

АТТРАКТОРЫ И ХАОС В ПОДСИСТЕМАХ КОНСЕРВАТИВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© *О.И.Горский, В.А.Дзензерский, Э.А.Зельдина*

Известно, что объем фазового пространства для консервативных динамических систем сохраняется. В системах с диссипацией энергии объем фазового пространства стягивается в аттрактор. Если в консервативных системах с числом степеней свободы $N \geq 2$ имеет место детерминированный хаос непритягивающего типа, то естественно предположить, что в подсистемах консервативных систем при числе степеней свободы $N_i < N$ ($N = \sum_i N_i$) могут наблюдаться аттракторы, характерные для диссипативных сред. Разбиение консервативной системы на подсистемы по числу степеней свободы, вообще говоря, произвольно.

В данной работе на примере консервативной системы с числом степеней свободы $N = 3$, разбитой на три подсистемы ($N_1 = 1$, $N_2 = 1$ и $N_3 = 1$), показывается, что в некоторых подсистемах имеется область устойчивого притяжения и что характер колебаний в динамических подсистемах может быть аналогичен движению в диссипативных средах.

Рассматривается случай одновременной левитации и подвешивания в трехконтурной системе с сосредоточенными параметрами (рис. 1). Магниты 2, 3 с постоянными токами I_2 и I_3 находятся соответственно над и под токовым контуром 1 с идеальной проводимостью, стационарно закрепленным на высоте h_1 . Магниты и токовый контур с идеальной проводимостью моделируется квадратными токовыми рамками со стороной a . Из-за однонаправленности токов I_2 и I_3 рамки 2 и 3 притягиваются друг к другу. В зависимости от направления тока, наводимого в контуре с идеальной проводимостью, токовые контуры 2 и 3 могут либо притягиваться, либо отталкиваться от контура 1.

Уравнения описывающие вертикальные колебания контуров 2, 3 имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} &= -m_2 g - I_2 I_3 \frac{dM_{23}}{dz} (z_2 - z_3) - I_1 I_2 \frac{dM_{12}}{dz} (z_2 - z_1), \\ m_3 \frac{d^2 z_3}{dt^2} &= -m_3 g + I_2 I_3 \frac{dM_{23}}{dz} (z_2 - z_3) + I_1 I_3 \frac{dM_{13}}{dz} (z_1 - z_3). \end{aligned} \quad (1)$$

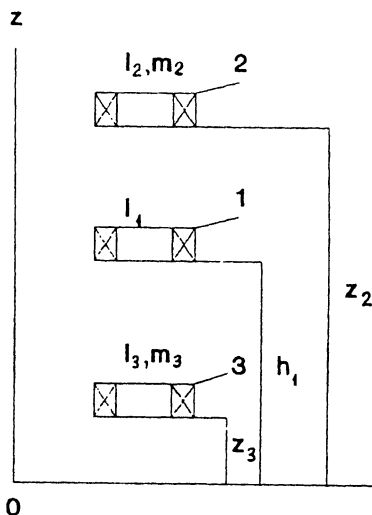


Рис. 1. Расчетная схема системы: 1 — стационарный магнит; 2, 3 — колеблющиеся магниты.

Для контура 1, вследствие его идеальной проводимости, выполняется условие постоянства магнитного потока

$$L_1 I_1 + M_{12}(z_2 - z_1) I_2 + M_{13}(z_1 - z_3) I_3 = \\ = M_{12}(h_2 - h_1) I_2 + M_{13}(h_1 - h_3) I_3. \quad (2)$$

В соотношениях (1), (2) m_2, m_3 — массы колеблющихся магнитов; z_2, z_3 — координаты их центра масс; L_1 — собственная индуктивность стационарного контура; M_{12}, M_{23}, M_{13} — взаимные индуктивности контуров 1 и 2, 2 и 3, 1 и 3 соответственно; h_2, h_3 — начальное положение контуров 2 и 3.

