

УДК 541.14

© 1990

**ПЬЕЗОСПЕКТРОСКОПИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ
МАНДЕЛЬШТАМ-БРИЛЛЮЭНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ
В ПЛАВЛЕНОМ КВАРЦЕ**

И. И. Новак, А. А. Кричева, А. П. Смирнов

Исследовано влияние одноосного сжатия на спектры мандельштам-бриллюэновского рассеяния (МБР) кварцевого стекла. Измерено смещение частот акустических колебаний, зависящее от нагрузки и взаимной ориентации волнового вектора и амплитуды волны относительно направления сжатия. На основе данных о сдвиге частот МБР вычислены величины скоростей и упругих констант деформированного кварцевого стекла. Рассчитаны параметры ангармонизма продольных и поперечных колебаний. Обнаружено аномальное поведение ряда характеристик плавленого кварца при одноосном сжатии.

В кварцевом стекле под действием деформации и температуры наблюдается аномальное поведение некоторых физических характеристик. В отличие от кристаллического кварца его модуль Юнга при всестороннем сжатии уменьшается [1]. При растяжении кварцевых волокон обнаружено увеличение этого модуля на 12 % при предельной нагрузке [2]. В работе [3] установлено, что модули упругости c_{11} и c_{12} уменьшаются под действием гидростатического сжатия вплоть до 3 ГПа.

В последнее время для изучения упругих свойств кристаллов и стекол широко используется метод мандельштам-бриллюэновского рассеяния света, который позволяет получить информацию об анизотропии скорости звука, релаксационных процессах, о взаимодействии акустических фонов с другими возбуждениями, следить за развитием фазовых переходов. Так, в работе [4] в плавленом кварце обнаружены смещение частоты продольной акустической волны при всестороннем сжатии и изменение знака смещения частоты МБР при давлении 2 ГПа. Эта особенность связывалась со структурными превращениями в кварцевом стекле.

Благодаря изучению спектров МБР для ряда кубических решеток получена информация о температурно-силовой зависимости упругих модулей, что позволило вычислить параметры ангармонизма межатомного взаимодействия [5].

Целью настоящей работы является исследование поведения упругих постоянных и других характеристик плавленого кварца при одноосном сжатии методом МБР. Ожидалось, что с возникновением в этих условиях оптической анизотропии будет снято вырождение в акустических модах в спектрах МБР, которое проявится в специфике упругонапряженного состояния образца при одноосном сжатии. На основе этих данных могут быть получены сведения об ангармонизме колебаний, с которым связаны теплопроводность, тепловое расширение твердых тел. Кроме того, как показано в работах [6, 7], знание ангармонизма межатомного взаимодействия дает представление о кинетике механического разрушения твердых тел.

Для получения спектров МБР использовался пятипроходный интерферометр Фабри—Перо фирмы «Бурлей». Акустические колебания возбуждались при рассеянии линии 488 нм аргонового лазера в одномодовом режиме. Образцами служили полированные призмы из плавленого кварца

размером $2 \times 3 \times 8$ мм, торцы которых вклеивались в стальные стаканчики. Такая система крепления позволяла существенно повысить прочность образца на сжатие. Нагружение образцов осуществлялось мощной калиброванной пружиной в специальном устройстве, которое устанавливалось в кюветном отделении интерферометра.

Изотропный образец, будучи одноосно деформированным, становится анизотропным. Специфику возникающего при этом упругонапряженного состояния оказалось наиболее удобным представлять симметрией гексагональной решетки. Среди прочих элементов симметрии она обладает осью шестого порядка и плоскостью, перпендикулярной этому направлению.

