

01;09
©1994

КРИТИЧЕСКИЙ КВАЗИАТТРАКТОР: БЕСКОНЕЧНОЕ САМОПОДОБНОЕ МНОЖЕСТВО УСТОЙЧИВЫХ ЦИКЛОВ, ВОЗНИКАЮЩЕЕ ПРИ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ПЕРЕХОДА К ХАОСУ

С. П. Кузнецов

Хорошо известны два типичных сценария эволюции режимов динамики нелинейных систем при изменении управляющего параметра — через каскад удвоений периода и через касательную бифуркацию (“перемежаемость”) [1,2]. Представим себе диссипативную систему, управляемую двумя параметрами, так что увеличение одного из них приводит к удвоениям периода, а другого — к касательной бифуркации. Такая ситуация часто возникает при двухпараметрическом анализе перехода к хаосу (см., например, карты динамических режимов электронных систем [3], с. 131; [4], с. 225; [5]). В данной работе рассмотрено двумерное необратимое отображение, представляющее собой каноническую модель указанной ситуации. На плоскости двух параметров этого отображения обнаруживаются критические точки с замечательными свойствами: в каждой из них существует бесконечное самоподобное множество аттракторов — устойчивых циклов периода 4^k или $2 \cdot 4^k$; $k = 0, 1, 2, \dots$. Это множество, допускающее анализ методом ренормгруппы (РГ), можно назвать *критическим квазиаттрактором*. Обычно под квазиаттрактором понимают сложно устроенный объект в фазовом пространстве, содержащий бесконечное число устойчивых периодических орбит, тогда как эмпирически наблюдаемое поведение выглядит хаотическим [4]. В нашем случае речь идет о феномене, реализующемся на границе хаоса и характеризующимся свойствами количественной универсальности и скейлинга.

Сконструируем модельное отображение. Возьмем сначала два несвязанных уравнения — отображение $x_{n+1} = a - x_n^2$, демонстрирующее при изменении параметра a каскад удвоений периода, и отображение $y_{n+1} = dy_n + y_n^2$, в котором при увеличении d имеет место касательная бифуркация. Далее включим связь, добавив члены by_n и $(-x_n^2)$ соответственно в первое и второе уравнения. Оказывается,

что для реализации интересующего нас типа динамики член y_n^2 не существен, и его можно опустить. В итоге получаем

$$x_{n+1} = a - x_n^2 + by_n, \quad y_{n+1} = -x_n^2 + dy_n. \quad (1)$$

Зафиксируем параметр $b \neq 0$. Пусть при некоторых a и d точка $(x_0 = 0, y_0)$ принадлежит устойчивому циклу периода $N = 2^k$. Устойчивость этого цикла определяется собственными числами матрицы эволюции малого возмущения за период — мультипликаторами. В силу условия $x_0 = 0$ один из мультипликаторов равен нулю, а второй, вообще говоря, отличен от нуля. Будем увеличивать d , подбирая a так, чтобы условие $x_0 = 0$ не нарушалось. При этом второй мультипликатор растет, и в некоторый момент достигает значения 1, что отвечает потере устойчивости. Эту точку (a_k, d_k) назовем терминальной. Далее будем увеличивать a , подбирая d так, чтобы сохранялось условие $y_{2N} = y_0$. Когда величина x_{2N} обратится в нуль, будем иметь цикл периода $2N$, для которого также можно отыскать терминальную точку, и т.д. Начав с элементарно решаемого случая $k = 1$ и найдя некоторое число членов последовательности терминальных точек, оценим ее предел. Это и будет искомая критическая точка (a_c, d_c) . Попутно вычисляется предел последовательности элементов циклов при $k \rightarrow \infty$: $x_c = 0$, $y_c = \lim y_0$.

