Письма в ЖТФ, том 22, вып. 23 12 декабря 1996 г.

01;03;12

К ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ

© *Р.П.Мейланов*

Изучение свойств пористых сред, обладающих фрактальной структурой, требует решений ряда фундаментальных проблем, одна из которых связана со сложной геометрической структурой порового пространства. Нередко предсказания теории, основанные на моделях порового пространства в рамках обычной евклидовой геометрии, расходятся с экспериментальными данными.

Исследования свойств систем, обладающих фрактальной структурой, практически не поддаются теоретическому исследованию стандартными методами статистической физики.

Значительный прогресс при исследовании свойств неупорядоченных систем, в том числе и пористых структур, достигнут при использовании теории фракталов — множеств с дробной пространственной размерностью [1–10]. Использование множеств дробной размерности при исследовании систем с фрактальными структурами открывает совершенно новые возможности для более последовательного исследования свойств этих объектов.

Работы по исследованию систем с фрактальной структурой можно разделить на две группы. Одна группа основана на использовании численных методов, например в модели перколяционного кластера или в модели, ограниченной диффузией агрегации [1]. Другая группа основана на теоретических методах. Одним из теоретических методов, часто обсуждаемых в последние годы, является метод, основанный на применении дробных интегралов и производных. В частности, в работе [3] показано, что в ветвящихся фрактальных структурах могут быть реализованы сверхмедленные процессы, описываемые уравнениями диффузии с временно́й дробной производной, показатель которой α лежит в интервале $0 < \alpha < 1$. Эти же уравнения, как показано в [3], описывают эволюцию некоторой физической системы с "остаточной" памятью. В [10] показано, что при последовательном описании стохастических процессов приходится иметь дело с уравнениями в дробных производных.

Отметим, что функции, описывающие свойства систем с фрактальной структурой, относятся к классу неаналитических функций. Так, например, плотность вероятности обнаружения частицы в данной пространственно-временно́й точке для треугольной кривой Серпинского является неаналитической функцией, имеющей особенности на всех масштабах [5]. В целом для описания свойств систем с фрактальной структурой требуется широкий класс функций, включающих наряду с регулярными функциями, суммируемыми с некоторой степенью, и класс обобщенных функций, включающий и сингулярные функции. Именно такой класс функций и является решениями обыкновенных дифференциальных функций дробного порядка [12].

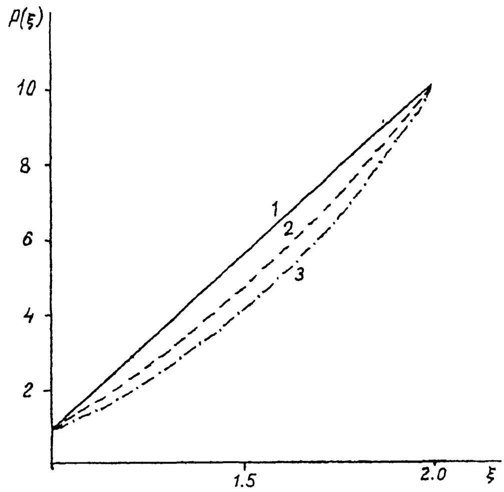
В настоящей работе для исследования стационарной фильтрации в пористой среде с фрактальной структурой используются дифференциальные уравнения дробного порядка. Причем фрактальная размерность системы определяет порядок производной дифференциального уравнения.

Исходные уравнения фильтрации имеют вид

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}v(x) = 0, \qquad v(x) = -k\frac{d^\alpha P(x)}{dx^\alpha}, \tag{1}$$

где v — скорость фильтрации, k — проницаемость, P — давление, α — размерность фрактальной структуры, $1 \leqslant \alpha < 2$.

Система уравнений (1) представляет собой обобщение закона Дарси на случай систем с фрактальной структурой.



Зависимость $P(\xi)$ для различных значений α: *1* — 1, *2* — 1.5, *3* — 1.9.

Согласно (1), для давления получим уравнение

$$\frac{d^{2\alpha}}{dx^{2\alpha}}P(x) = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим случай простейших граничных условий $P(x = a) = P_1$, $P(x = b) = P_2$.

Решение дифференциального уравнения (2) можно представить в виде [12]

$$P(\xi) = \frac{P_1 - \mathcal{D}^{2\alpha-1} \cdot P_2}{[1 - \mathcal{D}^{\alpha}]A^{\alpha-1}} \cdot \xi^{\alpha-1} + \frac{P_2 - \mathcal{D}^{1-2\alpha} \cdot P_1}{[1 - \mathcal{D}^{\alpha}]B^{2\alpha-1}} \cdot \xi^{2\alpha-1}, \tag{4}$$

где $\xi = x/l$, $l = b - a$, $\mathcal{D} = a/b$, $A = a/l$, $B = b/l$.

Решение (3) при $d \to 1$ переходит в решение уравнения для одномерной задачи. На рисунке приведены результаты расчета зависимости $P(\xi)$ для различных значений α. Как видно, эта зависимость носит нелинейный характер. Полученное решние с принципиально иной точки зрения объясняет нелинейный характер решения задач теории фильтрации. Важнейшим параметром при этом становится размерность фрактальности среды.

В заключение отметим, что хотя математический аппарат дробного исчисления в настоящее время хорошо разработан [10,11], их широкое применение сдерживается отсутствием их ясной физической интерпретации, что связано с отсутствием в настоящее время физической интерпретации пространственно-временно́го континиума дробной размерности.

Список литературы

[1] *Mandelbort B.B.* // The Fractal Geometry of Nature. New York, 1982.

[2] *O Shaughnessy B., Procaccio I.* // Phys. Rev. A. 1985. V. 54. P. 3073–3083.

[3] *Nigmatullin R.R.* // Physica Status Solidi (b). 1986. V. 133. P. 425–430.

[4] *Смирнов Б.М.* // УФН. 1986. Т. 149. В. 2. С. 177–219.

[5] *Соколов И.М.* // УФН. 1986. Т. 150. В. 2. С. 221–255.

[6] *Мосолов А.Б., Динариев О.Ю.* // ЖТФ. 1988. Т. 58. В. 2. С. 233–240.

[7] *Мальшаков А.В.* // ИФЖ. 1992. Т. 62. В. 3. С. 405–410.

[8] *Нигматулин Р.Р.* // ТМФ. 1992. Т. 90. В. 3. С. 354–368.

[9] *Зосимов В.В., Лемешев Л.М.* // УФН. 1995. Т. 165. В. 4. С. 361–401.

[10] *Чукбар К.В.* // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. В. 5 (11). С. 1875–1884.

[11] *Oldham K., Spanier J.* // Fractional Calculus. London, New York: Academic Press, 1973.

[12] *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* // Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

Поступило в Редакцию
9 апреля 1996 г.