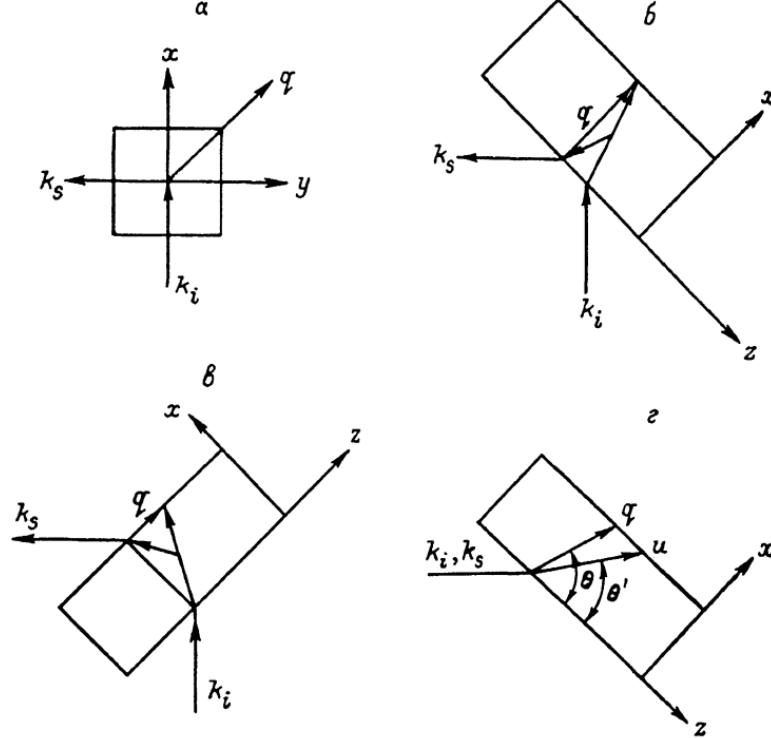


Рис. 1. Схемы МБР. Сжимающая нагрузка направлена по оси z .

k_i , k_s — волновые векторы возбуждающего и рассеянного света. a — c — рассеяние под углом 90° , d — под углом 180° .

нию. Для кристаллов с такой симметрией некоторые физические свойства, в том числе и скорость звука в этой плоскости, отличаются от физических свойств и скорости звука в направлении оси симметрии. Выбранная симметрия обладает более полным набором параметров для описания напряженного состояния образца, чем цилиндрическая, например, которой нельзя в принципе описать тензор упругих постоянных одноосно деформированного плавленого кварца.

Итак, картину упругонапряженного состояния, возникающего при одноосной деформации кварцевого стекла, будем аппроксимировать симметрией гексагональной решетки с набором упругих модулей — констант жесткости: c_{11} , c_{12} , c_{13} , c_{33} , c_{44} , c_{55} , c_{66} , причем $c_{44}=c_{55}$ и $c_{66}=1/2(c_{11}-c_{12})$. Для образца кварцевого стекла в исходном состоянии выполняются условия: $c_{11}=c_{33}$, $c_{44}=c_{55}=c_{66}$, $c_{13}=c_{12}$.

Для определения этих параметров упругонапряженного состояния снимались спектры МБР в нагруженном и ненагруженном образцах в четырех геометрических схемах рассеяния (рис. 1). В табл. 1 для различных используемых в эксперименте геометрий рассеяния указаны проекции на оси координат (рис. 1) единичных векторов поляризации падающего l_p и рассеянного l_s излучения лазера, импульсов q и смещений u для акусти-

Таблица 1

Данные о косинусах углов между координатами и поляризациями возбуждающего e_i и рассеянного e_s света, волновыми векторами q и смещениями упругих колебаний u

Схема a			Схема b			Схема c			Схема g		
$q \perp P$ $u_t \parallel P$			$q \perp P$ $u_t \perp P$			$q \parallel P$ $u_t \parallel P$			$u_y = \sin \theta', u_z = \cos \theta'$ $q_y = \sin \theta, q_z = \cos \theta$		
x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
e_i	0	0	1	$\sin \theta$	0	$\cos \theta$	$-\sin \theta$	0	$\cos \theta$	0	$\cos \theta$
e_s	0	0	1	0	1	0	$\sin \theta$	0	$\cos \theta$	0	$\cos \theta$
q	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	1	0	0	0	1	0	$\sin \theta$	$\cos \theta$
u	0	0	1	0	1	0	0	1	0	$\sin \theta'$	$\cos \theta'$
	$q \perp P$ $u_t \perp P$		—			$q \perp P$ $u_t \perp P$				—	
e_i	0	1	0	—	—	0	1	0	—	—	—
e_s	1	0	0	—	—	$\sin \theta$	0	$\cos \theta$	—	—	—
q	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	—	—	0	0	1	—	—	—
u	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	—	—	0	1	0	—	—	—

ческих колебаний. Величины u_t , u_l — смещения для поперечной и продольной волн; P — сжимающая нагрузка, параллельная оси z ; θ — угол между волновым вектором и направлением сжатия; θ' — угол между поляризацией квазипродольной волны и направлением сжатия. Для каждой конкретной схемы рассеяния и проекций l_i , l_s , q , u на оси координат