Для двух конкретных значений b имеем

$$b = 0.6544 : a_c = 0.566620683,$$

$$d_c = 1.597132592, y_c = 1.709352174, \quad (2)$$

$$b = 0.6663 : a_c = 0.249902800,$$

$$d_c = 0.452902880, y_c = -1.316447534. \quad (3)$$

Возьмем одну из этих точек и перепишем отображение в виде

$$x_{n+1} = g_0(X_n, Y_n), \quad Y_{n+1} = f_0(X_n, Y_n), \quad (4)$$

где $X = x$, $Y = y - y_c$, $g_0(X_n, Y_n) = a_c - X_n^2 + b(Y_n + y_c)$, $f_0(X_n, Y_n) = -X_n^2 - y_c + d_c(Y_n + y_c)$. Выполним его два раза и перенормируем переменные X и Y на некоторые константы α и β . Повторяя эту процедуру многократно, получаем уравнение РГ [6]

$$g_{k+1}(X, Y) = \alpha_k g_k(g_k(X/\alpha_k, Y/\beta_k), f_k(X/\alpha_k, Y/\beta_k)),$$

$$f_{k+1}(X, Y) = \beta_k f_k(g_k(X/\alpha_k, Y/\beta_k), f_k(X/\alpha_k, Y/\beta_k)). \quad (5)$$

Циклы отображения (1) в критических точках (2) и (3)

Период	Критическая точка (2)		Критическая точка (3)	
	x, y	$\mu_{1,2}$	x, y	$\mu_{1,2}$
4	$8.77511 \cdot 10^{-2}$	-0.852625	$4.70280 \cdot 10^{-2}$	-0.746088
	1.647055174	1.178436	-1.249667476	0.836959
8	$-1.86563 \cdot 10^{-2}$	-0.723036	$-3.29270 \cdot 10^{-2}$	-0.841748
	1.693668330	0.847867	-1.303805726	1.171938
16	$1.33566 \cdot 10^{-2}$	-0.849490	$7.10492 \cdot 10^{-3}$	-0.729383
	1.706481364	1.174766	-1.313341282	0.845411
32	$-2.85310 \cdot 10^{-3}$	-0.724878	$-5.04333 \cdot 10^{-3}$	-0.847568
	1.708642053	0.847642	-1.315875350	1.174246
64	$2.03414 \cdot 10^{-3}$	-0.848973	$1.07864 \cdot 10^{-3}$	-0.725956
	1.709221776	1.174447	-1.316306374	0.846812
128	$-4.34772 \cdot 10^{-4}$	-0.725202	$-7.68793 \cdot 10^{-4}$	-0.848677
	1.709320067	0.847534	-1.316421603	1.174723
256	$3.09820 \cdot 10^{-4}$	-0.848877	$1.64128 \cdot 10^{-4}$	-0.725310
	1.709346278	1.174403	-1.316441156	0.847087
512	$-6.62279 \cdot 10^{-5}$	-0.725256	$-1.17196 \cdot 10^{-4}$	-0.848865
	1.709350733	0.847509	-1.316446372	1.174791

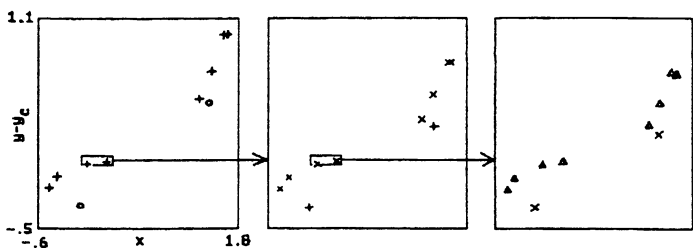
Константы нормировки α и β на каждом шаге k выбираем так, чтобы

$$g_{k+1}(0, 0) = 1, f_{k+1}(0, 0) = 1, \text{ т.е. } \alpha_k = 1/g_k(1, 1), \beta_k = 1/f_k(1, 1).$$

Функции g_k и f_k можно вычислить итерациями исходного отображения. Выполним сначала $N = 2^k$ итераций с нулевым начальным условием и обозначим результат (X, Y) . Далее зададим $X_0 = X \cdot X, Y_0 = Y \cdot Y$, проитерируем (5) N раз и положим $g_k(X, Y) = X_N/X, f_k(X, Y) = Y_N/Y$. Проведя расчеты для разных k , можно убедиться, что в точках (2) и (3) порождаемая уравнением (5) последовательность пар функций (g_k, f_k) при больших k ведет себя как цикл периода 2, т. е. они повторяются через один шаг. Приведенные выше значения b (см. (2), (3)) подобраны так, чтобы обеспечить наискорейший выход решения на этот "ренормцикл". Отметим, что в точках (2) и (3) реализуются противоположные по фазе колебания решения (5).

