

01;03  
©1995

## ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТА РЕЛАКСАЦИИ ВЯЗКОСТИ НА СПЕКТР ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЙ ЖИДКОСТИ

*С.О.Ширяева, О.А.Григорьев*

Волновые движения в весьма вязких жидкостях интересны тем, что при периодах, много больших характерных молекулярных времен, такие жидкости обладают упругими свойствами. При быстро изменяющихся во времени внешних воздействиях такие жидкости упруго деформируются, а возникшие в итоге напряжения релаксируют за времена, много большие характерных времен внешнего воздействия. Очевидно, что учет эффекта релаксации вязкости должен приводить к усложнению структуры волновых движений как за счет появления экспоненциально во времени релаксирующих к нулевому уровню упругих деформаций, так и за счет возможного возникновения при высоких частотах внешней силы затухающих упругих волн. Обсуждаемый эффект должен сказываться и на механизме реализации неустойчивости Тонкса-Френкеля.

Пусть имеется однородно заряженная с поверхностной плотностью заряда  $\kappa$  неограниченная плоская поверхность вязкой несжимаемой идеально электропроводной жидкости, заполняющей в поле сил тяжести полупространство  $z < 0$ . Уравнение граничной поверхности в отсутствие возмущения записывается в виде  $z = 0$ . Пусть  $\sigma$  и  $\nu$  — коэффициенты поверхностного натяжения и кинематической вязкости жидкости, а  $\rho$  — ее удельная плотность. Дисперсионное уравнение для волновых движений в подобной системе легко получается в виде [1]:

$$\omega^2 + 4i \cdot \nu \cdot k^2 \cdot \omega - 4 \cdot \nu^2 \cdot k^4 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{i\omega}{\nu k^2}} \right) = \frac{k}{\rho} (g\rho + \sigma k^2 - 4\pi k \kappa^2), \quad (1)$$

где  $\omega$  — комплексная частота во временной зависимости амплитуд капиллярных волн от времени  $\zeta \sim \exp(-i\omega t)$ ;  $k$  — волновое число;  $i$  — мнимая единица. В таком выражении мнимая отрицательная часть комплексной частоты дает декремент затухания капиллярных волн, а мнимая положительная — инкремент нарастания неустойчивости Тонкса-Френкеля, которая реализуется, когда правая часть

соотношения (1) проходит через ноль и становится отрицательной. Вещественная часть комплексной частоты в используемом выражении дает частоту периодического волнового движения.

Учет вязко-упругих свойств жидкости при аналитическом исследовании уравнений движения жидкости может быть проведен путем введения комплексной вязкости [2]

$$\nu = \nu_0(1 - i\omega\tau_v)^{-1}, \quad (2)$$

где  $\nu_0$  — значение коэффициента вязкости на нулевой частоте;  $\tau_v$  — характерное время релаксации вязкости.

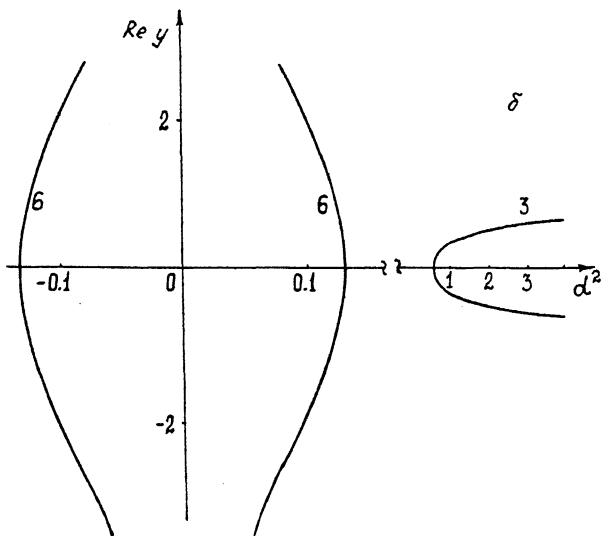
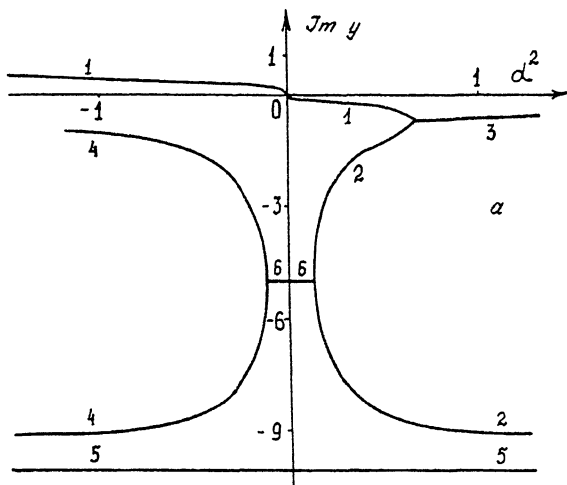
Подставим (2) в (1) и получим дисперсионное уравнение для периодических волновых движений на заряженной поверхности жидкости с учетом релаксации вязкости. Несложно видеть, что это уравнение будет иметь более высокий порядок, так как к исходным модам, обусловленным действием гравитационных, электрических и капиллярных сил, добавятся моды вязкоупругих колебаний. В безразмерной форме обсуждаемое уравнение имеет вид

$$[2 - i\alpha y(1 - i\delta y)]^2 + \alpha^2(1 - i\delta y)^2 = 4\sqrt{1 - i\alpha y(1 - i\delta y)}; \quad (3)$$

$$y = \frac{\omega}{\omega_0}; \quad \beta = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\sigma_* k^3 / \rho}; \quad \delta = \omega_0 \cdot \tau_v;$$

$$\alpha = \frac{\omega_0}{\nu_0 \cdot k^2}; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{\rho} (g\rho + \sigma_0 k^2 - 4\pi k \kappa^2).$$

