Письма в ЖТФ, том 22, вып. 24 26 декабря 1996 г.

01;03

УРАВНЕНИЕ НЕСФЕРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В ЖИДКОСТИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

© *В.Г.Ковалев*

Получено уравнение динамики газового пузырька в жидкости с учетом несферичности колебаний последнего. При этом форма пузырька, скорость движения его поверхности и давления на ней представлены в виде разложения по полиномам Лежандра. Динамика жидкости описывается волновым уравнением, волновые процессы в газе не учитываются.

Математическое моделирование волновых процессов в газожидкостных средах [1–3] предполагает использование в качестве уравнения динамики газовых пузырьков уравнения типа Рэлея [4–6], полученные в приближении сферической симметрии процесса. Между тем, по крайней мере вследствие обтекания пузырька жидкостью, начальная форма его отличается от сферической. К нарушению сферической симметрии могут привести также несимметричность внешнего воздействия [7] и другие факторы.

Несферичность пузырька, обычно малая вначале, при определенных условиях может возрастать вплоть до дробления последнего, что наблюдалось в экспериментах [8–9]. Целью настоящей работы является построение уравнения, описывающего несферические пульсации пузырька при значительной амплитуде последних, что необходимо при теоретическом описании и определении условий дробления пузырьков при действии волн давления высокой интенсивности.

Примем, что динамика жидкости описывается линейным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)=\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где φ — потенциал скоростей, c_0 — невозмущенная скорость звука в жидкости.

Решение уравнения (1) ищем в виде разложения потенциала скоростей φ по полиномам Лежандра $P_n(\cos\theta)$:

$$\varphi(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(r,t)\,P_n(\cos\theta). \tag{2}$$

Полагая движение жидкости и пульсации пузырька билатерально-симметричными [10], получим, что в разложении (2) присутствуют только четные члены. Наконец, рассматривая лишь наиболее простую форму несферичности, ограничимся двумя членами разложения (2).

Ограниченное на бесконечности решение волнового уравнения (1) в трансформантах Лапласа с учетом асимптотики порядка $1/r$ для функций Макдональда имеет вид

$$\varphi^L = \frac{B^L(s)}{r}\,e^{-kr} + \frac{D^L(s)}{r}\,e^{-kr}\left(k + \frac{3}{r}\right)\left(3\xi^2 - 1\right), \qquad (3)$$

где трансформанта преобразования помечена индексом L, s — параметр преобразования, $k = s/c_0$, $\xi = \cos\theta$, $B^L(s)$, $D^L(s)$ — неизвестные функции.

Найдем, дифференцируя (3) по r, трансформанту Лапласа поля скоростей

$$V^L = -B^L(s)e^{-kr}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{k}{r}\right) - D^L(s)e^{-kr}\left(\frac{k^2}{r} + \frac{\varphi_k}{r^2} + \frac{6}{r^3}\right)\left(3\xi^2 - 1\right). \qquad (4)$$

Как видим, поле скоростей и в жидкости, и на поверхности пузырька представляет сумму сферической V_s^L и несферической V_e^L компонент. Соответственно и радиус-вектор поверхности пузырька $R(\theta, t)$ необходимо представить в виде суммы аналогичных компонент R_s и R_e:

$$R(\theta, t) = R_s(t) + R_e(t)(3\xi^2 - 1). \qquad (5)$$

С учетом (4), (5) кинематическое условие на поверхности пузырька запишем в виде

$$\lim_{r \to R_s} V_s = \dot{R}_s, \qquad \lim_{r \to R_s} V_e = \dot{R}_e. \qquad (6)$$

Подставляя оригинал выражения (4) в условия (6) и учитывая, что в начальный момент скорость пульсаций равна нулю, получим

$$B + \frac{1}{c_0} R_s \dot{B} = -R_s^2 \dot{R}_s; \qquad (7)$$

$$\ddot{D} + \frac{4c_0}{R_s}\,\dot{D} + \frac{6c_0^2}{R_s^2}\,D = -c_0^2 R_s \dot{R}_e. \qquad (8)$$

