

01;09  
©1994

## ИЕРАРХИЯ ХАОТИЧЕСКИХ АТТРАКТОРОВ В СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ АВТОГЕНЕРАТОРОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

*Е.Е. Железовский, В.В. Афанасьева, А.Г. Лазерсон*

Ранее было показано [1-4], что симметрия является одним из свойств, предопределяющих характер динамики систем с постоянной отрицательной дивергенцией. По-видимому, некоторые особенности хаотизации симметричных систем могут найти практическое применение при создании генераторов шума с наперед заданными спектральными и статистическими характеристиками шумовых сигналов.

В настоящей работе путем численных и натурных экспериментов исследованы особенности динамики системы  $N$  связанных генераторов с запаздыванием, описываемой системой уравнений с запаздывающими аргументами вида

$$\ddot{x}_i + \alpha_i \dot{x}_i + \delta_i x_i = k_i F_i \{x_i(t - T_i)\} + \sum_{j \neq i} \langle \beta_{ij}^{(1)} x_j + \beta_{ij}^{(2)} \dot{x}_j + \beta_{ij}^{(3)} \ddot{x}_j \rangle, i = 1, 2 \dots N, \quad (1)$$

где  $F_i$  — нелинейный коэффициент передачи нелинейного усилительного элемента парциального генератора;  $T_i$ ,  $\alpha$ ,  $\delta_i$  — параметры запаздывания, потерь и частотной расстройки генераторов ансамбля;  $k_i$  — коэффициент передачи устройства задержки;  $\beta_{ij}^{(1,2,3)}$  — коэффициенты связи  $i$ -го генератора с  $j$ -м соответственно при резистивной, емкостной и индуктивной связи.

Описание динамики бесконечномерной системы (1) является достаточно полным при помощи двумерных фазовых плоскостей  $\langle x_i(t), x_i(t - T_i) \rangle$ ,  $\langle x_j(t), x_j(t - T_j) \rangle$  парциальных генераторов. Фазовые портреты парциальных генераторов в этих плоскостях в силу симметрии систем оказываются либо парными и центрально-симметричными относительно начала координат, слабо самосимметричными относительно той же точки [3]. При этом развитие динамики происходит одновременно и одинаково в I и III квадрантах фазовых плоскостей, а парциальные генераторы являются принципиально мультистабильными системами. Существование