Таблица 2

Формулы для расчета скоростей упругих колебаний по данным частот МБР и упругих модулей

Схема a		Схема b		Схема c		Схема g	
$q \perp P$ $u_t \parallel P$		$q \perp P$ $u_t \perp P$		$q \parallel P$ $u_t \parallel P$		$q_y = \sin \theta, q_z = \cos \theta$ $u_y = \sin \theta', u_z = \cos \theta'$	
$v_t = \frac{\lambda v_t}{n \sqrt{2}}$		$v_t = \frac{\lambda v_t}{\sqrt{4n^2 - 2}}$		$v_l = \frac{\lambda v_l}{\sqrt{2}}$		$v_{kl} = \frac{\lambda v_{kl}}{2n}$	
$\rho v_t^2 = c_{44}$		$\rho v_t^2 = c_{66}$		$\rho v_l^2 = c_{33}$			
$q \perp P$ $u_t \perp P$				$q \parallel P$ $u_t \perp P$			
$v_t = \frac{\lambda v_t}{n \sqrt{2}}$				$v_t = \frac{\lambda v_t}{\sqrt{2}}$			
$\rho v_t^2 = c_{11}$				$\rho v_l^2 = c_{44}$			

проявляется, согласно правилам отбора, только одно колебание, продольная или поперечная волна. Например, в геометрии рассеяния (рис. 1, б) реализуется только поперечная волна с волновым вектором $q \perp P$ и смещением $u_t \perp P$. Проекции l_i и l_s на оси координат и косинусы соответствующих углов указаны в табл. 1. В этом случае интенсивность рассеяния

$$I \sim \frac{1}{2} \frac{P_{66}^2}{\rho v_t^2}, \quad (1)$$

где P_{66} — упругооптическая константа Поккельса для гексагональной решетки.

В табл. 2 для исследованных геометрий рассеяния приведены соотношения, связывающие скорость распространения звуковой волны с частотой МБР и упругими модулями. В этой таблице ν_t , ν_l , ν_{kl} — частоты МБР поперечной, продольной и квазипротодольной волн; v_t , v_l , v_{kl} — их скорости; λ — длина волны возбуждающего света; c_{ik} — компоненты тензора упругих модулей для гексагональной решетки; ρ — плотность кварцевого стекла. Значение скорости квазипротодольной волны определяется из соотношения

$$2\rho v_{kl}^2 = c_{44} + c_{11} \sin^2 \theta + c_{33} \cos^2 \theta + \\ + \sqrt{[(c_{11} - c_{44}) \sin^2 \theta + (c_{44} - c_{33}) \cos^2 \theta]^2 + (c_{13} + c_{44})^2 \sin^2 2\theta}. \quad (2)$$

Обратимся к результатам эксперимента. Рис. 2 иллюстрирует зависимость от прилагаемой нагрузки смещения частот МБР для поперечных

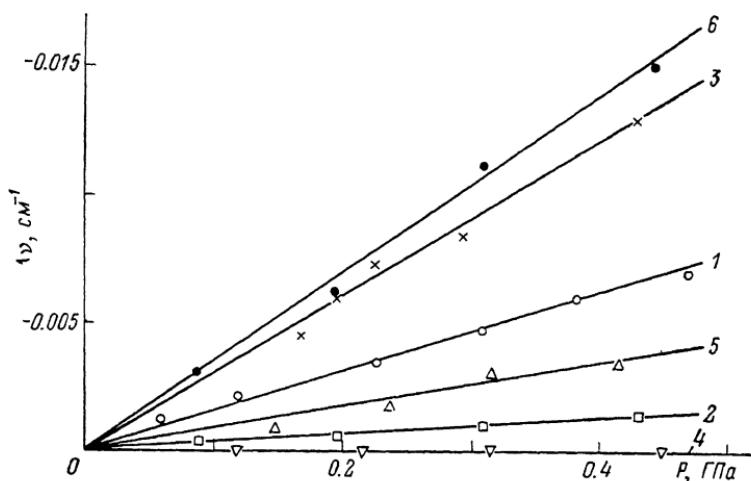


Рис. 2. Влияние сжимающей нагрузки на спектры МБР.

