

01;03

## ЭФФЕКТ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ И КАПИЛЛЯРНОЕ ВОЛНОВОЕ ДВИЖЕНИЕ НА ЗАРЯЖЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

© С.О.Ширяева, О.А.Григорьев, А.И.Григорьев

Ярославский государственный университет,  
150000 Ярославль, Россия  
(Поступило в Редакцию 19 мая 1995 г.)

Исследованы особенности проявления эффекта динамического поверхностного натяжения при капиллярном волновом движении. Показано, что структура спектра волновых движений в жидкости, подверженной влиянию эффекта динамического поверхностного натяжения, эквивалентна структуре спектра волновых движений в двухслойной вязкой жидкости, что согласуется с существующими представлениями о природе эффекта динамического поверхностного натяжения, связывающими его с наличием в приповерхностной области жидкости двойного электрического слоя, изменяющего плотность поверхностной энергии. Это позволяет идентифицировать волновые движения, порождаемые дисперсией поверхностного натяжения, с волнами на нижней границе двойного слоя. Показано, что эффект подавления капиллярного волнового движения дисперсионными волнами на нижней границе двойного слоя связан с появлением тангенциальных сил, действующих на свободную поверхность жидкости и изменяющих граничное условие для тангенциальной компоненты тензора напряжений.

### Введение

Феномен релаксации поверхностного натяжения (в соответствии с его наименованием в [1]), более известный под названием эффекта динамического поверхностного натяжения [2-5], заключающийся в изменении величины коэффициента поверхностного натяжения на частотах  $\geq 10^9$  Гц и являющийся по сути проявлением свойства дисперсии плотности энергии сил поверхностного натяжения, представляет значительный интерес в связи с многочисленными приложениями. В частности, как отмечено в [5], обсуждаемый эффект играет важную роль в электродиспергировании жидкости, реализующемся с характерными временами, меньшими 0.01 с [6,7], т.е. именно в том диапазоне временных интервалов, в котором проявляется эффект динамического поверхностного натяжения [8]. Интересно отметить, что, согласно [4], характерное время установления равновесного значения величины

коэффициента поверхностного натяжения может достигать нескольких часов, если жидкость содержит растворенные поверхностно активные вещества, медленно выходящие на ее поверхность. Это обстоятельство существенно расширяет список физических явлений, в которых может проявляться эффект динамического поверхностного натяжения. В последнее время ежегодно появляются десятки новых публикаций, посвященных этой теме (см., например, [3-5] и указанную там литературу). Но большинство новых работ носят частный характер и связаны с изучением феномена динамического поверхностного натяжения для конкретных жидкостей в узких диапазонах изменения внешних условий. Что же касается физической природы обсуждаемого эффекта, то он до сих пор весьма мало исследован, да и то лишь на качественном уровне. В частности, не исследованы закономерности взаимодействия капиллярных волн и дисперсионных, т.е. порождаемых зависимостью величины коэффициента поверхностного натяжения от частоты капиллярной волны; не изучены физическая природа самого феномена и его зависимость от наличия у жидкости поверхностного электрического заряда.

При аналитическом исследовании гидродинамических явлений, в которых может проявляться обсуждаемый эффект (например, в задачах о капиллярном волновом движении), его можно учесть введением комплексного коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma$  согласно известной формуле Максвелла [9]

$$\sigma = \sigma_{\infty} - \sigma_*(1 - i\omega\tau)^{-1} = \sigma_0 - i\omega\tau\sigma_*(1 - i\omega\tau)^{-1}, \quad \sigma_* = \sigma_{\infty} - \sigma_0, \quad (1)$$

где  $\sigma_0$  — значение коэффициента поверхностного натяжения на нулевой частоте,  $\sigma_{\infty}$  — значение коэффициента поверхностного натяжения на высоких частотах (при  $\omega\tau \gg 1$ ),  $\tau$  — характерное время релаксации поверхностного натяжения (характерное время формирования двойного электрического слоя у поверхности жидкости),  $\omega$  — комплексная частота во временной зависимости амплитуд капиллярных волн от времени:  $\zeta(t) \sim \exp(i\omega t)$ ,  $k$  — волновое число,  $i$  — мнимая единица.

