Письма в ЖТФ, том 20, вып. 5 12 марта 1994 г.

01;04

КВАЗИАКУСТИКО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В КАНАЛЕ С ХОЛЛОВСКОЙ ПЛАЗМОЙ

Л.М.Алексеева

Поперек потока холловской плазмы могут распространяться квазиакустико-гравитационные волны (КАГВ) [1–7]. По свойствам они аналогичны бегущим по вертикали акустико-гравитационным волнам в обычной газовой среде [8], причем эффективная сила тяжести, направленная поперек плазменного потока, определяется его продольным ускорением. Если плазма заполняет безграничное пространство, это явление возникает в широкой области значений параметров плазмы [2–7]. Здесь мы распространяем явление на случай, когда имеются поперечные границы потока. В стенках из проводящего материала КАГВ индуцируют токи, влияющие на сами эти волны. Мы покажем, что при заданных значениях магнитной вязкости ν и отношения β газового давления к магнитному в течениях с достаточно большим параметром обмена ξ (характеризующего величину эффекта Холла) именно влияние стеночных токов нарушает гармонический характер КАГВ, приводя к раскачке колебаний. В этом случае режим стационарного прианодного скачка величин оказывается невозможным.

1. Перепишем тождественно исходные уравнения магнитной газодинамики с учетом Холла [9] в виде, который позже

облегчит сравнение членов. Имеем для $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} = \nu\mathbf{j} - \mathbf{W} - \xi(2\rho)^{-1}\nabla\left(P + H^2\right), \quad \mathbf{W} \equiv [\mathbf{v}\mathbf{H}]. \tag{1}$$

Здесь плазма принимается изотермической, так что $P = D\rho$, где $D = \beta/2 \equiv c^2 = \mathrm{const}$, C — газодинамическая скорость звука. Нормировка величин та же, что в [9,1–7]. Уравнение индукции дает

$$\partial\mathbf{H}/\partial t = \nu\Delta\mathbf{H} + \operatorname{rot}\mathbf{W} - \xi\mathbf{k}; \quad \mathbf{k} \equiv H\rho^{-2}\left[\nabla\rho\nabla H\right]. \tag{2}$$

В декартовой системе координат x, y, z с осью x вдоль канала рассмотрим поток $\pi = (\rho, H, \mathbf{V})$ вида $\partial/\partial z \equiv 0$, $\mathbf{V} = (V_x, V_y, 0)$: $\quad \mathbf{H} = (0, 0, H)$, $\mathbf{j} = \operatorname{rot}\mathbf{H} = H_y' \mathbf{e}_x - H_x' \mathbf{e}_y$. (3)

Выберем геометрическую форму поверхности стенок канала $y = R_1(x)$ анод и $y = R_2(x)$ катод, приняв за них две поверхности потока какого-нибудь известного стационарного течения $\pi^{(0)}$ плазмы (вообще говоря, с другими параметрами ξ, ν, D, чем у потока π). Будем искать решение в виде

$$\pi(x, y, t) = \pi^{(0)}(x, y) = \tilde{\pi}(x, y, t). \tag{4}$$

Подставляя π в (1), обозначим $\mathbf{E} = \mathbf{E} - \mathbf{E}|_{\pi=\pi^{(0)}}$. Будем считать стенки непроницаемыми для плазмы, проводящими и секционированными [10]. На секциях зададим распределение электрического потенциала, обеспеивающее на стенках тангенциальную составляющую $E_p = E_p|_{\pi=\pi^{(0)}}$. Тогда граничные условия для $\tilde{\pi}$ имеют вид

$$\tilde{V}_n = 0, \quad \tilde{E}_p = 0 \qquad \text{при} \qquad y = R_j (j = 1, 2). \tag{5}$$

Некоторые члены в уравнениях исходной системы представляют собой произведения π, сомножителями в которых являются компоненты π или их производные. При подстановке (4) в эти члены такое произведение превращается в многочлен. Обозначим $\tilde{\pi} = \pi - \pi|_{\pi=\pi^{(0)}}$ и представим $\tilde{\pi}$ в виде $\tilde{\pi} = \pi^l + \pi^n$, где π^l — сумма всех членов, линейных по компонентам $\tilde{\pi}$, а π^N — сумма нелинейных. Для членов уравнений, содержащих в знаменателе $\rho = \rho^{(0)} + \tilde{\rho}$, будем пользоваться разложением по степеням $\tilde{\rho}$ ($\tilde{\rho}$ не предполагается малым).

