operatorname{ch} y \sin s (1 + |\gamma\lambda|^2)(\lambda + \lambda^*) - \gamma(\lambda^2 - \lambda^{*2})],$$
$$M_x + iM_y = \exp(i\gamma\xi)\, n (4|\lambda|^2)^{-1} [\{(\lambda + \lambda^*)[(1 + |\mu|^2)\operatorname{ch} y - i(\mu - \mu^*)\sin s] +$$
$$+ (\lambda - \lambda^*)[(1 - |\mu|^2)\operatorname{sh} y - (\mu + \mu^*)\cos s]\}^2 - (\lambda - \lambda^*)^2 \{\operatorname{sh} y (\mu + \mu^*) +$$
$$+ \cos s (1 - |\mu|^2) + (1 + |\mu|^2) i \sin s + \operatorname{ch} y (\mu - \mu^*)\}^2],$$
$$n = 2M_0 [\operatorname{ch} y (1 + |\mu|^2) - i \sin s (\mu - \mu^*)]^{-2}, \quad \mu = \lambda^*(\gamma + \varkappa),$$
$$\varkappa = (\gamma^2 + \lambda^{*-2})^{1/2}, \quad y - is = -i\varkappa[2M_0 g(\lambda^*)^{-1} t - \delta''\xi/\sqrt{2\alpha''}\, D\gamma] + c_0, \tag{18}$$

который имеет характерную ширину порядка $[\operatorname{Re} i\varkappa]^{-1}$ (λ, c_0 — комплексные параметры), движется со скоростью $v = \partial_t y/\partial_\xi y$ и в пределе $\gamma \to 0$ совпадает с солитоном, найденным в [6]. Вдали от центра солитона вектор M совершает прецессионное движение около своего положения в ММС. Ближе к центру на прецессионное движение накладываются нутационные колебания. При $\operatorname{Re} i\varkappa = 0$ решение (18) описывает апериодическое возмущение ММС, которое затухает при $|t| \to \infty$.

В антиферромагнитной области, используя результаты работы [8], мы нашли односолитонное решение уравнения (17) в отсутствие слагаемых с четвертыми производными, которое параметризуется вещественными постоянными ε, ρ, s_0, y_0

$$L_z = 2 \sin\varepsilon \operatorname{ch}\rho\, n [\operatorname{sh} y \cos s \sin\varepsilon \operatorname{sh}\rho - \operatorname{ch} y \sin s \cos\varepsilon \operatorname{ch}\rho],$$
$$L_x + iL_y = \exp i\gamma\xi \{\cos 2\varepsilon + n [\cos^2 s \sin^2\varepsilon (\operatorname{ch} 2\rho + \cos 2\varepsilon) -$$
$$- i \operatorname{ch}\rho \sin\varepsilon (\sin 2s \sin\varepsilon \operatorname{sh}\rho + \operatorname{sh} 2y \cos\varepsilon \operatorname{ch}\rho)]\},$$

$$n = 2M_0 (\mathrm{ch}^2 y\, \mathrm{ch}^2 \rho - \cos^2 s \sin^2 \varepsilon)^{-1},$$

$$s = s_0 + 2\gamma\, \mathrm{ch}\, \rho\, (\mathrm{ch}\, 2\rho + \cos 2\varepsilon)^{-1} \left(\sqrt{\frac{\delta}{2a}} \frac{\delta\, \mathrm{sh}\, \rho}{D\gamma} \xi - 2M_0 g \delta t \cos \varepsilon \right),$$

$$y = y_0 - 2\gamma \sin \varepsilon\, (\mathrm{ch}\, 2\rho + \cos 2\varepsilon)^{-1} \left(\sqrt{\frac{\delta}{2a}} \frac{\delta \cos \varepsilon}{D\gamma} \xi + 2M_0 g \delta t\, \mathrm{sh}\, \rho \right). \qquad (19)$$

В асимптотике $\xi \to \pm\infty$ $(\sin 2\varepsilon \neq 0)$ оно представляет простую спираль $L_x + iL_y = \exp(i\gamma\xi \pm 2i\varepsilon)$. Асимптотические значения разделены движущимся солитоном. В системе координат, связанной с солитоном, вектор $\mathbf{L}$ совершает периодические по времени колебания с выходом из плоскости (x, y). Колебания проекции L_z движутся по локализованной области, зарождаясь у одного края солитона и исчезая у противоположного. Когда $\sin 2\varepsilon \to 0$, ширина солитона неограниченно увеличивается.