1. Пусть имеется однородно заряженная с поверхностной плотностью заряда  $\kappa$  неограниченная плоская поверхность вязкой несжимаемой идеально электропроводной жидкости, заполняющей в поле сил тяжести полупространство  $z < 0$ . Уравнение граничной поверхности в отсутствие возмущения записывается в виде  $z = 0$ . Пусть  $\sigma$  и  $\nu$  — коэффициенты поверхностного натяжения и кинематической вязкости жидкости,  $\rho$  — ее удельная плотность. Зададимся вопросом об отыскании спектра капиллярных волн в жидкости при вышесформулированных условиях. С этой целью найдем волновые решения уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\mathbf{U}, \quad \nabla\mathbf{U} = 0. \quad (2)$$

В (2)  $P(\mathbf{r}, t)$  — давление внутри жидкости,  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  — поле скоростей. Искомые решения на свободной поверхности жидкости, описываемой уравнением вида

$$F(\mathbf{r}, t) \equiv r - R - \zeta(x, t) = 0,$$

должны удовлетворять граничным условиям: кинематическому

$$\frac{dF}{dt} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{U} \nabla F = 0 \quad (3)$$

и динамическим для касательных

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \mathbf{n}(\boldsymbol{\tau} \nabla) \mathbf{U} = 0 \quad (4)$$

и нормальной

$$(P - P_0) - 2\rho\nu\mathbf{n}(\mathbf{n} \nabla) \mathbf{U} + \sigma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + 4\pi\epsilon^{-1}\kappa^2 k \zeta = 0 \quad (5)$$

компонент тензора напряжений. В (5)  $P_0$  — постоянное внешнее давление; предпоследнее слагаемое справа определяет давление сил поверхностного натяжения под искаженной капиллярным волновым движением поверхностью жидкости [10]; последнее слагаемое справа определяет, согласно [11], давление электрического поля на свободную поверхность жидкости, происходящее из-за возмущения равновесной плоской поверхности жидкости  $\zeta(x, t) = A \exp(ikx - i\omega t)$ , вызванного капиллярным волновым движением.

Система уравнений (2) с граничными условиями (3)–(5) представляет собой математическую формулировку решаемой задачи.

2. Поле скоростей в задаче (2)–(5) естественно искать в виде суммы потенциальной и вихревой компонент аналогично тому, как это делалось в [10],

$$\begin{aligned} U_x(x, z, t) &= \left( ikB \exp(-kz) - lC \exp(-lz) \right) \exp(ikx - i\omega t), \\ U_z(x, z, t) &= \left( -kB \exp(-kz) + ikC \exp(-lz) \right) \exp(ikx - i\omega t), \\ l^2 &= k^2 - i\omega\nu^{-1}, \end{aligned} \quad (6)$$

$A$ ,  $B$  и  $C$  — константы;  $l$  — характерный линейный масштаб пространственного изменения вихревой компоненты поля скоростей.

Повторяя те же рассуждения, что и в [10], несложно получить дисперсионное соотношение для рассматриваемой системы

$$\omega^2 + 4i\nu k^2 \omega - 4\nu^2 k^4 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{i\omega}{\nu k^2}} \right) = \frac{k}{\rho} (g\rho + \sigma k^2 - 4\pi\kappa^2). \quad (7)$$

Отметим сразу, что принятая (см. (6)) временная зависимость амплитуд капиллярных волн от времени  $\zeta \sim \exp(-i\omega t)$  берется вместо более привычной для задач о волнах в вязкой жидкости зависимости  $\zeta \sim \exp(\omega t)$  [10] в связи с предстоящим исследованием влияния дисперсионных эффектов, которые вводятся именно для зависимости от времени такого вида [1]. В таком выражении мнимая отрицательная часть комплексной частоты дает декремент затухания капиллярных

волн, а мнимая положительная — инкремент нарастания неустойчивости Тонкса-Френкеля, которая реализуется, когда правая часть соотношения (7) (по мере увеличения поверхностной плотности электрического заряда) проходит через нуль и становится отрицательной [12]. Вещественная часть комплексной частоты в используемом выражении дает частоту периодического волнового движения. В безразмерных переменных

$$y = \frac{\omega}{\nu k^2}, \quad \alpha = \frac{\omega_0}{\nu k^2}, \quad f = \sigma_* / \rho \nu^2 k,$$

$$\gamma = \nu k^2 \tau, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{\rho} (g\rho + \sigma_0 k^2 - 4\pi k \kappa^2)$$