2. Выберем в качестве $\pi^{(0)}$ изомагнитный ($H^{(0)} = \rho^{(0)}$) поток бесхолловской ($\xi = 0$) идеально проводящей ($\nu = 0$) плазмы с тем же D, что в π. Проинтегрировав (2) по y, получим

$$y\left(X_t' - \nu X_{xx}''\right) - \Phi^{(0)} - A + F\left\{Y_t'\right\} - F\left\{(\tilde{W}_y)_x'\right\} +$$

$$+\xi F\left\{h_y\tilde{\rho}'_x\right\}-(h_x)'_y(Y-\tilde{\rho})-h_y\tilde{H}'_x+k^N\}=$$

$$=\nu\tilde{j}_x-\tilde{W}_x-\xi h_x(Y-\tilde{\rho}). \qquad (6)$$

Здесь $h\equiv\nabla\rho^{(0)}/\rho^{(0)}$, $\Phi^{(0)}=\nu F\{\Delta H^{(0)}\}$ в соответствии с видом (3) для $\mathbf{j}$:

$$\tilde{H}=Y(x,y,t)+X(x,t),\quad Y\equiv\int\limits_{R_*}^{y}\tilde{j}_x dy, \qquad (7)$$

$y=R_*(x)$ — какая-нибудь линия ($R_1<R_*<R_2$); штрих в сочетании со значком переменной внизу означает частную производную по этой переменной, $F\{\ldots\}$ — некоторая первообразная по y (в дальнейшем удобно понимать под F интеграл в пределах от R_* до y); константы интегрирования $A(x,t)$ и $X(x,t)$ должны быть найдены из граничных условий (5). Надо отметить, что через E_x в выражение

$$\tilde{E}_p=\tilde{E}_x+(R_j)'_x\tilde{E}_y \qquad (j=1,2) \qquad (8)$$

входит группа членов, образующих правую часть (6) — заменим их левой частью (6). Наконец, проинтегрировав (6) еще раз по y, получим

$$Z=\nu Y-F\left\{\tilde{W}_x\right\}-\xi F\left\{h_xY\right\}+\xi F\left\{h_x\tilde{\rho}\right\}. \qquad (9)$$

Левую часть Z равенства из-за громоздкости не выписываем — ее легко представить себе по виду (6).

3. Пусть изомагнитное течение $\pi^{(0)}$ является, кроме того, изобернуллиевым, а $D\ll 1$. Линии потока $\pi^{(0)}$ будем считать плавными, полагая $s(x)=(R_2-R_1)\sim R_1\sim R_2\sim\delta\ll 1$. В используемой нормировке длина канала принята за единицу. Тогда $v_y^{(0)}\sim\delta$, $v_x^{(0)}\sim\rho^{(0)}=H^{(0)}\sim 1$, причем главные члены v_{x0}, $\rho_0=H_0$ разложения по δ этих величин не зависят от y (см., например, [4]). Пусть π настолько близко к $\pi^{(0)}$, что $\tilde{\rho}\ll 1$. Будем использовать значения параметров, при которых КАГВ существуют в безграничной среде [7]: $\xi\gg\sqrt{D}\gg\delta$, $\Gamma\equiv\xi(\nu D)^{-1}\gtrsim\delta^{-1}$, причем Γ определяет характерные масштабы возмущений, связанных с КАГВ, по переменным x,y и t. Как и в [7], будем полагать

$$\tilde{\pi}'_x\sim\Gamma\delta\tilde{\pi}, \qquad \tilde{\pi}'_t\sim\Gamma\sqrt{D}\tilde{\pi}.$$

Однако в условиях канала, когда в $\tilde{H}$ есть составляющая $X(x,t)$, мы не можем использовать выражение для производной по y, аналогичное (10), и будем употреблять лишь очевидное соотношение $\tilde{\pi}\Gamma^{-1} \lesssim F\{\tilde{\pi}\} \lesssim \delta\tilde{\pi}$. Для простоты вычислений введем дополнительные (по сравнению с [7]) ограничения на параметры, считая, что $\nu \gg \delta D^{-1/2}$ и рассматривая ту часть плоскости (ξ, ν), где

$$\frac{D}{\delta} \lesssim \frac{\xi}{\nu} \ll \frac{\sqrt{D}}{\delta}. \tag{11}$$