Решения этого уравнения, полученные численно при  $\delta = 0.1$ , представлены на рисунке, *a*, *b* в виде зависимостей  $\text{Im } y = \text{Im } y(\alpha^2)$  и  $\text{Re } y = \text{Re } y(\alpha^2)$  соответственно. Несложно видеть, что учет вязкоупругих свойств жидкости приводит к выявлению новых периодических и аperiodических движений жидкости. Численные расчеты показывают, что при учете эффекта релаксации вязкости качественный ход решений 1, 3 и верхней части (выше  $\text{Im } y = -0.5\delta^{-1}$ ) кривой 2 по сравнению с ситуацией  $\delta = 0$  остается неизменным. Меняется лишь положение точки ветвления, координаты которой на рисунке, *a* равны  $\alpha^2 = 0.7$ ,  $\text{Im } y = 0.73$  (при  $\delta = 0$  координаты точки ветвления  $\alpha^2 = 0.58$ ,  $\text{Im } y = 0.69$ ). Максимальное значение декремента затухания виртуальных возмущений поля скоростей движущейся жидкости в рассматриваемой ситуации ограничивается величиной  $\text{Im } y = -\delta^{-1}$ , поскольку  $y = -i\delta^{-1}$  является решением уравнения (3) (на



Зависимости от величины параметра  $\alpha^2$ : *a* — декрементов затухания при  $\alpha^2 > 0$  и инкремента нарастания неустойчивости Тонкса-Френкеля при  $\alpha^2 < 0$  волновых движений при учете упругих свойств жидкости, рассчитанные численно по (3) при  $\delta = 0.1$ ; *b* — безразмерных частот капиллярных волновых движений и упругих волн в жидкости, рассчитанные численно по (3) при  $\delta = 0.1$ .

рисунке, *a* представлено линией 5). Участок кривой 2 (равно как и кривой 4 при  $\alpha^2 < 0$ ), расположенный ниже ординаты  $\text{Im } y = -0.5 \cdot \delta^{-1}$ , который в отсутствие учета релаксации вязкости стремился к минус бесконечности при  $\alpha^2 \rightarrow 0$ ,

теперь уходит от оси  $\text{Im}y$  и асимптотически приближается при  $\alpha \rightarrow \pm\infty$  к решению  $y = -i\delta^{-1}$  согласно закономерности

$$y = -i \left[ \frac{1}{\delta} - \frac{4}{\alpha} \right].$$

В точках с координатами  $\alpha^2 = \pm 0.13$ ,  $\text{Im}y = -5$ , кроме того, появляется новое решение (реализующееся независимо от знака  $\alpha^2$ ), представленное на рисунке, а кривой *б*. Причем как при  $\alpha^2 > 0$ , так и при  $\alpha^2 < 0$  решение *б* имеет и вещественную часть, неограниченно растущую (что соответствует неограниченному росту частот соответствующего волнового движения) при  $|\alpha^2| \rightarrow 0$ , представленную на рисунке, *б* кривыми *ба* и *бб*, соответствующими паре комплексно сопряженных корней уравнения (3).

Появление решений *б* и *б*, так же как и части решения *з*, с ординатами, меньшими  $0.5\delta^{-1}$  (нижней части кривой *з*), связано с эффектом релаксации вязкости. Если решение *б* фактически введено руками выбором зависимости вязкости от частоты в виде  $\nu = \nu_0(1 - i\omega\tau_v)^{-1}$ , то появление решения *б*, а также изменение вида решения *з* связано с учетом упругих свойств жидкости. Поскольку решение *б* представляет собой две волны, которые распространяются в противоположных направлениях в весьма вязкой жидкости ( $\alpha^2 \ll 1$ ) с частотой, быстро растущей при уменьшении  $|\alpha^2|$ , затухают с декрементом, не зависящим от вязкости жидкости, определяющимся только величиной параметра  $\delta$  и, следовательно, связаны с упругими свойствами жидкости, то можно предположить, что это решение связано с возбуждением продольных волн в упругой среде, т. е. фононов.

В самом деле, асимптотическое решение (3) при  $|\alpha^2| \sim 0$  для волн этого типа имеет вид

$$y_{1,2} = -0.5i\delta^{-1} \left[ 1 \pm i(48\delta/9\alpha)^{1/2} \right] \quad (4)$$

или в размерном виде

$$\omega_{1,2} = -0.5i\tau_v^{-1} \left[ 1 \pm ik(48\nu_0/9\tau_v)^{1/2} \right].$$

Несложно видеть, что вещественная часть этой ветви дисперсионного уравнения с точностью до численных коэффициентов совпадает (изоморфна) с дисперсионным соотношением для акустических фононов. Следовательно, волны, описываемые соотношением (4), можно интерпретировать как поперечные упругие волны в релаксирующей жидкости, распространяющиеся со скоростью  $V = (4\nu_0/3\tau_v)^{1/2}$  и затухающие за характерное время  $\sim \tau_v$ .

## Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Григорьев О.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1992. Т. 62. В. 9. С. 12-21.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.

Ярославский государственный  
университет

Поступило в Редакцию  
8 февраля 1995 г.

---