дисперсионное уравнение (7) принимает вид

$$(1 - i\gamma y)(2 - iy)^2 + \alpha^2(1 - i\gamma y) - if\gamma y = 4(1 - i\gamma y)\sqrt{1 - iy}. \quad (8)$$

Параметр  $f$  для конкретной жидкости (при фиксированных  $\sigma_*$ ,  $\nu$  и  $\rho$ ) характеризует волновое число, а при фиксированном волновом числе (если зафиксировать  $\alpha$  и изменять  $f$ ) величину переменной части коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma_*$ .

3. Прежде чем переходить к анализу данных, приведенных на рисунках, отметим, что уравнение (8) является трансцендентным. Можно избавиться от радикала в правой части, возводя во вторую степень обе части равенства (8), тогда получится обыкновенное алгебраическое уравнение шестой степени относительно комплексной переменной  $y$ . Ясно, что не все шесть его корней будут иметь физический смысл, так как исходное уравнение (8) из-за наличия в нем радикала определено на двух листах римановой поверхности, т.е. является двухзначным. Физически разумные ветви дисперсионного уравнения нужно искать среди решений, определенных на верхнем листе римановой поверхности, соответствующем положительному значению радикала в уравнении (8).

Решения дисперсионного уравнения, получающиеся при отрицательных значениях радикала в (8), физического смысла не имеют, так как сам радикал, согласно (6), представляет собой безразмерное отношение  $l/k$ , т.е. отношение характерного линейного масштаба пространственного изменения амплитуды вихревой компоненты поля скоростей  $l$  к волновому числу  $k$ . Это отношение по своему смыслу не может быть отрицательным.

На рис. 1-4 представлены зависимости  $\text{Im} y = \text{Im} y(\alpha^2)$  и  $\text{Re} y = \text{Re} y(\alpha^2)$ , рассчитанные численно по (8) при  $f = 1$  и различных значениях параметра  $\gamma$  ( $\gamma = 0.1$  (рис. 1),  $0.5$  (рис. 2),  $1.25$  (рис. 3),  $3$  (рис. 4)). Ветви 1-3 соответствуют капиллярным волнам, а ветви 4-6 — дисперсионным. Часть ветви 2, расположенная левее начала координат (при  $\alpha^2 < 0$ ), определяет инкремент неустойчивости Тонкса-Френкеля.

Несложно видеть, что структура капиллярных и дисперсионных волн качественно идентичны, т.е. в обоих случаях имеется одна ветвь, описывающая затухающие волновые движения (это ветви 1 и 4 соответственно), существующая на полубесконечном интервале значений параметра  $\alpha^2$ , и две ветви (3, 6) аperiodически затухающих движений

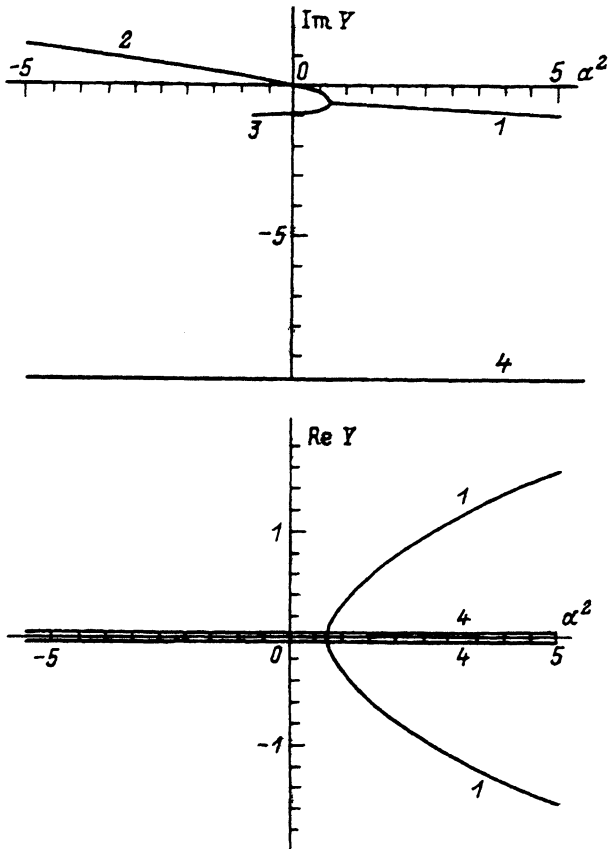


Рис. 1.