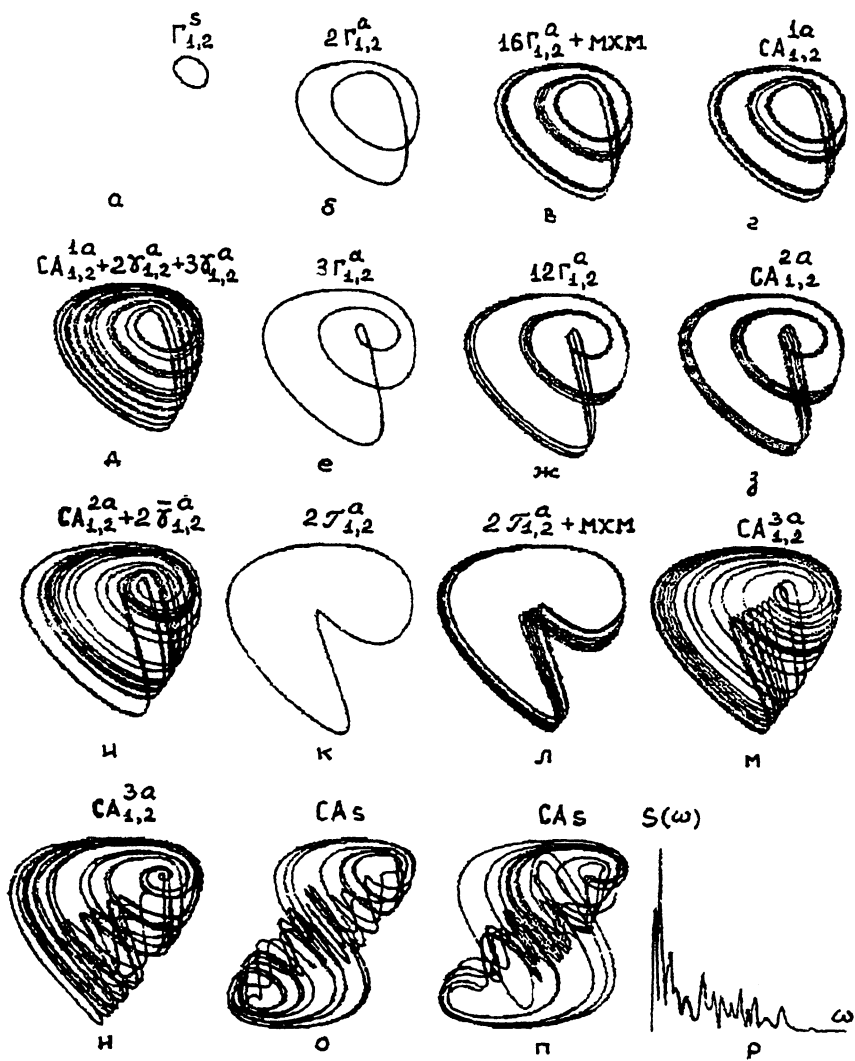


Рис. 1. Последовательность бифуркаций динамической системы двух связанных автогенераторов на 1-м (а-г), 2-м (д-ж), 3-м (и-п) листах бифуркационной диаграммы и спектр хаотических колебаний при максимальной связи (р).

пары аттракторов, которые, как показано в [4], могут взаимодействовать при хаотизации, должно изменять типичные для несимметричных систем переходы к хаосу и характеристики хаотических режимов. Симметрия связи в свою очередь приводит к тому, что все режимы парциальных генера-

торов оказываются идентичными. В силу сложности и неоднозначности потенциальных функций парциальных систем их бифуркационные диаграммы (БД) оказываются многolistными, заполненными нетривиальными структурами перекрывающихся областей типа "crossroad", топологически эквивалентных "слоеному пирогу" из регулярных и хаотических режимов.

При численном моделировании динамики системы (1) для двух  $\langle i = 1, j = 2 \rangle$  симметрично связанных  $\{\beta_{1,2} = \beta_{2,1} = \beta\}$  идентичных генераторов было обнаружено следующее. С увеличением параметра связи  $\beta$  из пары фокусов  $F_{1,2}$  автономных генераторов рождается пара симметричных предельных циклов (ПЦ)  $\Gamma_{1,2}^s$  (рис. 1, а), мы оказываемся на 1-м "сдвоенном" листе БД. С ростом  $\beta$  симметрия этих малых колебаний нарушается, а затем каждый из парных асимметричных ПЦ начинает испытывать последовательные удвоения (рис. 1, б). Особенностью этой системы является то, что после малого числа удвоений в фазовом пространстве появляется метастабильное хаотическое множество (МХМ) (рис. 1, в), а каскад бифуркаций удвоений обрывается. В результате слияния пары асимметричных ПЦ с парой МХМ в фазовом пространстве парциальной системы появляется пара странных аттракторов  $SA_{1,2}^{1a}$  нефейгенбаумовского типа (рис. 1, г). На 1-м листе БД наблюдается 4 удвоения, на следующих число удвоений уменьшается.

Область существования странных аттракторов  $SA_{1,2}^{1a}$  предшествует области, где склеиваются различные листы БД. При входе в нее наблюдается перемежаемость  $SA_{1,2}^{1a}$  сразу с парой ПЦ различных топологий. В реализации хаотического процесса видны ламинарные фазы, соответствующие движениям в окрестности "старого" (образующего аттрактор) и "нового" ПЦ. Перемежаемость между несколькими регулярными и хаотическими движениями, таким образом, оказывается тем "кремом", что склеивает коржи БД. С ростом управляющего параметра происходит мягкий выход из хаоса, длительность "старой" ламинарной фазы уменьшается, а "новой" фазы растет до тех пор, пока в системе не появляется устойчивый 3-тактный ПЦ, мы попадаем на 2-й лист БД. Переход к хаосу от цикла  $3\Gamma_{1,2}^a$  аналогичен наблюдаемому на 1-м листе: после двух удвоений периода в фазовом пространстве появляется МХМ, после чего каскад удвоений обрывается, а 12-тактный ПЦ сливается с МХМ, образуя  $SA_{1,2}^{2a}$  (рис. 1, д-з). Затем через область перемежаемости мы попадаем на 3-й лист БД, где существует пара 2-тактных ПЦ  $2\Gamma_{1,2}^a$ , которые переходят к хаосу по опи-

