Письма в ЖТФ, том 21, вып. 16 26 августа 1995 г.

01;09

БИФУРКАЦИИ В СВЯЗАННЫХ АВТОСТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Э.В.Кальянов

Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом используются для моделирования процессов в различных областях науки [1–7]. При соответствующем выборе нелинейного преобразования решения этих уравнений при определенных, достаточно больших, запаздываниях могут быть весьма сложными и даже хаотическими. Связанные уравнения с задержкой обладают не менее богатой динамикой, и ими можно моделировать многие процессы. Однако связанные уравнения с запаздыванием мало изучены [8]. В настоящей работе исследуются наиболее простые связанные дифференциально-разностные уравнения с запаздыванием и рассматривается возможность моделирования ими сложных процессов в таких разных областях науки, как радиофизика и экономика. Приводятся результаты численного анализа.

Из общей системы связанных дифференциально-разностных уравнений, приведенной в [8], можно после упрощения для случая отсутствия фильтра второго порядка и выделенного дифференцирующего элемента получить следующие связанные дифференциально-разностные уравнения:

$$\delta_i \frac{dx_i(t)}{dt} + x_i(t) = F_i\Big[x_i(t-\tau_i)\Big] + \sum_{\substack{j \\ j\neq i}} C_{ji} f_j\Big[x_j(t-T_{ji})\Big], \quad (1)$$

где $i, j = 1, 2, 3, \ldots, k$, k — число парциальных автоколебательных систем (подсистем) с запаздыванием; δ_i — постоянная времени фильтра первого порядка i-й подсистемы; τ_i, T_{ji} — запаздывание в цепи обратной связи парциальной подсистемы и запаздывание в элементах связи; C_{ji} — коэффициент связи парциальных подсистем; $f_j[x_j(t-T_{ji})]$ — функция, определяющая тип связи; $F_i[x_i(t-\tau_i)]$ — характеристика нелинейного преобразования в i-й подсистеме.

Уравнениями (1) при соответствующем выборе характеристики нелинейного элемента можно моделировать взаимодействие кольцевых лазеров (при характеристике, приведенной в [5]), взаимодействие электронно-волновых генераторов (при характеристиках, приведенных в [6,7]) и др.

При численном анализе уравнений (1) удобно выбрать нелинейное преобразование в виде унимодальной функции с регулируемым гомеоморфизмом [9], определяющим нарастающий и падающий участки:

$$F_i(x_i) = G_i x_i^{mi} \exp(-x_i^{ni}), \tag{2}$$

где G_i — коэффициент усиления, mi, ni — параметры, влияющие на крутизну нарастающего и падающего участков нелинейного элемента.

Полагая $\tau_i = \tau$, $T_{ji} = T$ и $f_j[x_j(t-T)] = x_j(t-T)$ и используя (2) при $mi = 1$, представим уравнения (1) в виде

$$\dot{x}_i = -r_i x_i + B_i x_{i\tau} \exp\left(-x_{i\tau}^{ni}\right) + D x_{jT}, \tag{3}$$

где

$$r_i = \frac{1}{\delta_i}, \qquad B_i = \frac{G_i}{\delta_i}, \qquad D = \frac{C_i}{\delta_i},$$

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}, \qquad x_{i\tau} = x_i(t-\tau), \qquad x_{jT} = x_j(t-T).$$

Эти уравнения можно получить, если придавать параметрам r_i и B_i смысл экономического характера, что представляет самостоятельный интерес. Действительно, первый член в правой части уравнений (3) $(-r_i x_i)$ отражает уменьшение продукции x_i в i-м регионе за счет ее потребления и других факторов. Воспроизводство продукции описывается вторым членом правой части системы (3), так как производство нарастает с увеличением продукции при малых ее величинах и начинает спадать при больших величинах из-за недостаточного сбыта. При этом τ приобретает смысл запаздывания производства в ответ на спрос. Третий член определяет изменение продукции за счет обмена между регионами с задержкой T.

Результаты расчетов системы (3) для $k = 2$ приведены на рис. 1 и 2. Расчеты проводились методом Рунге–Кутта–Мерсона 4-го порядка с шагом интегрирования по времени, равным 0.05.

На рис. 1 показана бифуркационная диаграмма, показывающая изменение максимальных значений колебательных процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ (обозначено $[x_{1,2}]$) при увеличении параметра связи D в интервале $D \in (0, 1)$, когда $n1 = n2 = 3.25$, $B_1 = B_2 = 15$, $r_1 = r_2 = 2$, $\tau = T = 3$. При достижении параметром связи величины $D = 0.2$ происходит переход (через хаос) от пятитактных движений к трехтактным, которые стохастизируются при превышении параметром связи значения $D = 0.4$. Хаотические колебания сохраняются

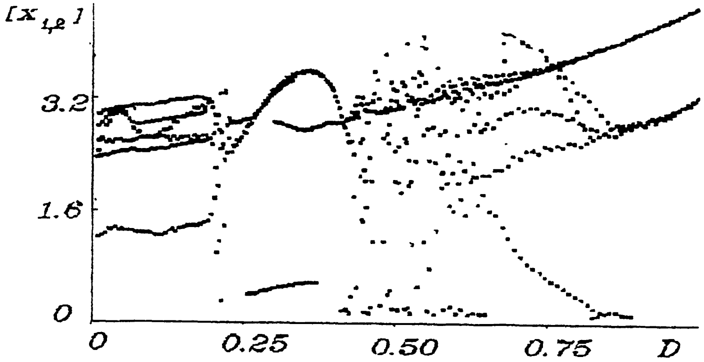

Рис. 1. Бифуркационная диаграмма изменения максимальных значений колебательного процесса в первом генераторе при увеличении связи между генераторами.