жидкости, из которых одна весьма короткая, исчезающая (уходящая на другой лист римановой поверхности) в некоторых областях значений физических параметров системы ( $\alpha^2$ ,  $\gamma$ ,  $f$ ). Другая же ветвь аперриодических движений (2 и 5) существует на полубесконечном интервале значений параметра  $\alpha^2$ .

Как показывают расчеты (см. также рис. 1-4), по мере роста величины параметра  $\gamma$  (по мере роста влияния эффекта дисперсии поверхностного натяжения) точки ветвления решений для капиллярных и дисперсионных волн смещаются вправо. При  $\gamma = 0$  точка ветвления решений дисперсионного уравнения для капиллярных волн (1-я точка ветвления) расположена вблизи начала координат, в четвертом квадранте; дисперсионных движений не существует. С появлением отличных от нуля значений параметра  $\gamma$  1-я точка ветвления смещается вправо и возникают дисперсионные волны с точкой ветвления (2-я точка ветвления), расположенной в 3-м квадранте при  $\alpha^2 \rightarrow -\infty$ . Дальнейшее увеличение параметра  $\gamma$  приводит к смещению вправо обеих точек ветвления. Область существования дисперсионных волн при увеличении параметра  $\gamma$  от 0 до 10 смещается вправо, почти до оси ординат (с резким скачком к оси ординат при  $\gamma = 1.25$ ). При этом область

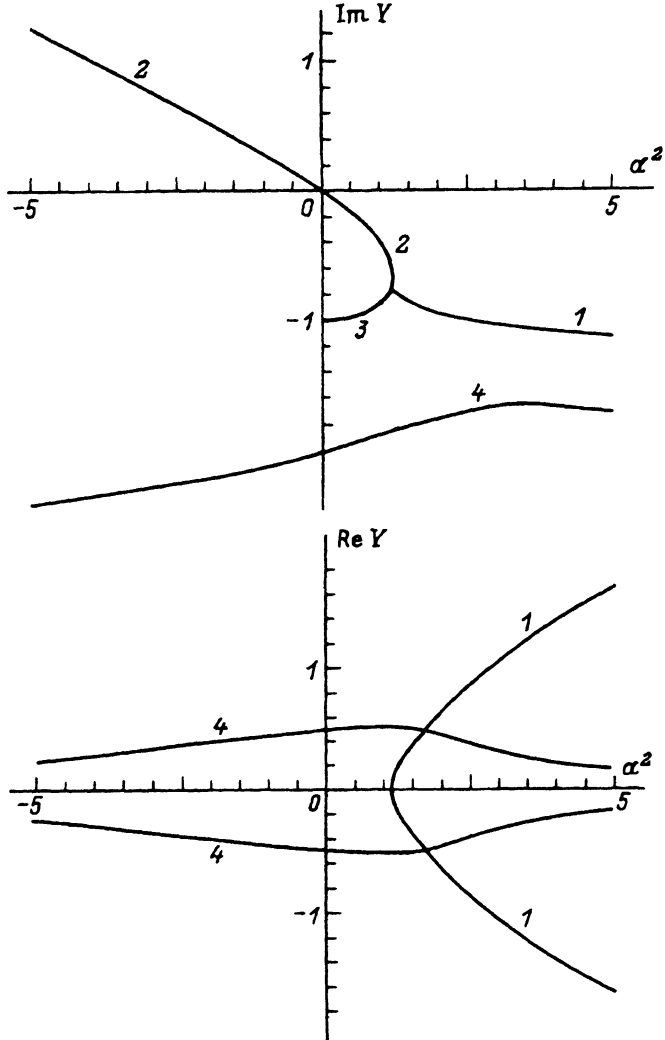


Рис. 2.

значений  $\alpha^2 < 0$  занимают аperiодические дисперсионные движения с декрементом затухания  $\sim \gamma^{-1}$ .