Далее определим давление на поверхности пузырька аналогичным образом:

$$P = P_s + (3\xi^2 - 1)\,P_e. \qquad (9)$$

Используя интеграл Коши–Лагранжа и производя предельный переход на сферическую поверхность, получим

$$\frac{R_s \dot{R}_s^2}{2} + \dot{B} = -\frac{P_s R_s}{\rho_0}; \tag{10}$$

$$\frac{\ddot{\mathcal{D}}}{c_0 R_s} + \frac{3\dot{\mathcal{D}}}{R_s^2} = -\frac{P_e}{\rho_0}, \tag{11}$$

где ρ_0 — невозмущенная плотность жидкости.

Следуя стандартной методике исключения (см., например, [11,12]), из (7), (10) получим уравнение динамики сферической компоненты пузырька, совпадающее с полученным ранее [12,13] за исключением слагаемого, описывающего изменение лапласова давления $P_{\sigma s}$:

$$R_s \ddot{R}_s \left(1 + \frac{P_s}{\rho_0 c_1^2} - \frac{\dot{R}_s}{c_1} + \frac{\dot{R}_s^2}{2c_1^2}\right) + \frac{3}{2}\dot{R}\frac{2}{s}\left(1 - \frac{\dot{R}_s}{3c_1}\right) =$$

$$= \frac{P_s}{\rho_0}\left(1 + \frac{\dot{R}_s}{c_1}\right) + \frac{R_s \dot{P}_s}{\rho_0 c_1}; \qquad c_1 = c_0 + \dot{R}_s,$$

$$P_s = \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_{s0}}\right)\left(\frac{R_{s0}}{R_s}\right)^{3\gamma} \cdot P_0 - P_{\text{в}} - P_{\sigma s}, \tag{12}$$

где P_0 — гидростатическое давление, σ — коэффициент поверхностного натяжения, R_{s0} — невозмущенное значение сферической моды, $P_{\text{в}}$ — давление волны.

Аналогичным образом, последовательно применяя к (8), (11) исключение высшей производной и дифференцирования $\mathcal{D}$, получим уравнение динамики несферической моды

$$R_s^2(\dot{R}_s + 3c_0)\left(\frac{\ddot{P}_e}{\rho_0} - c_0 \dddot{R}_e\right) - R_s\left[R_s \dddot{R}_s - 3(2\dot{R}_s + c_0)(\dot{R}_s + 3c_0)\right] \times$$

$$\times \left(\frac{\dot{P}_e}{\rho_0} - c_0 \ddot{R}_e\right) + 3\left[\dot{R}_s(\dot{R}_s + 3c_0)(2\dot{R}_s + 3c_0) + 3c_0 R_s \ddot{R}_s\right] \times$$

$$\times \left(\frac{P_e}{\rho_0} - c_0 \dot{R}_e\right) - c_0\left[R_s \ddot{R}_s - c_0(\dot{R}_s + 3c_0)\right]\frac{P_e}{\rho_0} - c_0 R_s(\dot{R}_s + 3c_0)\frac{\dot{P}_e}{\rho_0} = 0. \tag{13}$$

Перейдем теперь к вопросу определения $P_{\sigma s}$ и P_e. Очевидно, что из всех компонент давления, действующего внутри пузырька, только давление, обусловленное поверхностным натяжением, зависит от формы поверхности. Указанное давление связано с локальной кривизной поверхности K соотношением

$$P_\sigma = \sigma K, \tag{14}$$

где

$$K = \frac{r'z'' - z'r''}{(r'^2 + z'^2)^{3/2}};$$

$$r = (R_s - R_e)\sin\theta + 3R_e\cos^2\theta\sin\theta; \tag{15}$$

$$z = (R_s - R_e)\cos\theta + 3R_e\cos^3\theta, \tag{16}$$

а штрих означает дифференцирование по θ.