Осциллирующее решение уравнения (5) в виде двух пар функций (G_1, F_1) и (G_2, F_2) было найдено численно в работе [6]:

$$G_1(x, y) = 1 + 0.2314y - 1.5292x^2 + 0.0100y^2 - \\ - 0.0592yx^2 - 0.0001y^3 + \dots$$



Первые четыре из бесконечного множества аттракторов модельного отображения (1) в критической точке (2): устойчивые циклы периода 2 (0), 8 (+), 32 (x) и 128 (Δ). Увеличение от картинке к картинке в α_* раз по горизонтальной и в β_* раз по вертикальной оси.

$$F_1(x, y) = 1 + 1.3492y -$$

$$-5.9229x^2 + 0.0014y^2 + 0.2213yx^2 - 0.0013y^3 + \dots,$$

масштабные факторы $\alpha_* = (\alpha_1 \alpha_2) = 6.565350$, $\beta_* = (\beta_1 \beta_2) = 22.120227$.¹

Как можно убедиться прямыми вычислениями, отображение $x \rightarrow G_1(x, y)$, $y \rightarrow F_1(x, y)$ имеет неустойчивую неподвижную точку с мультипликаторами -0.848865 и 1.174459 , а также устойчивый цикл периода 2 с мультипликаторами -0.725255 и 0.847450 . Напомним, однако, что в силу уравнения РГ отражение (G_1, F_1) , выполненное четыре раза и подвергнутое преобразованию масштаба $X \rightarrow X/\alpha_*$, $Y \rightarrow Y/\beta_*$, превращается в себя. Поэтому наличие неподвижной точки влечет существование неустойчивых циклов периода 4, 16, 64, ..., а наличие цикла периода два — устойчивых циклов периода 8, 32, 128, ... с теми же самыми мультипликаторами. Следовательно, отображение $x \rightarrow G_1(x, y)$, $y \rightarrow F_1(x, y)$ имеет бесконечное (счетное) множество сосуществующих аттракторов — циклов периода $2 \cdot 4^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, каждый из которых обладает областью притяжения в фазовом пространстве (x, y) . Точно так же отображение $x \rightarrow G_2(x, y)$, $y \rightarrow F_2(x, y)$ имеет в качестве аттракторов циклы периода 4^k . Если известна точка (X^*, Y^*) , принадлежащая циклу периода N отображения (G_1, F_1) или (G_2, F_2) , то точка $(X^*/\alpha_*, Y^*/\beta_*)$ принадлежит циклу периода $4N$.

В критических точках исходного отображения циклы асимптотически большого периода будут обладать теми же

¹ Отметим, что в работе [6] в качестве исходной модели использовалось другое, несколько более сложное отображение и, по техническим причинам, функция F была отнормирована в начале координат на 0.1.

свойствами. В общем случае произвольного b сходимость по k медленная, однако при выборе, оптимизирующем скорость выхода решения на ренормцикл, мультипликаторы μ хорошо воспроизводят универсальные значения уже начиная с периода 4 (см. таблицу). На рисунке показаны несколько первых аттракторов из бесконечного множества аттракторов отображения (1) в точке (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект N 93-02-16169).

Список литературы

- [1] Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
- [2] Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991. 366 с.
- [3] Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 278 с.
- [4] Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах М.: Наука, 1990. 311 с.
- [5] Астахов В.В., Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Селезнев Е.П. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. В. 1. С. 37-41.
- [6] Kuznetsov S.P., Sataev I.R. // Phys. Lett. 1992. V. A162. N 3. P. 236-242.

Институт радиофизики
и электроники
Саратовский филиал

Поступило в Редакцию
10 декабря 1993 г.