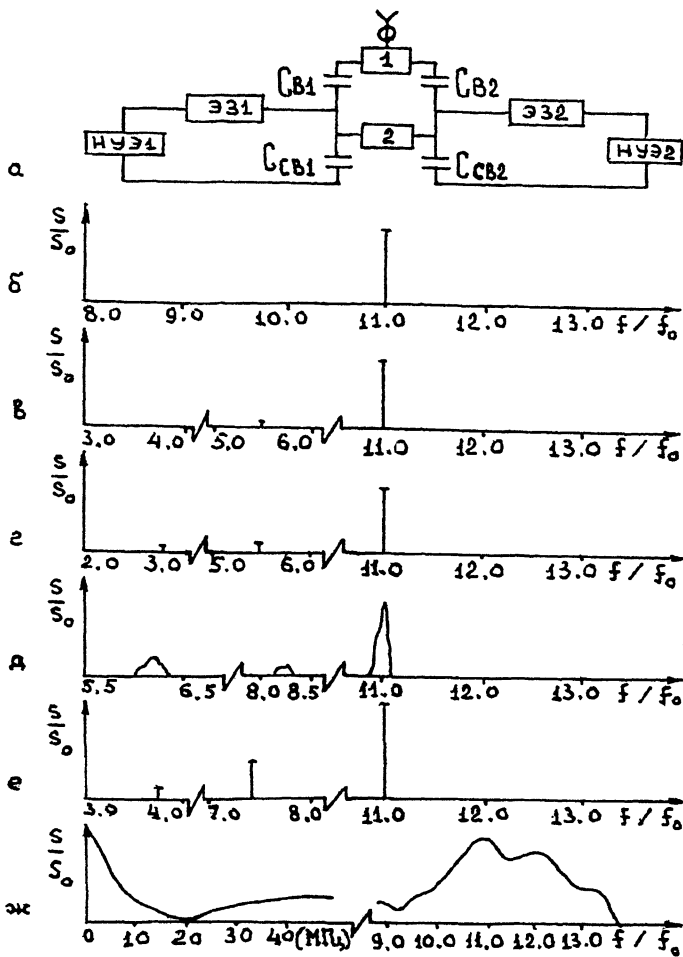


Рис. 2. Принципиальная электрическая схема (а) экспериментальных образцов с элементами задержки (отрезки микрополосковых линий ЭЗ<sub>1,2</sub>), постоянной (суммирующее устройство 1) и переменной (резистор или конденсатор 2) связи, разделительными конденсаторами цепей обратной связи (C<sub>св1,2</sub>) и выводов энергии (C<sub>В1,2</sub>), нелинейными усилительными элементами (НУЭ<sub>1,2</sub>) и их спектральные характеристики (б-ж), наблюдавшиеся при использовании в качестве НУЭ<sub>1,2</sub> биполярных транзисторов в режимах регулярных одночастотных колебаний (б), 2-тактных (в) и 4-тактных (г) ПЦ, узкополосных хаотических колебаний (д), 3-тактных ПЦ (е), широкополосных хаотических колебаний (ж).

санному выше сценарию, в результате чего образуется пара  $CA_{1,2}^{3a}$  (рис. 1, *и-м*).

С дальнейшим ростом параметра связи возникает процесс объединения асимметричных парных  $CA_{1,2}^{3a}$  в единый симметричный  $CA_s$ . Он начинается с того, что происходит гомоклиническая бифуркация — пересекаются устойчивое и неустойчивое многообразия седла, существующего в нуле координат, начиная с самых малых  $\beta$ . В результате этого движение внутри  $Ca_{1,2}^{3a}$  сильно усложняется (рис. 1, *н*), сначала быстро приближаясь по сегменту бывшей устойчивой сепаратрисы к седлу, а затем медленно зигзагообразно от него удаляясь. При некотором значении  $\beta$  неустойчивые ПЦ  $2\bar{\gamma}_{1,2}^a$  касаются изнутри пересекающихся многообразий седла и исчезают. При этом пара  $CA_{1,2}^{3a}$  объединяется в "большой" аттрактор  $CA_s$ , имеющий тенденцию к увеличению размеров (рис. 1, *о, п*), а фазовая траектория медленно переходит с одного бывшего аттрактора на другой, чему соответствует характерный низкочастотный выброс спектра типа  $1/f$  (рис. 1, *р*).

Таким образом, мы обнаружили, что в системе симметрично связанных генераторов (1) существует иерархия хаотических режимов, завершающаяся рождением  $CA_s$ . Переходы к хаосу в этой системе являются нетривиальными, а типичный для асимметричных систем каскад бифуркаций удвоения обрывается, заменяясь сложной системой чередующихся бифуркаций удвоения, субкритических и гомоклинических бифуркаций. Эту последовательность хорошо иллюстрирует схема:

$$\begin{aligned}
 & F_{1,2} \xrightarrow{H} \Gamma_{1,2}^s \xrightarrow{sb} \Gamma_{1,2}^a \xrightarrow{pd} 2\Gamma_{1,2}^a \xrightarrow{pd} \dots \xrightarrow{pd} 16\Gamma_{1,2}^a \xrightarrow{hc} 16\Gamma_{1,2}^a + \\
 & \quad + \text{МХМ} \xrightarrow{cm} CA_{1,2}^{1a} \\
 & \xrightarrow{cm} 3\Gamma_{1,2}^a + \text{МХМ} \xrightarrow{hc} 3\Gamma_{1,2}^a \xrightarrow{pd} 6\Gamma_{1,2}^a \xrightarrow{pd} 12\Gamma_{1,2}^a \xrightarrow{hc} 12\Gamma_{1,2}^a + \\
 & \quad + \text{МХМ} \xrightarrow{cm} CA_{1,2}^{2a} \xrightarrow{(cm)} \\
 & \dots 2T_{1,2}^a + \text{МХМ} \xrightarrow{(hc)} 2T_{1,2}^a \xrightarrow{hc} 2T_{1,2}^a + \text{МХМ} \xrightarrow{cm} CA_{1,2}^{3a} \xrightarrow{hc} CA_s.
 \end{aligned}$$