1 — поперечная волна $q \perp P$, $u \parallel P$, схема рассеяния а; 2 — поперечная волна $q \perp P$, $u \perp P$, схема б; 3 — продольная волна $q \parallel P$, $u \parallel P$, схема в; 4 — продольная волна $q \perp P$, $u \perp P$, схема а; 5 — поперечная волна $q \parallel P$, $u \perp P$, схема в; 6 — квазипротодольная волна, схема г.

и продольных колебаний различных поляризаций и направлений волновых векторов относительно осей координат. Как видно, частоты МБР уменьшаются с ростом напряжения сжатия по линейному закону, за исключением случая продольной моды с волновым вектором $q \perp P$, для которой смещения частоты не наблюдается. Эффект смещения линий рассеяния является обратимым: при снятии напряжения спектры линий рассеяния полностью восстанавливаются. Это свидетельствует о том, что измерения спектров МБР под нагрузкой проведены в области упругих деформаций.

Рассмотрим влияние сжатия на смещение частоты поперечной волны, распространяющейся перпендикулярно оси сжатия (рис. 2, 1, 2). Сдвиг частоты в этом случае зависит от взаимной ориентации амплитуды смещения волны u_t и направления нагрузки P . При условии $u_t \parallel P$ сдвиг частоты больше, чем для случая $u_t \perp P$. Таким образом, эксперимент показал существование двух поперечных мод с одинаковой исходной частотой (в ненагруженном состоянии), но с разной величиной сдвига частоты с увеличением сжатия. Этот эффект связан со снятием вырождения поперечных колебаний с появлением анизотропии упругих свойств плавленого кварца при сжатии. Подобный эффект наблюдается и для поперечных мод с поляризацией $u_t \perp P$, но с разными направлениями волновых векторов: $q \perp P$ и $q \parallel P$ (рис. 2, 2, 5). Сдвиг частоты для случая $q \parallel P$ меньше, чем для $q \perp P$.

Наибольший сдвиг частот с увеличением нагрузки наблюдается для продольных волн с волновыми векторами $q \parallel P$. Однако для условия $q \perp P$ частота продольной моды практически не смещается с увеличением нагрузки. Это обстоятельство связано с тем, что линейная деформация

по оси x или y определяется коэффициентом Пуассона, поэтому она в несколько раз меньше, чем в направлении оси z , параллельной направлению сжатия. По этой причине при прочих равных условиях сдвиг частоты будет больше, когда направление сжатия оказывается параллельным поляризации или волновому вектору.

Чтобы получить полное представление об упругонапряженном состоянии одноосно деформированного плавленого кварца, рассмотрим вопрос о связи деформации образца и смещения частот акустических колебаний с различными характеристиками образца. Согласно теории [8], частота гиперзвука определяется из соотношения

$$\rho v^2 \xi(i)_p = c_{pqml} f_q f_l |q(i)|^2 \xi_m, \quad (3)$$

где c_{pqml} — тензор упругих постоянных, определяемых второй производной от плотности потенциальной энергии по деформации; f_q, f_l — направляющие косинусы волнового вектора $q(i)$; $\xi(i)$ — амплитуда колебаний; индексы i, p, q, m, l принимают значения 1, 2, 3. Под действием деформации межатомные взаимодействия изменяются, что приводит к вариации упругих модулей c_{pqml} . Величина $(1/c_{pqml})(\partial c_{pqml}/\partial \varepsilon)$ характеризует ангармонический параметр колебаний и связана с производной третьего порядка от потенциальной энергии по деформации объема ε , отнесенной к упругой постоянной акустической моды. Из (3) можно получить

$$\rho v^2 \xi(i)_p = A_{pm} \xi(i)_m, \quad (4)$$

где $A_{pm} = c_{pqml} f_q f_l$. Находя для конкретных условий распространения величины A_{pm} и решая уравнение (4), получаем связь скоростей v_i с упругими модулями c_{ik} . Определенные таким образом соотношения и представлены в табл. 2.

