

01;10

## ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА НА КОЛЕБАНИЯ ЛЕНТОЧНОГО ПУЧКА В ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ

© Н.Д.Наумов

Построена самосогласованная модель ленточного пучка, распространяющегося в направлении дрейфа заряженной частицы в ортогональных электрическом и магнитном полях. Рассмотрены нелинейные колебания пучка с учетом влияния пространственного заряда.

Аналитические решения самосогласованных уравнений движения заряженного газа играют важную роль для теоретического описания динамики пучков заряженных частиц. Решения этих уравнений известны для стационарных состояний пучка [1]. Несомненный интерес представляет построение нестационарных решений. Такие решения были получены в работах [2-4] для однородных распределений, когда при переходе к автомодельным переменным система уравнений в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В данной работе найдено решение для неоднородного ленточного пучка, распространяющегося в направлении дрейфа заряженной частицы в ортогональных электрическом и магнитном полях.

Пусть магнитное поле  $B_0$  направлено вдоль оси  $z$ , электрическое поле  $E_0$  — против оси  $x$ , причем  $E_0 < B_0$ . Пучок заряженных частиц в виде плоского слоя распространяется вдоль оси  $y$ . Задано некоторое начальное распределение плотности частиц  $n(x, 0) = N(x)$ , а начальная поперечная скорость пучка равна нулю. Требуется определить изменение характеристик пучка с течением времени с учетом влияния пространственного заряда.

В данном случае система уравнений, описывающая движение холодного газа нерелятивистских заряженных частиц, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nV_x) = 0, \quad \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{e}{m}(E + E_0) + \omega V_y,$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi en, \quad \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} = -\omega V_x,$$

где  $\omega = eB_0/mc$  — циклотронная частота. Из последнего уравнения следует, что  $V_y = u - \omega x$ , где  $u = cE_0/B_0$  — скорость дрейфа частицы в ортогональных полях. Поэтому для

поперечной скорости потока найдем, опуская для краткости индекс  $x$ :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{e}{m} E - \omega^2 x. \quad (1)$$

Рассмотрим вначале несколько сравнительно простых моделей начального распределения плотности частиц. Выберем  $N(x)$  в виде прямоугольной функции:

$$N(x) = n_0, \quad |x| \leq a, \quad N(x) = 0, \quad |x| > a.$$

Для такого начального возмущения поперечное движение частиц в пучке будет автомодельным, относящимся к классу движений, для которых скорости пропорциональны расстоянию до центра симметрии слоя [5]. Если обозначить через  $2aR_0$  ширину пучка в некоторый момент времени, то для гидродинамических характеристик пучка найдем:

$$n(x, t) = n_0/R_0, \quad V(x, t) = x\dot{R}/R, \quad R_0 = h_0 + (1 - h_0) \cos \tau. \quad (2)$$

Введены обозначения:  $\tau = \omega t$ ,  $h_0 = \omega_0^2/\omega^2$ ,  $\omega_0^2 = 4\pi n_0 e^2/m$ .

Похожий вид решения сохранится и в случае кусочно-однородной функции  $N(x)$ . Например, если

$$N(x) = n_0, \quad |x| < a, \quad N(x) = n_1, \quad a < |x| \leq a + 2b$$

и  $N(x) = 0$  при остальных значениях  $x$ , то характеристики пучка в центральном слое имеют вид (2). Для слоя при  $aR_0 < x \leq 2bR_1$  имеем:

$$n(x, t) = n_1/R_1, \quad U(x, t) = \dot{s} + (x - s)\dot{R}_1/R_1, \quad (3)$$

$$R_1 = h_1 + (1 - h_1) \cos \tau, \quad s = q + (s_0 - q) \cos \tau, \quad (4)$$

где  $h_1 = \omega_1^2/\omega^2$ ,  $\omega_1^2 = 4\pi n_1 e^2/m$ ,  $q = ah_0 + bh_1$ ,  $s$  — координата центра слоя, т. е.  $s_0 = a + b$ . Нетрудно убедиться в том, что для каждого момента времени  $aR_0 = s - bR_1 \equiv x_1$ ,  $V(x_1, t) = U(x_1, t)$ . Таким образом, в данном случае скорость газа непрерывна, тогда как его плотность испытывает скачки, т. е. рассмотренная задача является примером динамики контактного разрыва [6] в заряженном газе.

Как видно из полученных результатов, перемещение центра каждого слоя определяется влиянием электрического поля соседних слоев, причем, что существенно, величина этого поля не зависит от времени и определяется начальными условиями. Выражения (3), (4) справедливы и в случае большего количества слоев. Поэтому, предполагая для определенности, что  $N(x)$  — четная функция, найдем

$$n(s, t) = N(x_0)/R, \quad V(s, t) = \omega(q - x_0) \sin \omega t, \quad (5)$$

$$s = q + (x_0 - q) \cos \tau, \quad d = \int_0^{x_0} h(x) dx, \quad (6)$$

$$R = h + (1 - h) \cos \tau, \quad h = 4\pi e^2 N(x_0) / m\omega^2. \quad (7)$$

Эти соотношения дают сравнительно простой алгоритм непосредственного вычисления характеристик пучка для заданного момента времени  $t$ . Для этого по начальному распределению плотности частиц согласно (6), (7) находим  $s$ ,  $R$ , а затем подставляем эти величины в (5). При последовательном изменении  $x_0$  с небольшим шагом подобная процедура позволяет получить с приемлемой точностью распределение плотности частиц и скорости пучка. Для иллюстрации на рисунках представлены результаты таких расчетов для нелинейных колебаний пучка со следующим начальным распределением плотности частиц:

$$N(x) = n_0 \left( 1 - \frac{2f}{\pi} + f \cos \frac{\pi x}{2a} \right), \quad |x| \leq a. \quad (8)$$