Бифуркации обозначены символами:  $H$  — бифуркация Хопфа,  $hc$  — гомоклиническая,  $sb$  — разрушения симметрии,  $cm$  — слияния ПЦ с МХМ,  $pd$  — удвоения,  $()$  — обратная названной в скобках.

Важным и интересным является тот факт, что в натурном эксперименте с двумя симметрично связанными генераторами с запаздыванием наблюдались те же особенности хаотической динамики, что и в модельной системе (1). В экспериментальных связанных генераторах на биполярных транзисторах, выполненных в соответствии со схемой на рис. 2, а с использованием технических решений [5-7], помимо показанных на рис. 2 б-ж, наблюдались 2-тактные ПЦ типа рис. 1, к с "равными амплитудами колебаний" [7], многочастотные колебания, сложные асинхронные и синхронные колебания, а также устраняемые при связывании прерывистые колебания парциальных генераторов [5,8], прерывистость повышенной скважности, устраняемая при связывании с дополнительными парциальными генераторами.

Некоторое различие в динамике обеих систем не принципиально и обусловлено не учитываемыми в модельной системе конструктивными особенностями. В эксперименте наблюдались чередование областей сложной динамики, обрывание каскадов удвоений и рождение странных аттракторов нефейгенбаумовского типа. Результирующее хаотическое движение, как и в модельной системе, характеризовалось мощным шумовым спектром с выбросом типа  $1/f$  (рис. 2, ж), по-видимому свидетельствующим о существовании пары объединенных странных аттракторов. Описанные иерархии наблюдались уже при очень малых временах запаздывания ( $\sim 0.1 - 0.2$  периода 1-тактного ПЦ). Для их реализации не было необходимости в прерывистости колебаний, которая, как показано, не является первопричиной хаотизации. Отсутствия простых резонансных соотношений как необходимого условия хаотизации связанных генераторов [9] не требуется, что существенно упрощает конструирование реальных генераторов шума. Важными для практики являются уменьшение при связывании генераторов необходимой для хаотизации величины параметра возбуждения и возможность использования многочастотных и слабохаотизированных парциальных систем. Выяснена возможность нормализации плотности распределения. Непрерывные хаотические колебания наблюдались, помимо биполярных транзисторов, также в связанных системах на полевых транзисторах и МЭП диодах [5].

Таким образом, выполненное исследование показало, что многообразие типов хаотических режимов позволяет управлять шумовыми характеристиками в симметрично связанных генераторах и дает основание считать построение на их базе широкополосных генераторов шума перспективным и реальным.

## Список литературы

- [1] *Holmes P.J.* // Phil. Trans. Roy. Soc. A. 1979. V. 292. P. 419-448.
- [2] *Афанасьева В.В.* // Автореф. канд. дис. Саратов, 1993. 225 с.
- [3] *Афанасьева В.В.* // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19. В. 6. С. 62-66.
- [4] *Афанасьева В.В., Железовский Е.Е., Лазерсон А.Г.* // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. В. 12. С. 24-28.
- [5] *Дерюгина Т.А., Железовский Е.Е., Иофин О.Н.* и др. // Тез. докл. конф. "Вопросы исследования и проектирования электровакуумных и твердотельных СВЧ приборов". М., 1983. Сер. 1. Электроника СВЧ. В. 1(196). С. 30.
- [6] *Железовский Е.Е., Рязанцев А.Л.* Генератор шумовых сигналов: Пат. 1806439 СССР. МКИ Н 03 В 29/00/. Заявл. 17.2.90. Опубл. 30.3.93. Бюл. № 12.
- [7] *Железовский Е.Е., Лазерсон А.Г., Рязанцев А.Л.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1993. Т. 36. В. 1. С. 97-104.
- [8] *Железовский Е.Е., Титомиров А.А.* // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28. В. 11. С. 2239-2246.
- [9] *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* // Введение в теорию нелинейных колебаний. 1976. 384 с.

Государственное  
научно-производственное объединение  
"Алмаз"  
Саратов

Поступило в Редакцию  
3 октября 1994 г.