Подобный анализ для полных уравнений (14), (17), корректно учитывающий ММС, затруднен из-за отсутствия L—A-пары для этих уравнений. Тем не менее оказывается возможным полный анализ малоамплитудных солитонов благодаря тому, что их описание обычно сводится к точно решаемым моделям.

Покажем, что в случае слабой нелинейности, когда возбуждаются лишь акустические моды, уравнения (14), (17) еще более упрощаются и сводятся к точно интегрируемому уравнению Буссинеска. Рассмотрим вначале ферромагнитную область и введем параметризацию для вектора $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M} = 2M_0 (\cos\theta \cos(\gamma\xi + \varphi), \quad \cos\theta \sin(\gamma\xi + \varphi),\ \sin\theta). \qquad (20)$$

Тогда из уравнений (14) можно выразить θ через φ

$$\frac{\partial_t \theta}{2M_0 g} \approx \frac{(\delta'')^2 \gamma^{-4}}{D^2 a''} \frac{\partial_t^2 \varphi}{(2M_0 g)^2} - 8a'' \left(\frac{D}{\delta''}\right)^2 \partial_\xi^4 \varphi.$$

В результате в низшем порядке по нелинейности получаем уравнение Буссинеска для определения величины $u = \partial_\xi \varphi$

$$(\partial_t^2 u)/(2M_0 g)^2 = c^2 \partial_\xi^2 u - b \partial_\xi^4 u + a \partial_\xi^2 u^2. \qquad (21)$$

Здесь $c^2 = 4\gamma^6 \sigma$, $b = -7\gamma^4 \sigma$, $a = 6\gamma^5 \gamma$, $\sigma = (D/\delta'')^4$ $(\alpha'')^2 \approx (\alpha\alpha''/\delta'')^2$.
В антиферромагнитной области, используя аналогичную (20) параметризацию вектора $\mathbf{L}$, в приближении слабой нелинейности снова получаем уравнение (21) для $u = \partial_\xi \varphi$. Теперь постоянные имеют вид $c^2 = 4\gamma^2 \sigma$, $b = \sigma$, $a = 6\gamma\sigma$, $\sigma = D^2 \alpha/\delta \approx \alpha\alpha''$.

Известно [9], что уравнение Буссинеска (21) имеет «механическую» аналогию. При $b < 0$ $(b > 0)$ оно описывает продольные (поперечные) колебания нелинейной струны.

2. Слабонелинейное взаимодействие акустических мод, солитоны в ММС

В предыдущем разделе мы нашли, что в областях $\mathbf{M}^2 \gg \mathbf{L}^2$ и $\mathbf{L}^2 \gg \mathbf{M}^2$ слабонелинейные возмущения над соответствующим основным состоянием описываются уравнением Буссинеска (21). В данном разделе мы усилим эти результаты и покажем, что уравнение (21) пригодно для описания взаимодействия акустических мод во всем температурном интервале существования ММС, за исключением области, где $b \approx 0$. Для этого необходимо обратиться к полным уравнениям Ландау—Лифшица, которые содержат четыре динамические переменные, имеют достаточно громоздкий вид и могут быть получены из лагранжиана

$$\mathscr{L} = \frac{M_0}{g} \int d\xi\, (\partial_t \varphi_1 \sin\theta_1 + \partial_t \varphi_2 \sin\theta_2) - F. \qquad (22)$$

Здесь и далее мы используем параметризацию (2) для намагниченности подрешеток. Для выделения из уравнений Ландау—Лифшица одного эффективного уравнения типа (21) необходима регулярная математическая процедура, которая позволила бы корректно оценить порядок величины различных слагаемых в исходных уравнениях. Подходящей процедурой является редуктивная теория возмущений, основанная на методе растяжения координат [10]. Недостаток теории возмущений в том, что она приводит к уравнению, определяющему распространение волны лишь в одном направлении. Уравнение Буссинеска (21) является более общим, так как учитывает движение в обоих направлениях.