Выражая скорости распространения гиперзвука через частоты МБР для разных геометрий рассеяния, получим связь параметров ангармонизма со сдвигом частот и деформацией

$$\frac{1}{c_{ik}} \frac{\partial c_{ik}}{\partial \varepsilon} = 2 \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} - 1. \quad (5)$$

При выводе (5) учтено изменение плотности ρ образца под действием сжатия. Вариации показателя преломления при этом оказываются незначительными, и поэтому нет необходимости их учитывать. Значения $(1/v)(\partial v/\partial \varepsilon)$ при разных схемах рассеяния вычислены из экспериментальных данных (рис. 2). Значения интересующих нас параметров ангармонизма следующие:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_{23}} \frac{\partial c_{23}}{\partial \varepsilon} &= 9, & \frac{1}{c_{12}} \frac{\partial c_{12}}{\partial \varepsilon} &= -7.8, & \frac{1}{c_{44}} \frac{\partial c_{44}}{\partial \varepsilon} &= 3.4, & \frac{1}{c_{13}} \frac{\partial c_{13}}{\partial \varepsilon} &= 73, \\ \frac{1}{c_{11}} \frac{\partial c_{11}}{\partial \varepsilon} &= -1, & \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial \varepsilon} &= 6.9. \end{aligned}$$

Как видно, упругонапряженное состояние плавленого кварца при сжатии характеризуется, в представлении симметрии гексагональной решетки, положительными параметрами ангармонизма, за исключением значений $(1/c_{11})(\partial c_{11}/\partial \varepsilon)$ и $(1/c_{12})(\partial c_{12}/\partial \varepsilon)$, которые оказываются отрицательными. Как известно, в обычных кристаллах при сжатии модули упругости увеличиваются и, следовательно, параметры ангармонизма имеют отрицательные значения. В этом различии поведения параметров ангармонизма и соответственно модулей упругости плавленого кварца от поведения аналогичных параметров для обычных кристаллов и состоит аномальность реакции плавленого кварца на сжатие.

Из формулы (5) следует, что при равном нулю деформационном изменении скорости и частоты МБР

$$\frac{1}{A_{pm}} \frac{\partial A_{pm}}{\partial \varepsilon} = -1. \quad (6)$$

В этом случае

$$\frac{1}{c_{11}} \frac{\partial c_{11}}{\partial \varepsilon} = -1, \quad \frac{1}{c_{12}} \frac{\partial c_{12}}{\partial \varepsilon} = -7.8,$$

т. е. модули упругости c_{11} и c_{12} при сжатии аномалии не проявляют.

Используя соотношения табл. 2, можно вычислить зависимости скорости упругих волн от напряжения сжатия. Результаты расчета представлены на рис. 3. Из эксперимента следует, что величины скоростей гиперзвукка уменьшаются с ростом нагрузки по линейному закону. Как и для частот поперечных волн, имеет место снятие вырождения для скоростей гиперзвукка при условии $v_t \perp P$, $u_{t_1} \parallel P$ и $u_{t_2} \perp P$ (рис. 3, 1, 2). Заметим,

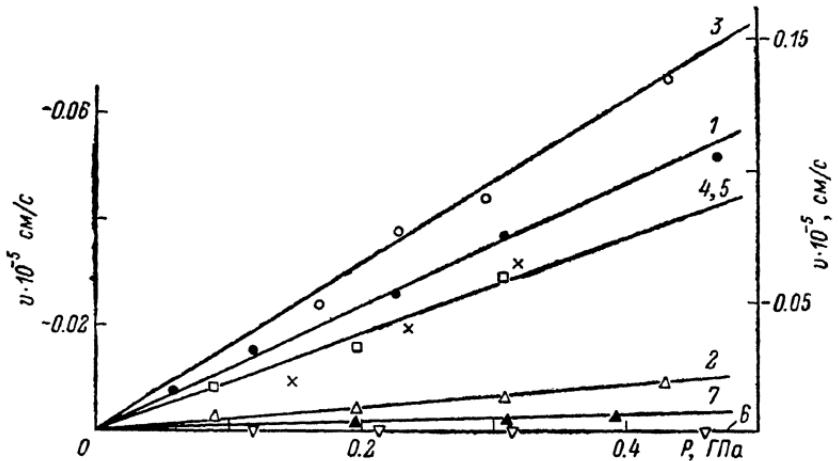


Рис. 3. Изменение скорости гиперзвуковых волн под действием нагрузки при одноосном сжатии.

1 — поперечная волна, схема рассеяния a ; 2 — поперечная волна, схема b ; 3 — продольная волна, схема e ; 4 — продольная волна, схема a ; 5 — поперечная волна, схема e ; 6 — квазипродольная волна, схема e ; 7 — расчет изменения скорости гиперзвукка при учете влияния изменения показателя преломления на сдвиг частоты поперечной волны. $q \perp P$, $u_t \parallel P$.