Взаимная индуктивность и индуктивность квадратных рамок определялась согласно [1]:

$$M(z) = \frac{2\mu_0}{\pi} \left[a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + z^2}}{a - \sqrt{a^2 + z^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + z^2}}{z} + \right. \\ \left. + \sqrt{2a^2 + z^2} - 2\sqrt{a^2 + z^2} + z \right], \\ L = 2\mu_0 a + 8\mu_0 a \left[\ln \frac{2a}{\delta(1 + \sqrt{2})} + \sqrt{2} - 2 \right],$$

где z — расстояние между рассматриваемыми контурами, δ — диаметр проволоки контура, μ_0 — магнитная проницаемость контура.

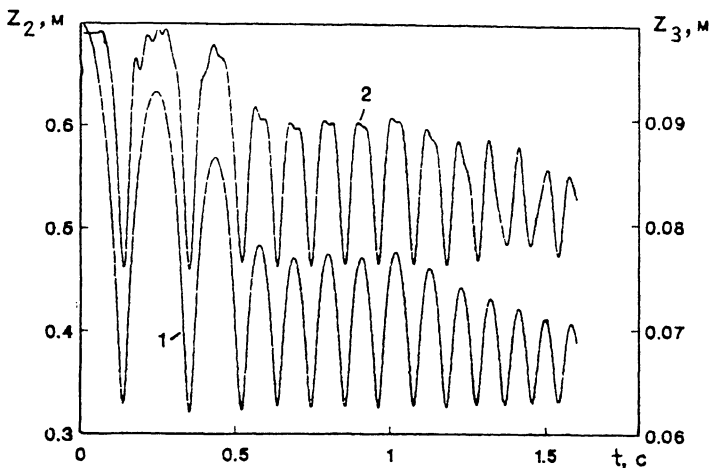


Рис. 2. Изменение амплитуды колебаний в зависимости от времени: 1 — левитирующий магнит 2; 2 — подвешенный магнит 3.

Система уравнений (1), (2) дополнялась начальными условиями при $t = 0$;

$$\begin{cases} z_2(0) = h_2, \\ z_3(0) = h_3, \\ \dot{z}_2(0) = 0, \\ \dot{z}_3(0) = 0. \end{cases}$$

Уравнения (1), (2) были проинтегрированы на ПЭВМ методом Рунге-Кутты.

На рис. 2 даны координаты магнитов z_2 и z_3 в зависимости от времени для параметров $a = 0.1$ м, $h_1 = 0.11$ м, $h_2 = 0.7$ м, $h_3 = 0.1$ м, $I_2 = 250\,040$ А, $I_3 = 800$ А, $m_2 = 0.004$ кг, $m_3 = 0.002$ кг.

Принято считать, что фазовое подпространство малоинформативно и характер колебаний должен исследоваться с помощью сечения Пуанкаре. В данной работе фазовый портрет для подсистем магнитов 2 и 3 представлен в фазовых координатах z_2, \dot{z}_2 и z_3, \dot{z}_3 . Изменения скорости колеблющихся магнитов в зависимости от их координат показаны на рис. 3. Рис. 3, а иллюстрирует поведение магнита 2, рис. 3, б — магнита 3. Отметим, характер колебаний магнитов тестировался обратимостью движения при замене t на $-t$, чувствительностью к начальным условиям, разложением движения в спектре Фурье. На основании проведен-