Покажем, что редуктивная теория возмущений приводит к уравнению Кортевега—де Вриза (КдВ). Информация, полученная при выводе уравнения КдВ, будет использована далее для реконструкции уравнения Буссинеска. Будем искать решение уравнений Ландау—Лифшица в виде разложения по степеням параметра ε, характеризующим отклонения системы от равновесного состояния

$$\varphi_1 = \Phi + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \varphi_1^{(k)}, \quad \varphi_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \varphi_2^{(k)}, \quad \theta_i = \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k \theta_i^{(k)}, \quad i = 1,\ 2. \tag{23}$$

Здесь функции $\theta_i^{(k)}$, $\varphi_i^{(k)}$ зависят от медленных переменных $z=\varepsilon^p(\xi+ct)$, $\tau=\varepsilon^{3p}t$. Масштабные преобразования вводятся так, чтобы согласовать с дисперсионным соотношением пространственно-временной отклик системы на возмущение. Число p характеризует степень нелинейности и подбирается эмпирически из условия компенсации в уравнениях эффектов дисперсии и нелинейности. В данном случае $p=1$. Функции $\theta_i^{(k)}$, $\varphi_i^{(k)}$ находим из уравнений Ландау—Лифшица, приравнивая нулю коэффициенты при степенях ε до членов порядка ε^5 включительно. Первые приближения дают

$$\partial_z \varphi_1^{(1)} = \partial_z \varphi_2^{(1)} \equiv \frac{1}{2} u, \qquad \theta_1^{(2)} = \theta_2^{(2)} = \frac{cu}{2\alpha''}\left(D\beta \sin^2 \frac{\Phi}{2}\right)^{-2},$$

$$\varphi_1^{(2)} - \varphi_2^{(2)} = D^{-1}u\left(\alpha \cos^2 \frac{\Phi}{2} - \alpha'' \sin^2 \frac{\Phi}{2}\right), \qquad \theta_1^{(3)} - \theta_2^{(3)} = D^{-3}\alpha^{-1}c\left(\beta \cos^2 \frac{\Phi}{2}\right)^{-2} \times$$
$$\times\, \partial_z u\left[\alpha \cos^2 \frac{\Phi}{2} - \alpha'' \sin^2 \frac{\Phi}{2} + \left(\beta \sin^2 \frac{\Phi}{2}\right)^{-2}(\alpha'')^{-1}\right]. \tag{24}$$

Здесь c^2 определяется формулой (11). С помощью (24) уравнения, возникающие при рассмотрении порядков ε^4 и ε^5, редуцируются к замкнутому уравнению для определения величины u

$$\frac{\partial_\tau u}{2M_0 g} = -\frac{b}{2c}\,\partial_z^3 u + \frac{a}{2c}\,\partial_z u^2, \tag{25}$$

где параметры b и c имеют тот же вид, что в законе дисперсии (11)

$$a = \frac{3}{4}\, D\alpha\, (\alpha'')^2\, \beta^3 \sin 2\Phi\, \sin^4 \frac{\Phi}{2}\left(\alpha \cos^2 \frac{\Phi}{2} - \alpha'' \sin^2 \frac{\Phi}{2}\right). \tag{26}$$

В рамках теории возмущений (23) выбор направления распространения волны соответствует выбору определенного знака у параметра c, что не влияет на оценку порядка величины различных слагаемых в уравнениях Ландау—Лифшица. Отсюда заключаем, что уравнение Буссинеска, по-видимому, может быть выведено из уравнений Ландау—Лифшица, если в них удержать лишь те слагаемые, разложения которых по степеням ε привели к уравнению КдВ (25). Действительно, в указанном приближении из уравнений Ландау—Лифшица удается выразить функции $\partial_t(\theta_1-\theta_2)$, $\partial_t(\theta_1+\theta_2)$, $\varphi_1-\varphi_2$ в терминах величины $u=\partial_\xi(\varphi_1+\varphi_2)$. При этом для определения u получается замкнутое уравнение (21), где параметры a, b, c^2 те же, что и в формулах (11), (26).