до величины $D = 0.64$, после чего возникает режим дестохастизации. При $D > 0.87$ остаются движения с двухтактным циклом.

Следует заметить, что идентичность колебательных процессов в обеих подсистемах определяется в данном случае абсолютно одинаковыми условиями генерации при наличии взаимного влияния, а не эффектом взаимной синхронизации.

В случае отсутствия запаздывания по связи ($T = 0$) бифуркационая диаграмма при тех же остальных параметрах отличается от представленной на рис. 1 тем, что колебания с пятитактным циклом существуют до значения параметра связи $D = 0.55$, после чего возникает относительно узкая область хаотических движений (в интервале $D \in (0.55, 0.64)$), а затем дестохастизация (при $D > 0.64$). При $D > 0.84$ устанавливаются двухтактные колебания.

Представляют интерес бифуркации при неидентичных параметрах парциальных подсистем в случае изменения крутизны падающего участка нелинейного преобразования. Параметр нелинейности ni связан с крутизной падающего участка характеристики (2) так, что при постоянной максимальной крутизне нарастающего участка величины отношений к ней экстремальных значений падающего участка в интервале $ni \in (1, 4.6)$, в котором проводились расчеты, изменяются от -0.13 до -1.36.

На рис. 2 представлена бифуркационная диаграмма, показывающая изменение максимальных значений колебательного процесса $x_1(t)$ в зависимости от параметра нелинейности второй подсистемы при $n1 = 1.2$. Значение остальных параметров при этом равны $B_1 = B_2 = 20$, $r_1 = r_2 = 4$, $\tau = T = 8$, $D = 0.4$. Видно, что при увеличении параметра

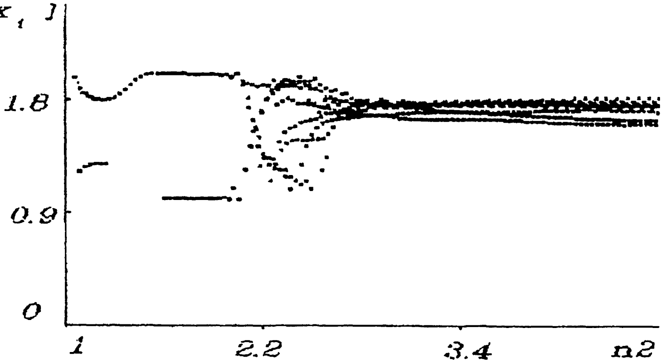

Рис. 2. Бифуркационная диаграмма изменения максимальных значений колебательного процесса в первом генераторе при изменении параметра нелинейности второго генератора.

$n2$ от 1 до 1.9 колебания $x_1(t)$ остаются детерминированными. Затем происходит бифуркация перехода через хаос от двухтактных движений к колебаниям с семитактным циклом. Последние сохраняются при дальнейшем увеличении нелинейности.

Колебательный процесс $x_2(t)$, имеющий хаотический характер при автономной работе в интервале $n2 \in (1.5, 4.6)$, остается хаотическим при наличии связи в интервале $n2 \in (1.8, 2.8)$. При величинах $n2 > 2.8$ имеют место сложные детерминированные движения. При этом структура неавтономных колебаний $x_2(t)$ существенно отличается от структуры связанного с ними процесса $x_1(t)$, так что взаимной синхронизации колебаний $x_1(t)$ и $x_2(t)$ нет. Последняя не обнаружена также при анализе фазовых портретов в проекции на плоскость x_1, x_2.

Приведенные результаты свидетельствуют о сложных бифуркационных явлениях в относительно простых связанных системах с запаздыванием. Наличие связи может приводить не только к хаотизации детерминированных движений, но и к процессам дестохастизации. Последние наблюдались также в режиме взаимодействия стохастических колебаний аналогично описаны в [8] применительно к более сложным связанным системам.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследвоаний (проект 95–02–04300).

Список литературы

[1] *Gunningham W.J.* Introduction to nonlinear analysis. McGraw-Hill Book Co., Inc., N.Y., 1958. 454 p.
[2] *Mackey M.C., Glass L.* // Science. 1977. V. 197. N 4300. P. 287–289.
[3] *Heiden U., Mackey M.C.* // J. Math. Biol. 1982. V. 16. N 1. P. 75–101.
[4] *Ланда П.С., Перминов С.М.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 28. № 4. С. 424–427.
[5] *Ikeda K., Kondo K., Akimoto O.* // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. N 20. P. 1467–1470.
[6] *Кислов В.Я.* // РЭ. 1980. Т. 25. № 8. С. 1683–1690.
[7] *Кац В.А., Кузнецов С.П.* // Письма в ЖТФ. 1987. Т. 13. В. 12. С. 727–733.
[8] *Кальянов Э.В.* // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. В. 2. С. 44–48.
[9] *Кальянов Э.В.* // РЭ. 1993. Т. 28. В. 2. С. 287–291.

Институт радиотехники
и электроники РАН
Фрязино

Поступило в Редакцию
12 мая 1995 г.