Интересно, что при  $\gamma > 0.55$  не существует (по крайней мере при  $\alpha^2 < 100$ ) капиллярного волнового движения поверхности жидкости на анализируемой длине волны (определяемой принятым значением параметра  $f$ ). Его место занимает дисперсионное волновое движение, характеристики которого (частота и декремент) при  $\gamma \sim 10$  примерно совпадают с такими же характеристиками для капиллярной волны при  $\gamma = 0$ . Это можно интерпретировать как эффект подавления на выделенной длине волны капиллярного волнового движения дисперсионными волнами, т.е. как некий аналог гашения капиллярных волн пленками поверхностно-активных веществ.

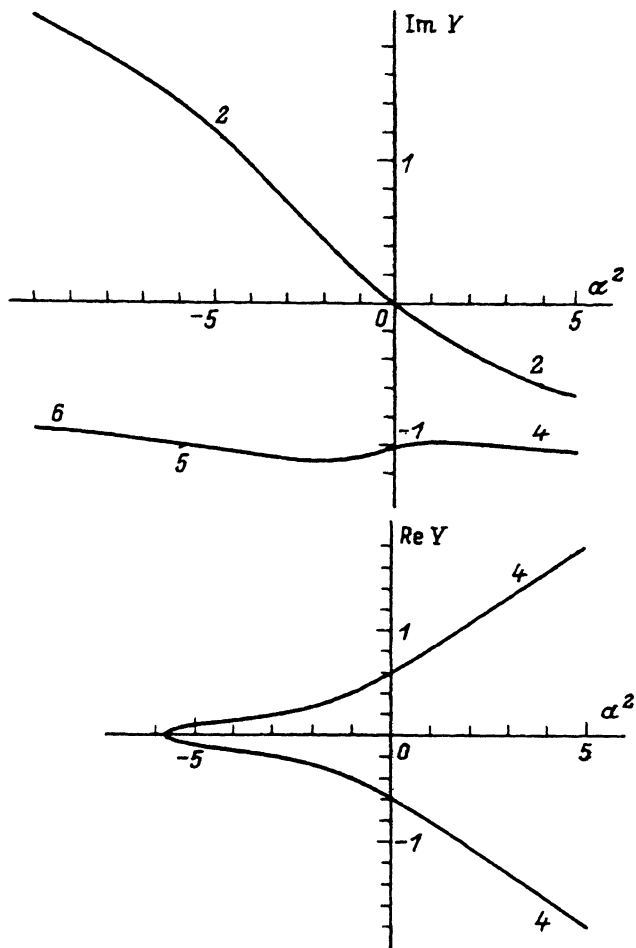


Рис. 3.

На рис. 5, 6 (см. также рис. 2) представлены зависимости  $\text{Im } y = \text{Im } y(\alpha^2)$  и  $\text{Re } y = \text{Re } y(\alpha^2)$ , рассчитанные численно по (8) при  $\gamma = 0.5$  и различных значениях параметров  $f$  (на рис. 5  $f = 0.1$ , на рис. 6  $f = 3$ ). Несложно видеть, что с увеличением  $f$  частоты капиллярного волнового движения уменьшаются, частоты дисперсионных волн увеличиваются. Декременты затухания дисперсионных волн немного увеличиваются в области  $\alpha^2 < 0$  и немного уменьшаются при  $\alpha^2 > 0$ . Область существования капиллярного волнового движения с увеличением  $f$  смещается вправо, так же как и при увеличении  $\gamma$  и это смещение имеет, по-видимому, тот же смысл, так как увеличение  $f$  означает увеличение  $\sigma_*$  — увеличение вклада от дисперсии поверхностного натяжения в картину развития волновых движений. В области  $\alpha^2 < 0$  с увеличением  $f$  происходит незначительное снижение инкремента неустойчивости Тонкса-Френкеля.