4. Для простоты* пренебрежем π^N, $\tilde{W}$ и членами с $\Phi^{(0)}$; затем, найдя решение, подстановкой его в исходные уравнения убедимся в малости опущенных членов. При этом (8,9) дают систему трех уравнений, выражающих функции Y, X, A через $\tilde{\rho}$. Она сильно упрощается благодаря введенной в п. 3 иерархии параметров и равенство (9) сразу определяет Y через $X(x)$, $A(x)$, $\tilde{\rho}(x,y)$. Подставляя y в (8) и исключая A, найдем $X(x,t)$ в области, прилегающей к оси абсцисс на плоскости (ξ, ν):

$$sX_t' - \nu\left(sX_x'\right)_x' = -\Psi|_1^2, \tag{12}$$

$$\Psi \equiv \frac{\xi D}{2\rho_0}\left(h\tilde{\rho} - \frac{\partial}{\partial p}\tilde{\rho}\right) + \frac{\xi^2}{\nu}\frac{\partial}{\partial p}F\left\{h\tilde{\rho}\right\},$$

где h — не зависящий от y главный член разложени h_x по σ, $\partial/\partial p$ означает производную вдоль электрода, $|_1^2$ — разность величины на линиях $y = R_2(x)$ и $R_1(x)$ при том же значении x. В областях S и L, сравнительно малых и больших ν, где дифузионные процессы соответствнно слабы и значительны, решения (12) имеют вид

$$X^S \approx -s\int_0^t \Psi|_1^2 dt,$$

$$X^L \approx \nu^{-1}\int_0^x s^{-1}dx\int_0^x \Psi|_1^2 dx. \tag{13}$$

---

* Как видно из [1−7], КАГВ линейны и существование их не связано с конвективными членами $\mathbf{W}$ или конкретным видом $\pi^{(0)}$. Поэтому интересующие нас эффекты должны выявляться на материале таких решений $\tilde{\pi}$, для которых π^N, $\tilde{W}$ и $\Phi^{(0)}$ незначительны.

Функция Y в результате подстановки A оказывается выраженной через $\tilde{\rho}$:

$$Y = \xi\nu^{-1}\left[(y - R_*)\alpha(x) - F\{h\tilde{\rho}\}\right]; \quad \alpha(x) \equiv X'_x + hX. \qquad (14)$$

5. Подставим теперь найденное $\bar{\mathbf{H}} = X + Y$ в газодинамические уравнения Эйлера и непрерывности (порядки $\tilde{v}_x$ и $\tilde{v}_y$ определяются как в [7]). Сравним между собою отдельно все члены с $\tilde{\rho}(x, y)$ и все члены с $X(x)$. Обозначив $\gamma = -\Gamma(\rho_0)'_x$ и использовав первое граничное условие (5), выпишем результат

$$(D\rho_0)^{-1}\,\tilde{\rho}''_{tt}(1 + \Theta) = \tilde{\rho}''_{yy} + \gamma\tilde{\rho}'_y; \quad \Theta \sim X''_{xx}(\tilde{\rho}''_{tt})^{-1}, \qquad (15)$$

$$\tilde{\rho}'_y + \gamma\tilde{\rho}(1 + \theta) = 0, \quad \theta = -\alpha(x)(h\tilde{\rho})^{-1} \qquad \text{при} \qquad y = R_j(x). \qquad (16)$$

Отметим, что величины Θ и θ не зависят от амплитуды функции $\tilde{\rho}$ и $\Theta \sim (\delta/\sqrt{D})^2\theta \ll \theta$. Поэтому в той части плоскости (ξ, ν), где для данного D оказывается, что $\theta \lesssim 1$, уравнение (15) имеет вид обычного уравнения для КАГВ [1–7]:

$$(D\rho_0)^{-1}\,\tilde{\rho}''_{tt} = \tilde{\rho}''_{yy} + \gamma\tilde{\rho}'_y \qquad (18)$$

с граничными условиями при $y = R_j(x)$:

$$\tilde{\rho}'_y + \gamma\tilde{\rho} = f\{\tilde{\rho}\}, \text{где} f = \xi(D, \nu)^{-1}(\rho_0 X\{\tilde{\rho}\})'_x \qquad (19)$$

