01;05.2

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ПРОВОДИМОСТИ СЛАБОНЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЫ ВБЛИЗИ ПОРОГА ПРОТЕКАНИЯ

© *А.А.Снарский*

Для двухфазной случайно-неоднородной среды найдена универсальная функция, определяющая концентрационное и полевое поведение эффективной проводимости выше и ниже порога протекания в случае слабонелинейной произвольной формы вольт-амперной характеристики фаз.

В последнее время физика нелинейных композитов вблизи порога протекания привлекает большое внимание (см., например, [1–3] и цитируемую там литературу). Проводящие свойства случайно-неоднородного композита характеризуются эффективной проводимостью σ^e, связывающей, по определению, средние по объему электрические поля $\langle \mathbf{E} \rangle$ и токи $\langle \mathbf{j} \rangle$:

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \sigma^e \langle \mathbf{E} \rangle, \qquad \langle \ldots \rangle = \frac{1}{L^d} \int \ldots dV, \tag{1}$$

предполагается, что размер образца L много больше характерного размера неоднородности.

Ниже будет рассмотрена задача об определении критического поведения эффективной проводимости вблизи порога протекания p_c в случае слабой нелинейности произвольной формы фаз, составляющих композит. Выше p_c будет предполагаться, что плохо проводящая фаза — идеальный диэлектрик с нулевой проводимостью, а ниже p_c, что хорошо проводящая фаза — идеальный проводник с нулевым сопротивлением.

Закон Ома для каждой из фаз можно записать в виде

$$\mathbf{j} = b_i(\mathbf{E})\mathbf{E}, \qquad b_i(\mathbf{E}) = \sum_{n=1} b_{i(n)} |\mathbf{E}|^{2(n-1)}, \tag{2}$$

где $b_i(\mathbf{E})$ задает вид нелинейности фаз ($i = 1$ — хорошо проводящая фаза, $i = 2$ - плохо). Слабость нелинейности означает, что $b_i(\mathbf{E})$ можно разложить в ряд по степеням поля. Первый коэффициент разложения в (2) — это, конечно, "обычная" проводимость $b_{i(1)} \equiv \sigma_i$. Выше p_c $\sigma_2 = 0$, ниже — $\sigma_1 = \infty$.

Аналогично (1) можно определить эффективный коэффициент $b^e(\langle\mathbf{E}\rangle)$, обобщающий σ^e на нелинейный случай

$$\langle\mathbf{j}\rangle = b^e(\langle\mathbf{E}\rangle)\langle\mathbf{E}\rangle, \qquad b^e(\langle\mathbf{E}\rangle) = \sum_{n=1} b^e_{(n)}\langle\mathbf{E}\rangle^{2(n-1)}, \tag{3}$$

причем $b^e(\langle\mathbf{E}\rangle)$ так же, как и b_i, можно разложить по степеням поля и, конечно, $b^e_{(1)} = \sigma^e$. Для определения b^e необходимо знать моменты локального поля. Используя соотношение $\langle\mathbf{E}(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r})\rangle = \langle\mathbf{E}(\mathbf{r})\rangle\langle\mathbf{j}(\mathbf{r})\rangle$ (частный случай теоремы Теллегена, см., например, [4–6]) можно получить

$$b^e_{(n)}(\langle\mathbf{E}\rangle) = \frac{\langle b_{i(n)}(\mathbf{r})(\mathbf{E}(\mathbf{r}))^{2n}\rangle}{\langle\mathbf{E}\rangle^{2n}}, \tag{4}$$

где случаю выше p_c отвечает $i - 1$, случаю ниже — $i = 2$. Аналогичным образом определен и так называемый n-й момент $C^e_{(n)}$ в линейной проводящей среде (см., например, [5,7,8,10])

$$C^e_{(n)} = \frac{\langle C_{(n)}(\mathbf{r})\sigma^n(\mathbf{r})\mathbf{E}^{2n}(\mathbf{r})\rangle}{(\sigma^e)^n\,\langle\mathbf{E}(\mathbf{r})\rangle^{2n}}. \tag{5}$$

Впервые связь между задачей о слабонелинейном композите при $n = 2$ и задачей об относительной спектральной плотности $1/f$ шума — $C^e_{(2)}$ была продемонстрирована в [10]. Действительно, из (4) и (5) следует, что

$$b^e_{(n)} = (\sigma^e)^n\, C^e_{(n)}, \tag{6}$$

если в выражениях правой части (6) произвести замену $\sigma^n(\mathbf{r})C_{(n)}(\mathbf{r}) \to b_{(n)}(\mathbf{r})$.

Строго говоря, указанная аналогия (6) имеет место только при $\sigma_2/\sigma_1 = 0$ и $n = 2$, поскольку $b^e_{(n)}$ в (4) определяется через момент локального поля $E(r)$ нелинейной задачи, а $E(r)$ в (5) линейной. В случае $n = 2$ согласно теореме Теллегена $b^e_{(2)}$ определяется полем линейной задачи [10]. При $n > 2$ искажением локального поля нелинейными слагаемыми (2) пренебречь, вообще говоря, нельзя.

Однако в сильно неоднородном случае ($\sigma_1 = \infty$) ниже порога протекания аналогия (6) имеет место. В этом случае все напряжение, приложенное к образцу, падает на так называемые single disconnected bond [11,12], совокупность которых образует прослойку минимальной толщины из плохо проводящей фазы между частями идеально проводящей фазы. Падение напряжения на прослойке, таким образом, не зависит от величины коэффициентов $b_{2(n)}$ в (2).