4. Принимая во внимание то обстоятельство, что эффект динамического поверхностного натяжения (дисперсии поверхностного натяже-

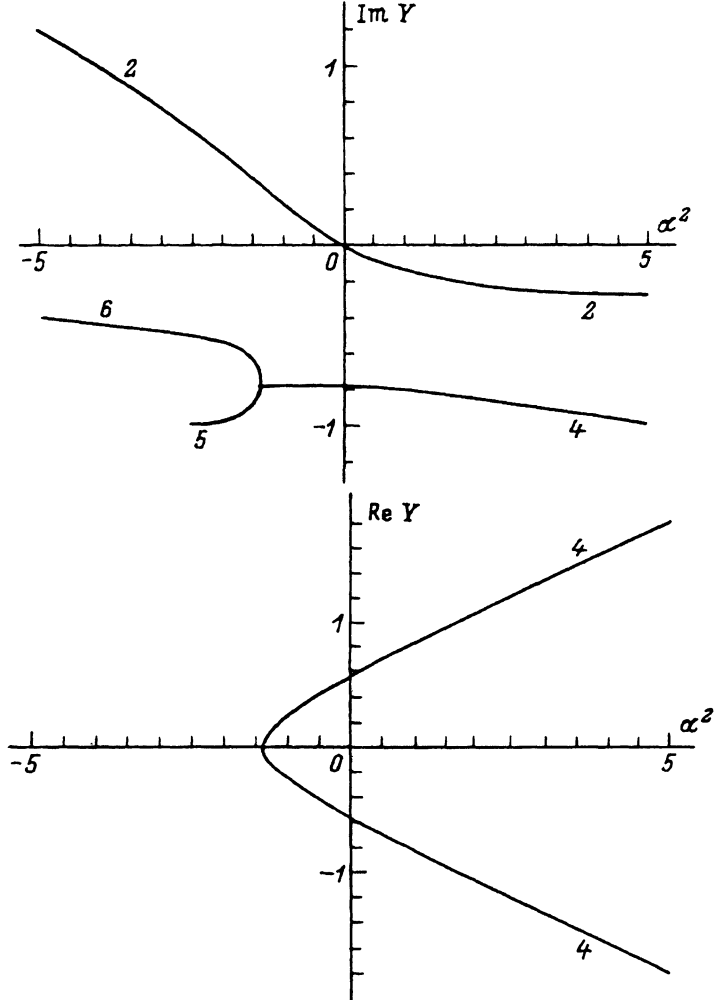


Рис. 4.

ния) является приповерхностным эффектом (связан с различием в физических свойствах жидкости в поверхностном слое толщиной  $\sim 10$  нм и в объеме), представляется целесообразным решить задачу о капиллярном волновом движении в двухслойной вязкой жидкости в поле сил тяжести, когда нижняя из жидкостей заполняет полубесконечное пространство, а верхняя имеет конечную толщину, меньшую длины капиллярной волны (напомним, что, согласно [13], капиллярные волны с длинами, меньшими  $\approx 50$  нм, не могут существовать в силу сильного вязкого демпфирования). Это позволит лучше понять физическую природу эффекта динамического поверхностного натяжения.

Согласно принятым представлениям [2-5], эффект динамического поверхностного натяжения связан с существованием у поверхности жидкости двойного электрического слоя толщиной  $\sim 10$  нм, изменяющего ее поверхностную энергию и, следовательно, величину коэффи-