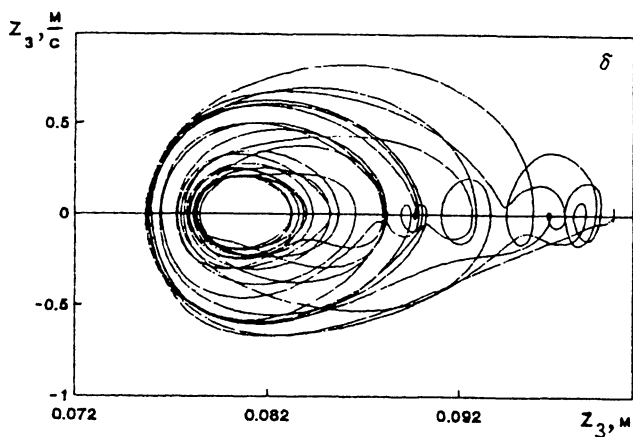
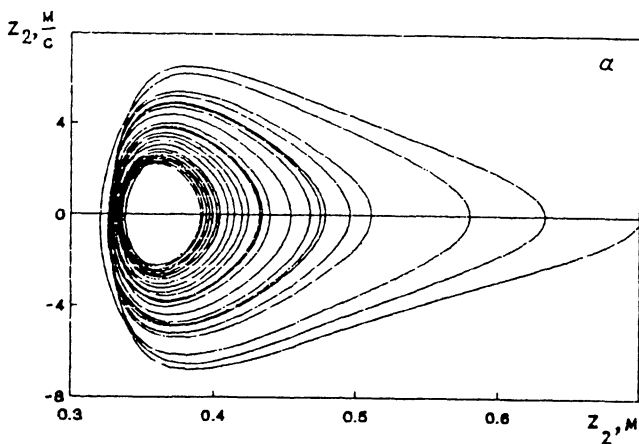


Рис. 3. Фазовый портрет вертикальных колебаний: а — левитирующего магнита 2; б — подвешенного магнита 3.

ного частичного тестирования можно, на наш взгляд, предположить, что подсистема токового контура 3 находится в движении, стягивающимся в область хаотических колебаний. Подсистема токового контура 2 движется по фазовой кривой, близкой к предельному циклу. Изменение тока I_1 имеет асимптотически устанавливающийся характер колебаний (рис. 4).

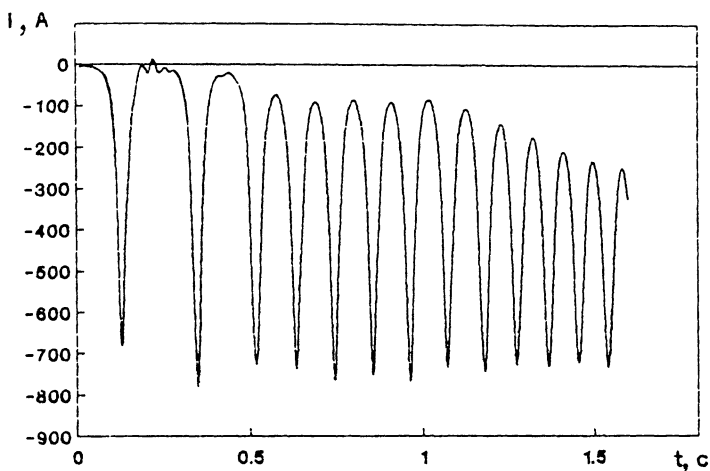


Рис. 4. Изменение тока в контуре 1 в зависимости от времени.

Область устойчивых колебаний ограничена узким интервалом параметров. Существенным является то обстоятельство, что стягивание фазовой траектории для подсистемы магнита 2 может иметь асимптотический характер при условии, что в подсистеме магнита 3 наблюдаются только хаотические колебания. Это вытекает из теоремы Пуанкаре о возвращении. На наш взгляд, можно предположить, что если в гамильтоновой системе с финитным движением происходит стягивание фазового подпространства, то это стягивание носит асимптотический характер при условии, что есть подсистема, в которой динамика хаотична.

Список литературы

- [1] Калантаров М.Л., Цейтлин А.Л. Расчет индуктивностей. Л.: Энергоатомиздат, 1986. 487 с.

Поступило в Редакцию
5 апреля 1995 г.
В окончательной редакции
6 июня 1996 г.