Для дальнейшего удобно в уравнении Буссинеска (21) перейти к безразмерным переменным

$$u \to \frac{3c^2\varepsilon}{2a} u, \quad t \to \frac{M_0 g c^2}{\sqrt{|b|}} t, \quad \xi \to \frac{c}{2\sqrt{|b|}} \xi.$$

Тогда (21) примет вид

$$\partial_t^2 u = \partial_\xi^2 u + \frac{\varepsilon}{4} \partial_\xi^4 u + \frac{3\varepsilon}{2} \partial_\xi^2 u^2, \tag{27}$$

где $\varepsilon = -\operatorname{sign} b$. Как показано в [9], для интегрирования (27) удобен метод «одевания» Шабата. В [9] найдены солитонные решения лишь при $\varepsilon=1$. Однако схема интегрирования пригодна и для $\varepsilon=-1$. Отличие заключается в редукциях, обеспечивающих вещественность решений. Согласно методу Шабата, каждое решение $F(x, y)$ линейной системы

$$[\partial_x^3 + \partial_y^3 + \varepsilon(\partial_x + \partial_y)] F(x, y) = 0, \quad [\partial_t + \sqrt{3/4}\, i^{(1+\varepsilon)/2} (\partial_x^2 - \partial_y^2)] F(x, y) = 0 \tag{28}$$

после определения функции $K(x, y)$ из уравнения

$$K(x, y) = F(x, y) + \int_x^\infty K(x, s) F(s, y)\, ds \tag{29}$$

порождает некоторое точное решение уравнений (27) по формуле

$$u = \partial_\xi K(\xi, \xi). \tag{30}$$

В частности, полагая

$$F = \sum_{n=1}^{N} c_n(t) \exp(\lambda_n x + \mu_n y) \quad (\operatorname{Re}\lambda_n < 0,\ \operatorname{Re}\mu_n < 0),$$

находим N-солитонное решение (25)

$$u = \partial_\xi^2 \ln \det \| A \|, \quad A_{nm} = \delta_{nm} + \frac{c_n \exp(\lambda_n + \mu_n)\xi}{\lambda_n + \mu_n}. \tag{31}$$

Вещественность решения гарантирует следующий выбор параметров:

$$\lambda_n = \eta_n + \nu_n, \quad \mu_n = \eta_n - \nu_n, \quad \eta_n = \eta_n^*, \quad \nu_n = \frac{\sigma_n}{\sqrt{3}} i^{(1+\varepsilon)/2} [1 + \varepsilon\eta_n^2]^{1/2}, \quad \sigma_n = \pm 1,$$

$$c_n = c_n^0 \exp\{2\sigma_n\eta_n [1 + \varepsilon\eta_n^2]^{1/2} t\}.$$

Односолитонное решение ($N=1$)

$$u = \eta^2 \operatorname{ch}^{-2}\left[\eta\xi + \sigma(\eta^2 + \varepsilon\eta^4)^{1/2} t + \frac{1}{2} \ln \frac{c_0}{2\eta}\right] \tag{32}$$

описывает локальное изменение начальной фазы магнитной спирали, отвечающей основному состоянию системы. Возвращаясь к исходным переменным (азимутальному углу, времени и пространственной координате), видим, что ширина, скорость, амплитуда солитона нетривиальным образом зависят от параметров ММС. Сравнивая решения (18), (19), (32), заключаем, что наличие слагаемого с четвертой производной в уравнениях (14), (17) существенно изменяет тип решений. Решения (18), (19) в пределе малых амплитуд не сводятся к (32). Более того, модель (27) в отсутствие слагаемых с четвертой производной вообще не имеет солитонов.

В заключение отметим, что в рамках обменного приближения для описания взаимодействия акустических мод можно использовать подход, альтернативный по отношению к модели подрешеток, — метод феноменологического лагранжиана спиновых волн [11, 12].