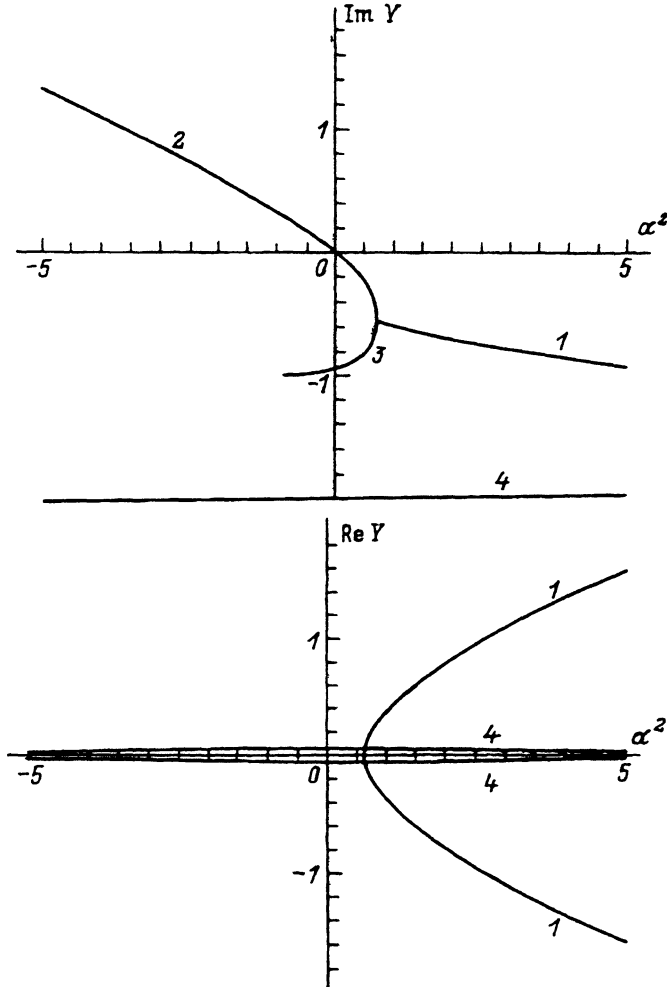


Рис. 5.

циента поверхностного натяжения. При разрушении в силу тех или иных причин такого двойного слоя изменяется (на характерном временном интервале восстановления структуры двойного слоя) и величина коэффициента поверхностного натяжения.

Все рассмотрение проведем на модели несжимаемых вязких жидкостей, нижняя из которых заполняет в поле силы тяжести полупространство  $z < 0$ , а верхняя имеет конечную толщину  $h$ . Невозмущенная граница раздела между жидкостями пусть совпадает с плоскостью  $XOY$  декартовой системы координат, орт  $\mathbf{n}_z$  которой направлен вверх, в направлении, противоположном направлению действия поля сил тяжести. Верхнюю жидкость с кинематической вязкостью  $\nu_1$ , плотностью  $\rho_1$ , заполняющую пространство  $h > z > 0$ , будем считать неэлектропроводной с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Нижнюю жидкость с кинематической вязкостью  $\nu_2$ , плотностью  $\rho_2$ , заполняющую полупространство  $z < 0$ , будем считать идеально электропроводной.

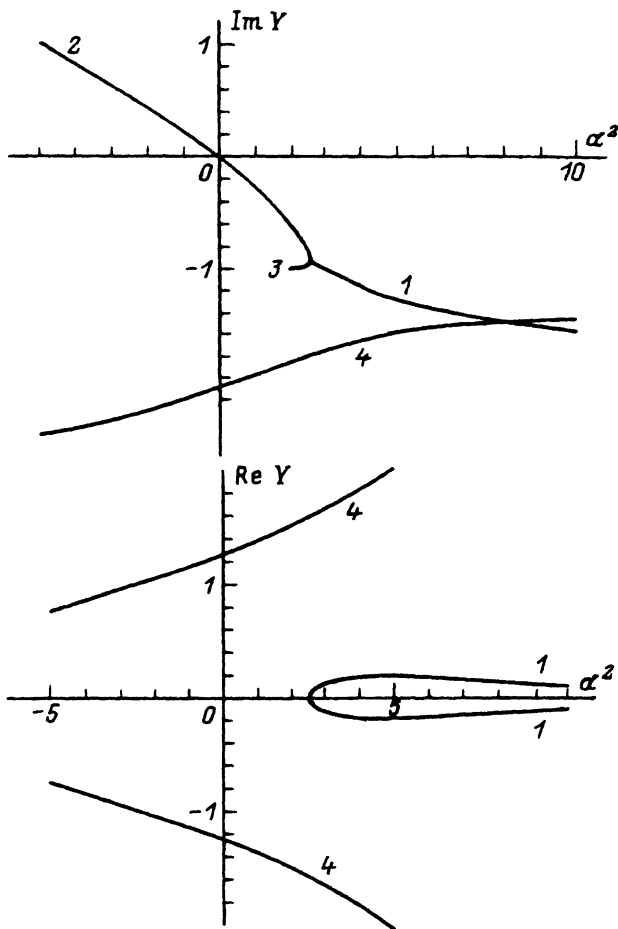


Рис. 6.

Примем также, что свободная поверхность и невозмущенная граница раздела жидкостей однородно заряжены с поверхностными плотностями зарядов  $\kappa_j$  и обладают поверхностными натяжениями с коэффициентами  $\sigma_j$  ( $j = 1, 2$ ). Тогда для определения волновых движений в описанной системе можно записать линеаризованную систему уравнений

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_j} \nabla P_j + \nu_j \Delta U_j + \mathbf{g} \quad (j = 1, 2), \quad (9)$$

$$\nabla U_j = 0, \quad (10)$$

$$z \rightarrow -\infty \rightarrow U_1 \rightarrow 0. \quad (11)$$

В этих выражениях  $P_j = P_j(\mathbf{r}, t)$  — давление внутри  $j$ -й жидкости;  $U_j = U_j(\mathbf{r}, t)$  — поле скоростей в ней;  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения.