(мы использовали явный вид θ в (16)). Таким образом, в точках плоскости (ξ, ν), где $\theta \lesssim 1$, стеночные токи, которые в основном и создают магнитное поле X, влияют на КАГВ через граничное условие (19) для этих волн. Выясним, при каких (ξ, ν) величина $\theta \lesssim 1$. Определяя порядок X при помощи (13) с учетом (10), получим θ для областей S и L: $\theta^S \sim \xi\delta^{1/2}\nu^{-1/2}D^{-1/4}$, $\theta^L \sim \xi\nu^{-1}\delta^{-1}D$. Семейство кривых $\xi = \xi_\theta$, на которых $\theta = 1$ (и ниже которых $\theta < 1$) определяется соотношениями

$$\xi^S_\theta = \sqrt{\nu}\delta^{-1/2}D^{1/4}, \qquad \xi^L_\theta = \nu\delta D^{-1} \qquad (20)$$

6. Теперь мы можем дать ответ на вопрос, при каких ξ стеночные токи вообще не влияют на КАГВ и что происходит при их влиянии. Видно, что при $\xi \ll \xi_\theta$ (когда $f\{\tilde{\rho}\}$ пренебрежимо мало) имеет место обычная краевая задача для КАГВ [1,3–6]. Обозначим ее как M, а ее известное решение как $\rho^{(1)}$. Посмотрим, как трансформируются свойства

решения, когда $\xi \to \xi_\theta$ и величина $f\{\tilde{\rho}\}$ становится заметной. В этой области решим задачу приближенно, положив $\tilde{\rho} = \rho^{(1)} + \rho^{(2)}$, где $\rho^{(2)} \ll \rho^{(1)}$ отражает влияние малой величины $f\{\tilde{\rho}\} \approx f\{\rho^{(1)}\}$. Задача (18,19) приобретает вид краевой задачи для $\rho^{(2)}$ с неоднородностью в граничных условиях. Представим $\rho^{(2)} = f + u + w$, где u и w — решения соответствующих краевых задач с однородными граничными условиями: u — задача с вынуждающей силой f''_{tt} в уравнении и однородными начальными условиями, а w — задачи M с начальными условиями $w|_{t=0} = -f|_{t=0}$; $w'_t|_{t=0} = -f'_t|_{t=0}$, не зависящими от y. Как известно, при таких начальных данных возбуждаются все собственные моды задачи M [6]. Отсюда видно, что $\rho^{(2)}$ всегда нестационарна. В частности, при $\xi \to \xi_\theta$ перестает существовать стационарное решение $\tilde{\rho}$, которое в качестве прианодного скачка (нулевой моды M) имело место при $\xi \ll \xi_\theta$. Ненулевые моды $\rho^{(1)}$ создают в уравнении для u вынуждающую силу $f''_{tt} \neq 0$. При $\xi \to \xi_\theta$ в области S это порождает быстрый рост $\rho^{(2)}$ со временем, поскольку здесь $f''_{tt} \sim t^2$.*

7. Теперь легко оценить опущенные в п. 4 члены. Величины $\tilde{\mathbf{W}}$ малы, если $\xi_W = \delta^{1/2} D^{-1/4} \nu^{1/2} \ll \xi$. Очевидно, $\xi_W \ll \xi_\theta$. Нас интересует область $\xi \to \xi_\theta$ и мы не будем обращать внимание на $\tilde{\mathbf{W}}$. Нелинейные члены оказываются малыми лишь при достаточно малых $\tilde{\rho}$, но эти же $\tilde{\rho}$ должны быть достаточно большими, чтобы члены с $\Phi^{(0)}$ были малы по сравнению с линейными. Самую узкую "щель" по $\tilde{\rho}$ имеет уравнение (12) для $X(x,t)$, которое оказывается линейным лишь при

$$\left(\frac{\nu}{\xi}\right)^2 \ll |\tilde{\rho}| \ll \frac{\xi\delta}{\nu}, \tag{21}$$