Этот метод позволяет резко сократить число динамических переменных, необходимых для описания магнитных возбуждений. Лагранжиан спиновых волн определяется из общих теоретико-групповых соображений с точностью до небольшого числа констант. Для рассмотренного выше неколлинеарного ферримагнетика лагранжиан спиновых волн имеет вид

$$\mathscr{L}=A\omega_2(\varphi,\ \partial_t\varphi)+\frac{a_2}{2}\omega_2^2(\varphi,\ \partial_t\varphi)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}c_i\omega_i^2(\varphi,\ \partial_\xi\varphi)+\lambda\omega_3(\varphi,\ \partial_\xi\varphi). \tag{33}$$

Здесь A, a_2, c_i, λ — феноменологические постоянные; $\omega_i(\varphi,\ \partial\varphi)=-2Sp(\partial g g^+\tau_k)$; $\tau_k=i/2\cdot\sigma_k^*$; σ_k — матрицы Паули. Лагранжиан (33) записан для указанной выше геометрии ММС, так что равновесному состоянию отвечают $\omega_1=\omega_2=0$, $\omega_3(\varphi,\ \partial_\xi\varphi)=\lambda/c_3\equiv\gamma$. Спектр спиновых волн, полученный из (33), $\omega^2=c_3/A^2\cdot[\gamma c_2 p^2+c_1 p^4]$ согласуется с (11).

В общем случае наличие инвариантов Лифшица в разложении свободной энергии по степеням неприводимых магнитных векторов соответствует учету в феноменологическом лагранжиане спиновых волн слагаемых вида $\lambda_{ij}\omega_i(\varphi,\ \partial_{x_j}\varphi)$. Замечательно, что в рамках обсуждаемого подхода имеется по крайней мере одна точно интегрируемая модель, пригодная для описания квазиодномерных возбуждений ММС в неколлинеарных ферри- и антиферромагнетиках. Лагранжиан этой модели есть

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}[a_i\omega_i^2(\varphi,\ \partial_t\varphi)-c_i\omega_i^2(\varphi,\ \partial_\xi\varphi)]+b\omega_3(\varphi,\ \partial_t\varphi)+\lambda\omega_3(\varphi,\ \partial_\xi\varphi),\qquad a_1=a_2\neq a_3,$$
$$c_1=c_2\neq c_3. \tag{34}$$

Солитонные решения соответствующих (34) динамических уравнений могут быть получены из решений $\bar{g}$ работы [13] посредством преобразования $g=\exp(\lambda/c_3\cdot\tau_3\xi)\bar{g}$.

В данной работе мы ограничились рассмотрением локализованных возбуждений, распространяющихся вдоль оси магнитной спирали. Энергетический спектр солитона лежит ниже спектра спиновых волн, и, следовательно, учет поперечных возмущений не разрушит солитон по крайней мере в случае слабой нелинейности, когда взаимодействие продольных и поперечных мод в длинноволновой области является малым.

Список литературы

[1] Стефановский Е. П. // ФНТ. 1987. Т. 13. № 7. С. 740—746.
[2] Dachs H. // J. Phys. 1964. V. 25. N 5. P. 563—564.
[3] Борисов А. Б., Изюмов Ю. А. // ДАН СССР. 1985. Т. 283. № 4. С. 859—861.
[4] Барьяхтар В. Г., Соболева Т. К., Сукстанский А. Л. // ФТТ. 1985. Т. 27. № 8. С. 2428—2434.
[5] Барьяхтар И. В., Иванов Б. А. // ФНТ. 1979. Т. 5. № 7. С. 759—770.
[6] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М., 1986. 527 С.
[7] Борисов А. Б., Киселев В. В. // ФММ. 1984. Т. 58. № 2. С. 238—251.
[8] Borisov A. B., Kiseliev V. V. // Phys. Lett. A. 1985. V. 107. N 4. P. 161—163.
[9] Захаров В. Е. // N-солитонные решения для уравнения нелинейной струны/ Под ред. И. А. Кунина. М., 1975. С. 254—256.
[10] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Морис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения: Пер. с англ. М., 1988. 694 с.
[11] Волков Д. В., Желтухин А. А., Блиох Ю. П. // ФТТ. 1971. Т. 13. № 6. С. 1668—1678.
[12] Андреев А. Ф., Марченко В. И. // УФН. 1980. Т. 130. № 1. С. 37—63.
[13] Борисов А. Б., Киселев В. В. // ТФМ. 1983. Т. 54. № 2. С. 246—257.

Институт физики металлов
УрО АН СССР
Свердловск

Поступило в Редакцию
30 декабря 1987 г.
В окончательной редакции
15 августа 1989 г.