Подставим (15), (16) в (14), после ряда громоздких преобразований получим

$$K = -\frac{1 + \zeta(91\xi^4 - 143\xi^2 + 64) + \zeta^2(\xi^6 - 28\xi^4 + 54\xi^2)}{(R_s - R_e)(1 + 6\zeta\xi^2 + 36\zeta^2\xi^2 - 27\zeta^2\xi^4)^{3/2}}, \tag{17}$$

где $\zeta = \frac{R_e}{R_s - R_s}$.

Найдем компоненты разложения кривизны поверхности и тем самым давления по полиномам Лежандра

$$K_n = \frac{2n+1}{2}\int\limits_{-1}^{1} K(\xi)P_n(\xi)\,d\xi. \tag{18}$$

Аналитическое интегрирование (18) с выражением (17) связано с весьма громоздкими выкладками. Поэтому целесообразно вычислить (18) численно для интервала значений ζ и затем аппроксимировать полученную зависимость.

Результаты численного интегрирования для нулевой и второй лежандровых мод показывают, что указанные интегралы являются гладкими монотонными функциями ζ и могут быть с высокой точностью аппроксимированы простыми выражениями. Действительно, уже зависимости

$$K_0 = 52 - 50e^{-\zeta}; \qquad K_2 = 14\zeta^2 - 20\zeta$$

обеспечивают в диапазоне $\zeta \leqslant 0.3$ точность аппроксимации 10^{-6}.

Таким образом, для сферической компоненты пульсаций далвение поверхностного натяжения можно представить в виде

$$P_{\sigma s} = \frac{\sigma(52 - 50e^{-\zeta})}{R_s - R_e}. \tag{19}$$

Отметим, что при $R_e = 0$ (19) переходит в лапласово давление $2\sigma/R_s$. Несферическую компоненту давления запишем в виде

$$P_e = P_{\sigma e} = \frac{2\sigma\zeta(7\zeta - 10)}{R_s - R_e}. \tag{20}$$

В результате численного исследвоания системы полученных уравнений (12), (13) с учетом соотношений (19), (20) могут быть получены критерии использования сферически симметричного описания, а также условия дробления пузырьков при действии на них волн давления болшой амплитуды.

Список литературы

[1] *Кутателадзе С.С., Накоряков В.Е.* Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск: Наука, 1984. 302 с.
[2] *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. I. 464 с.; Ч. II. 360 с.
[3] *Наугольных К.А., Островский Л.А.* Нелинейные волновые процессы в акустике. М.: Наука, 1990. 237 с.
[4] *Rayleigh* // Philos. Mag. 1917. V. 34. P. 94–98.
[5] *Herring C.* // O.S.R.D. 1941. N 236. P. 530–534.
[6] *Trilling L.* // Appl. Phys. 1952. 23. N 1. P. 81–88.
[7] *Feng Z.C., Leal L.G.* // J. Fluid. Mech. 1994. V. 266. P. 209–242.
[8] *Гельфанд Б.Е., Губин С.А., Когарко С.М., Симаков С.М.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 4. С. 51–56.
[9] *Гельфанд Б.Е., Губин С.А., Нигматулин Р.И., Тимофеев Е.И.* // ДАН СССР. 1977. Т. 235. № 2. С. 292–294.
[10] *Plesset M.S., Mitchell T.P.* // Quant. Appl. Math. 1956. V. 13. N 4. P. 419–430.
[11] *Поздеев В.А., Бескаравайный Н.М., Ковалев В.Г.* Импульсные возмущения в газожидкостных средах. Киев: Наук. думка, 1988. 116 с.
[12] *Ковалев В.Г.* // Акустический журнал. 1994. Т. 40. № 4. С. 606–608.
[13] *Ковалев В.Г.* // ЖТФ. 1996. Т. 66. В. 4. С. 24–29.

Институт импульсных процессов
и технологий АН Украины
Николаев

Поступило в Редакцию
19 сентября 1996 г.