что различие в скоростях поперечных волн типично для кристаллов с симметрией гексагональной решетки, в частности для берилля и титана. Для колебаний с поляризацией u_{t_1} , параллельной оси симметрии, скорости v_t , соответственно равны 9350 и 3230 м/с, в то время как для поляризации, перпендикулярной оси симметрии, $v_{t_2}=8480$ и 2795 м/с соответственно [9].

Теперь перейдем к результатам по исследованию влияния нагрузки на упругие постоянные c_{ik} . При этом необходимо учитывать не только изменение скорости упругих волн, но и изменение плотности кварцевого стекла при сжатии. В качестве примера приводим характеристику изменения модуля упругости c_{33} для продольной волны с $q \parallel P$

$$\Delta c_{33} = c_{33} \left(1 + \frac{6K}{v_t} \frac{\partial v_t}{\partial P} \right) \frac{P}{3K}, \quad (7)$$

где K — сжимаемость. Упругие модули исходного образца вычислены из данных по спектрам МБР, согласно формулам табл. 2. Рис. 4 иллюстрирует изменение модулей c_{33} и c_{13} и модуля упругости E , определяемого соотношением

$$E = c_{33} - 2c_{13}^2 / (c_{11} + c_{12}). \quad (8)$$

Как видно из рис. 4, эти модули ведут себя аномально, уменьшаясь линейно с ростом сжимающего напряжения.

Теперь обратимся к вычислению величины термодинамического параметра ангармонизма — коэффициента Грюнайзена. Согласно теории Дебая, предельная частота колебаний твердого тела определяется соотношением [8]

$$v = \left(\frac{27N}{4\pi V} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{v_t^3} + \frac{2}{v_t^3} \right)^{-1/3}, \quad (9)$$

где N/V — концентрация кремний-кислородных тетраэдров в кварцевом стекле. Подставляя в (9) значения v_t и v с $\mathbf{q} \parallel \mathbf{P}$ из табл. 2 (схема 6), найдем параметр Грюнайзена

$$-\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial \epsilon} = \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{v_t} \frac{\partial v_t}{\partial P} + \frac{2n^3}{v_t} \frac{\partial v_t}{\partial P} \left(\frac{v_t}{v} \right)^3}{1 + 2(v_t/v)^3 n^3} \cdot 3K = +G. \quad (10)$$

Расчет показал, что $G = -0.79$. Далее найдем параметр ангармонизма для коротковолнового колебания с волновым вектором $\mathbf{q} \perp \mathbf{P}$. В этом направ-

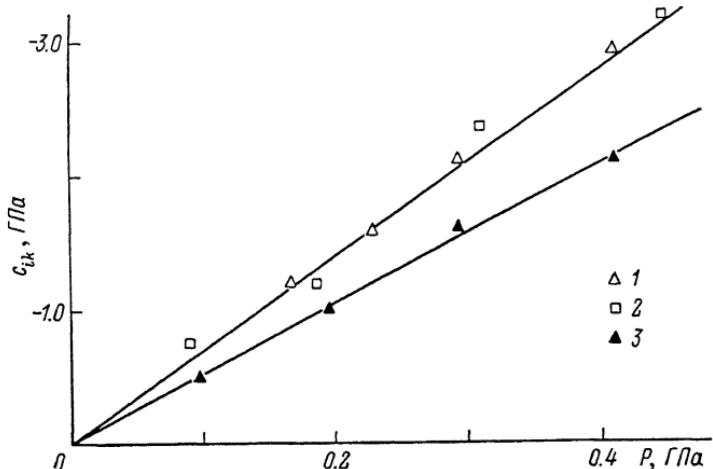


Рис. 4. Изменение упругих постоянных модулей c_{ek} под действием сжимающей нагрузки: c_{33} (1), c_{13} (2), E (3).

лении распространяются одна продольная и две вырожденных поперечных волны с $\mathbf{u}_t \perp \mathbf{P}$ и $\mathbf{u}_t \parallel \mathbf{P}$. Подставив в (9) вместо скоростей v_t и v их выражение через частоты МБР, согласно табл. 2, получим выражение для коэффициента Грюнайзена для определенной моды

$$G = \frac{1}{3} + \frac{\frac{2\sqrt{2}n^3}{v_t} \frac{\partial v_t}{\partial P} + \frac{(4n^2 - 2)^{3/2}}{v_{t_1}} \left(\frac{v_t}{v_{t_1}} \right)^3 \frac{\partial v_{t_1}}{\partial P} + \frac{2\sqrt{2}n^3}{v_{t_2}} \left(\frac{v_t}{v_{t_2}} \right)^3 \frac{\partial v_{t_2}}{\partial P}}{2\sqrt{2}n^3 [1 + (v_t/v_{t_1})^3] + (4n^2 - 2)^{3/2} (v_t/v_{t_2})^3} \cdot 3K. \quad (11)$$