Поведение $C^{e}_{(n)}$ вблизи p_c хорошо изучено [5,7–9,13,14] и, согласно, например, [9], ниже p_c

$$C'^{e}_{(n)} = C_{2(n)}(p_c - p)^{-k'_n}, \qquad p < p_c, \qquad \sigma_1 = \infty, \tag{7}$$

и выше p_c

$$C'^{e}_{(n)} = C_{1(n)}(p - p_c)^{-k_n}, \qquad p > p_c, \qquad \sigma_2 = 0, \tag{8}$$

где p — концентрация хорошо проводящей фазы.

Для дальнейшего существенно, что как численное моделирование [7,8,13,14], так и анализ на основе моделей перколяционной структуры [9] дает для k_n и k'_n линейную зависимость от n

$$k_n = [2\nu(d-1) - t](n-1), \qquad k'_n = (2\nu - a)(n-1),$$

где t и a — критические индексы проводимости выше и ниже порога протекания, а ν — корреляционной длины.

Используя аналогию (6) для $b^e_{(n)}$, получаем

$$b^e_{(n)} = b_{1(n)}(p_c - p)^{-u'_n}, \qquad p < p_c, \tag{9}$$

где, согласно (7) и (8),

$$u'_n = nq + k'_n = q + 2\nu(n-1). \tag{10}$$

Выражение (9) решает задачу о эффективной нелинейной проводимости, так как определяет любой n-й член разложения b^e. Заметим, однако, что линейная зависимость u'_n от n дает возможность получить b^e в замкнутом виде, т. е. выразить эффективный коэффициент не через коэффициенты разложения, а непосредственно через функции $b_i = b_i(x)$, задающие нелинейность фаз. В самом деле, подставляя (9) в (3):

$$b^e(\langle\mathbf{E}\rangle) = (p_c - p)^{-q} \sum_{n=1} b_{1(n)} \left[(p_c - p)^{\nu}\langle\mathbf{E}\rangle\right]^{2(n-1)}, \tag{11}$$

и используя то, что ряд (11) с точностью до обозначений совпадает с рядом (2), проведем его формальное суммирование

$$b^e(\langle\mathbf{E}\rangle) = (p_c - p)^{-q} b_2 \left[(p_c - p)^{-\nu}\langle\mathbf{E}\rangle\right]. \tag{12}$$

Из (12) следует, что эффективный коэффициент b_e ниже p_c непосредственно выражается через функцию $b_2(x)$, задающую вид нелинейности плохопроводящей фазы.

Аналогично обстоит дело и выше порога протекания, в этом случае все напряжение, приложенное к образцу, падает на мостике [15]. Повторяя все рассуждения, для $p_c < p$ получаем

$$b^e(\langle \mathbf{E} \rangle) = (p - p_c)^t b_1 \left[(p - p_c)^{t - \nu(d-1)} \langle \mathbf{E} \rangle \right]. \tag{13}$$

Таким образом, задача об определении критического поведения эффективной проводимости двухфазной слабонелинейной среды для случая $\sigma_2/\sigma_1 = 0$ решена в общем виде. Задавая вольт-амперную характеристику хорошо проводящей фазы выше (ниже) порога протекания— $j = b_1(\mathbf{E})\mathbf{E}$ ($\mathbf{j} = b_2(\mathbf{E})\mathbf{E}$), из (12) ((13)) сразу же получаем концентрационную и полевую зависимости нелинейной эффективной проводимости.

В заключение заметим, что обобщение полученных результатов на случай конечной величины отношения $h = \sigma_2/\sigma_1 \neq 0$ является нетривиальным, так как в задаче кроме малого параметра, связанного с разложением по нелинейности ($b_{(2)}\mathbf{E}^2/b_{(1)} \sim \varepsilon \ldots$), появляется еще один, связанный с неоднородностью, $h \ll 1$ и конечный результат будет зависеть от величины отношения этих малых параметров.

Работа частично поддержана РФФИ (код 95-02-04432-а).

Список литературы

[1] *Сатанин А.М., Хорьков С.В., Угольников А.Ю.* // Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 62. С. 301.
[2] *Lee H.-C., Sin W.-H., Yu K.W.* // Phys. Rev. 1995. B 52. P. 4217.
[3] *Zang X., Stround D.* // Phys. Rev. 1994. B 49. P. 944.
[4] *Dykhne A.M.* // Sov. Phys. JETP. 1971. V. 32. P. 63.
[5] *Rammal R., Tannous C., Tremblay A.-M.S.* // Phys. Rev. 1985. A 31. P. 2662.
[6] *Balagurov B.J.* // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1987. V. 93. P. 1888.
[7] *De Arcangelis L., Redner S., Coniglio A.* // Phys. Rev. 1985. B. 31. P. 4725.
[8] *Albinet G., Tremblay R.R., Tremblay A.-M.S.* // J. Phys. 1 (Fr.). 1993. V. 3. P. 323.
[9] *Morozovskii A.E., Snarskii A.A.* // Sov. Phys. JETP. 1992. V. 75. P. 366.
[10] *Stroud D., Hui P.M.* // Phys. Rev. 1988. B. 37. P. 8719.
[11] *Dubrov V.E., Levinshtein M.E., Shur M.S.* // Sov. Phys. JETP. 1976. V. 43. P. 1050.
[12] *Wright D.C., Bergman D.J., Kantor Y.* // Phys. Rev. 1986. B. 33. P. 396.

[13] *Tremblay R.R., Albinet G., Tremblay A.-M.S.* // Phys. Rev. 1991. B. 43. P. 11574; 1992. B. 45. P. 755.
[14] *Kolek A.* // Phys. Rev. 1992. B. 45. P. 205.
[15] *Skal A., Shklovskii B.I.* // Sov. Phys. Semicond. 1974. V. 8. P. 1586.

Национальный технический
университет Украины "КПИ"

Поступило в Редакцию
20 июня 1996 г.