Кривые 1, 2, 3 соответствуют профилям плотности частиц в моменты времени  $t = 0$ ,  $\pi/2\omega$  и  $\pi/\omega$  при  $h_0 = 0.9$  (рис. 1) и  $h_0 = 1.1$  (рис. 2); параметр  $f = 0.25$  в обоих случаях. В первом случае силы магнитного сжатия преобладают над силами пространственного заряда и средняя толщина пучка меньше его начальной толщины. Второй случай соответствует обратному соотношению сил и большему значению среднего поперечного размера пучка.

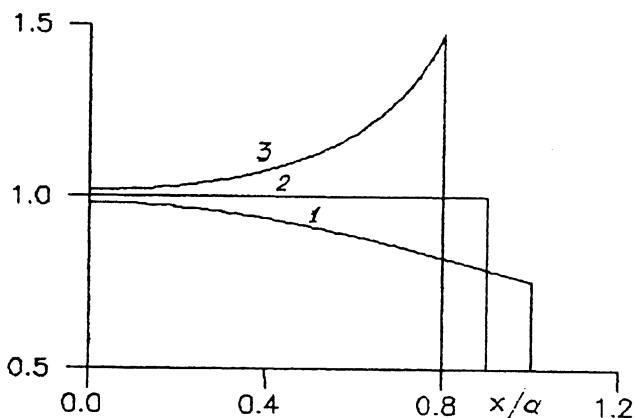


Рис. 1.

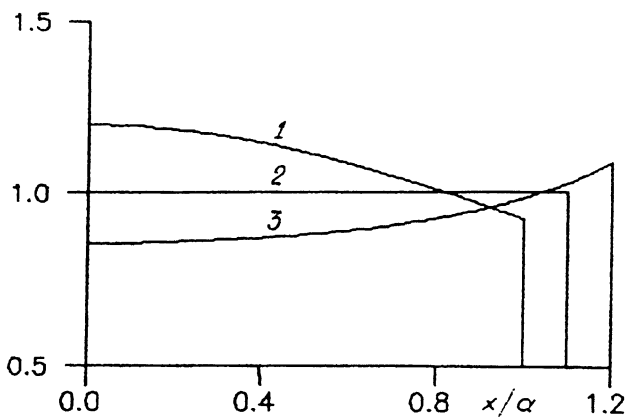


Рис. 2.

Очевидно, что явное выражение для решения может быть получено в том случае, если из (6) выразить  $x_0$  как функцию  $s$  и  $t$  и подставить эту зависимость в выражения (5), (7). В частности, это можно сделать в случае

$$N(x) = n_0 / \sqrt{(1-f)^2 + 4f|x|/a}, \quad |x| \leq a, \quad (9)$$

где  $f$  играет роль параметра. В результате для  $x \geq 0$  получим

$$n(x, t) = n_0/A,$$

$$V(x, t) = a\omega \sin \tau \left[ (1-f-h_0)^2 - (h_0-A)^2 / \cos^2 \tau \right] / 4f,$$

где  $A = ([h_0 + (1-f-h_0) \cos \tau]^2 - 4f \frac{x}{a} \cos \tau)^{1/2}$ .

В заключение отметим, что выражение (5) справедливо для произвольных моментов времени, если  $h > 1/2$  для всех  $x_0$ ; в частности, для плотности частиц (8) это выполняется при  $f < \pi(1 - 1/2h_0)/2$ , а для (9) — при  $f < 2h_0 - 1$ . В противном случае применимость (5) определяется интервалом времени до момента обращения в нуль функции  $R$ . Это связано с нарушением в этот момент времени исходного предположения об отсутствии обгона одних слоев газа другими. Такие обгоны, когда плотность частиц стремится к бесконечности, можно рассматривать как временные катастрофы [7].

## Список литературы

- [1] Девидсон Р. Теория заряженной плазмы. М.: Мир, 1978. 215 с.
- [2] Наумов Н.Д. // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19. В. 10. С. 59-62.
- [3] Наумов Н.Д. // Физика плазмы. 1993. Т. 19. В. 11. С. 1406-1408.
- [4] Наумов Н.Д. // ДАН. 1996. Т. 346. В. 4.
- [5] Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 448 с.
- [6] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 453 с.
- [7] Быков В.П., Герасимов А.В., Турин В.О. // УФН. 1995. Т. 165. № 8. С. 955-966.

Поступило в Редакцию  
4 апреля 1996 г.

---