Расчеты приводят к значению модового коэффициента Грюнайзена $G = -1.36$. Таким образом, и термодинамические параметры ангармонизма и модовые, определяемые как

$$\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial \epsilon} = -G,$$

для упругих колебаний с волновыми векторами $\mathbf{q} \perp \mathbf{P}$ и $\mathbf{q} \parallel \mathbf{P}$ оказываются также отрицательными, т. е. проявляется аномальное поведение и параметра ангармонизма межатомного взаимодействия.

Аномальное поведение упругих модулей кварцевого стекла при одностороннем сжатии и параметров ангармонизма межатомного взаимодействия может быть обусловлено спецификой поведения связей Si—O—Si соседних тетраэдров при сжатии. Обратимся к табл. 3, в которой представлены данные о длинах связей Si—O с вариацией угла Si—O—Si в разных кристаллах, заимствованные из работы [10]. Из этих данных следует, что уменьшение угла Si—O—Si приводит к увеличению длины связи Si—O.

Поскольку при сжатии образцов углы между связями Si—O—Si соседних тетраэдров уменьшаются, то это и приводит в действительности к увеличению межатомных расстояний Si—O, которыми и определяются, следовательно, и уменьшение упругих постоянных c_{ik} (за исключением c_{11} и c_{12}), и положительные значения модовых параметров ангармонизма. Отсюда становится понятным и естественным, что с увеличением длины связи Si—O при сжатии плавленого кварца будет уменьшаться частота колебаний, наблюдавшихся при МБР, а вместе с ними будут уменьшаться и скорости распространения упругих колебаний и значения упругих коэффициентов c_{ik} .

Основные результаты по изучению пьезоскопического эффекта манделыштам-брюллюновского рассеяния света в плавленом кварце сводятся к следующему.

1. Определены силовые сдвиги частот МБР с разными направлениями волновых векторов и смещений относительно направления сжатия при одноосном деформировании образца.

2. Обнаружено снятие вырождения частот и скоростей поперечной моды с разными направлениями векторов смещения — параллельно и перпендикулярно направлению одноосного сжатия.

3. Получены закономерности изменения скоростей и упругих колебаний и модулей упругости в зависимости от нагрузки при одноосном сжатии.

4. На основе данных о сдвиге частот МБР при одноосном сжатии вычислены модовые параметры ангармонизма.

Проведенные исследования показали, что экспериментальные результаты по спектроскопии МБР материалов в нагруженном и ненагруженном состоянии позволяют получить полную информацию о параметрах упругонапряженного состояния и модовых параметрах ангармонизма межатомного взаимодействия. Эти данные уже могут быть заложены в анализ кинетического подхода к описанию прочности, долговечности и разрушения твердых тел или в анализ других явлений, с которыми эти параметры связаны.

Список литературы

- [1] Meade C., Jeanlo R. // Phys. Rev. B. 1987. V. 35. N 1. P. 236—244.
- [2] Malindev F. P., Proctor B. A. // Phys. and Chemistry of Glasses. 1964. V. 5. N 4. P. 91—103.
- [3] Kondo K., Sauvoka A. // J. Appl. Phys. 1981. V. 52. N 4. P. 2826—2831.
- [4] Grimsditch M. // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. N 25. P. 2379—2381.
- [5] Strössnev K., Hochheimer H. D. // J. Chem. Phys. 1985. V. 82. N. 12. P. 5364—5367.
- [6] Журков С. Н. // ФТТ. 1980. Т. 22. № 11. С. 3344—3349.
- [7] Петров В. А. // ФТТ. 1983. Т. 25. № 10. С. 3124—3127.
- [8] Вустер У. Применение тензоров и теорий групп для описания физических свойств кристаллов / Под ред. Л. А. Шувалова. М.: Мир, 1977. С. 117—133.
- [9] Дъелсан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах / Под ред. В. В. Леманова. М.: Наука, 1982. С. 170—171.
- [10] Лазарев А. Н. Колебательные спектры и строение силикатов. М.: Наука, 1968. 326 с.