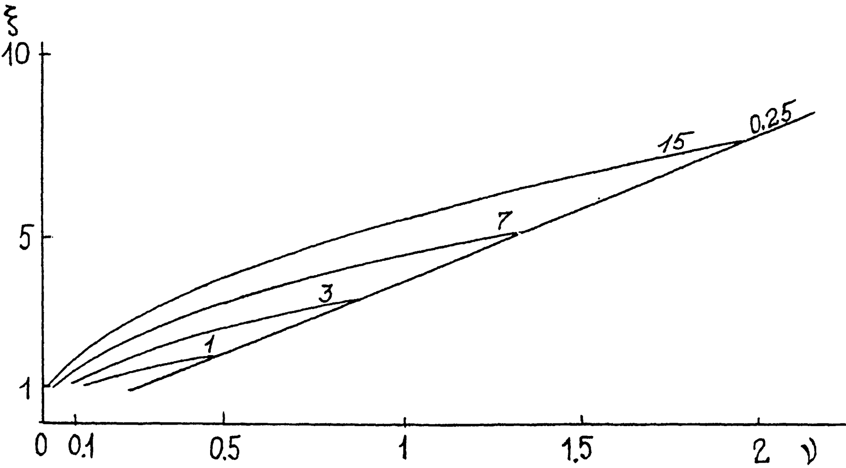
что, в свою очередь, требует рассматривать только

$$\xi > \nu\delta^{-1/3}. \tag{22}$$

Участки кривых $\xi = \xi_\theta(D,\nu)$, где в диапазоне (11) выполняется условие (22), представлены на рисунке для $\delta = 1/64$. Проведенное решение законно в точках плоскости (ξ,ν) между этими участками и прямой $\xi = \nu\delta^{-1/3}$. Но, по-видимому, КАГВ (волновые изменения $\tilde{\rho}$) существуют и

---

* Гармонические множители ненулевой моды $\rho^{(1)}$ содержат t в комбинации $(\gamma(x)\sqrt{D}t)$ [4–6]. Повторное дифференцирование по x в (13) и дает t^2.



Кривые $\xi = \xi_\theta^S(\nu)$. *Прямая* соответствует $\xi = \xi_\theta^L(\nu)$. *Числа* — значения $\beta/2$.

ниже. Действительно, как мы видели в п. 5, при малых ξ/ξ_θ (для фиксированных ν, D) КАГВ не зависят от X и, соответственно, условие (22) линейности уравнения для X в этой области становится неважным.*

8. Использованный нами вид $\Pi^{(0)}$ соответствует распределению величин, типичному для плазменного канала с поперечным электрическим током (см. п. 3). Поэтому можно ожидать, что полученные выводы отражают некоторые характерные свойства течений в таких каналах. Действительно, в известных численных экспериментах [9], проведенных для аксиально-симметричного канала произвольного профиля, было показано, что стационарные режимы течений существуют лишь при значениях ξ, меньших критического значения ξ_{kp}. Согласно авторам, определенные численно значения ξ_{kp} можно аппроксимировать формулой $\xi_{kp} \approx 0.3\beta^{1/4}\nu^{1/2}$, что, как видно из п. 6, с точностью до геометрического множителя совпадает с выведенной здесь формулой (20) для ξ_θ^S, имеющий аналогичный смысл.

---

* Отсутствие зависимости $\tilde{\rho}$ от X в этих точках делает не существенным для результата предположение об электрической квазипотенциальности процесса, которое использовалось в ранних работах [1,3–6] при нахождении X.

Список литературы

[1] *Алексеева Л.М.* Течения плазмы при наличии эффекта Холла. Препринт НИИЯФ МГУ № 88-38/59. М., 1988. С. 42.
[2] *Алексеева Л.М.* // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. В. 10. С. 1–4.
[3] *Алексеева Л.М.* // ДАН СССР. 1990. Т. 310. В. 3. С. 567–571.
[4] *Алексеева Л.М.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. В. 2. С. 64–73.
[5] *Алексеева Л.М.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. В. 2. С. 74–83.
[6] *Алексеева Л.М.*, // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. В. 13. С. 6–10.
[7] *Алексеева Л.М.* // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19. В. 5. С. 34–38.
[8] *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: ОГИЗ, 1947. 928 с.
[9] *Брушлинский К.В., Морозов А.И.* Вопросы теории плазмы. В. 8. М.: Атомиздат, 1974. С. 88–163.
[10] *Морозов А.И., Соловьев Л.С.* // ЖТФ. 1964. Т. 34. В. 7. С. 1141–1153.

Научно-исследовательский
институт ядерной физики
Московского государственного
университета

Поступило в Редакцию
30 ноября 1993 г.