На границе раздела сред, возмущенной капиллярным волновым движением, уравнение которой имеет вид  $z = \zeta_2(x, t)$ , должны удовлетворяться граничные условия: равенства полей скоростей

$$U_1(\mathbf{r}, t) = U_2(\mathbf{r}, t), \quad (12)$$

кинематические

$$U_{1z} = U_{2z} \approx \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} \quad (13)$$

и динамические для касательных

$$\eta_1 \left( \tau(\mathbf{n}\nabla)U_1 + \mathbf{n}(\tau\nabla)U_1 \right) = \eta_2 \left( \tau(\mathbf{n}\nabla)U_2 + \mathbf{n}(\tau\nabla)U_2 \right) \quad (14)$$

и нормальной

$$P_1^{(2)} - P_2^{(2)} + 2\eta_2 \frac{\partial U_{2z}}{\partial z} - 2\eta_1 \frac{\partial U_{1z}}{\partial z} = P_x^{(2)} - P_\sigma^{(2)}, \quad (15)$$

компонент тензора напряжений.

В этих соотношениях  $\zeta_2(x, t)$  — возмущение равновесной плоской границы раздела сред;  $P_\sigma^{(2)} = -\sigma_2(\partial^2 \zeta_2 / \partial x^2)$  и  $F_x^2 = 4\pi\epsilon^{-1}\kappa_2^2 k \zeta_2$  — давление сил поверхностного натяжения под искривленной волновым движением плоской границей раздела сред и электростатическое давление на нее из-за наличия поверхностного заряда, распределенного с плотностью  $\kappa_2$ ;  $k$  — волновое число;  $\tau$  и  $\mathbf{n}$  — орты касательной и нормали и границе раздела;  $\eta_j = \nu_j \rho_j$  — коэффициент динамической вязкости.

В дальнейшем рассмотрении течения в жидкостях будем искать, разделяя поле скоростей  $\mathbf{U}_j = \mathbf{U}_j(\mathbf{r}, t)$  на две компоненты: потенциальную (с потенциалом скоростей  $\Phi_j(\mathbf{r}, t)$ ) и вихревую (описываемую функцией тока). Тогда выражения для давлений  $P_1(\mathbf{r}, t)$  и  $P_2(\mathbf{r}, t)$  в верхней и нижней жидкостях при  $z = \zeta_2(x, t)$  в (15) можно записать в виде

$$P_1^{(2)} = -\rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \rho_1 g \zeta_2, \quad P_2^{(2)} = -\rho_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \rho_2 g \zeta_2. \quad (16)$$

На свободной поверхности верхней жидкости, возмущенной капиллярным волновым движением, уравнение которой имеет вид  $z = h + \zeta_1(x, t)$ , должны удовлетворяться граничные условия: кинематическое:

$$U_{1z} \approx \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} \quad (17)$$

и динамические для касательных

$$\tau_0(\mathbf{n}_0\nabla)U_1 + \mathbf{n}_0(\tau_0\nabla)U_1 = 0 \quad (18)$$

и нормальной

$$P_1^{(1)} - 2\eta_1 \frac{\partial U_{1z}}{\partial z} = -P_x^{(1)} + P_\sigma^{(1)}, \quad (19)$$

компонент тензора напряжений.

В этих соотношениях  $\zeta_1(x, t)$  — возмущение свободной поверхности;  $P_\sigma^{(1)} = -\sigma_1(\partial^2\zeta_1/\partial x^2)$  и  $P_\kappa^{(1)} = -4\pi\epsilon^{-1}\kappa_1^2 k\zeta_1$  — давление сил поверхностного натяжения и давление электрического поля на свободной поверхности верхней жидкости;  $\tau_0$  и  $\mathbf{n}_0$  — орты касательной и нормали к свободной поверхности верхней жидкости.

5. Решение задачи будем искать в виде

$$U_{1x}(x, z, t) = \left( ikB_1 \exp(-kz) + l_1 C_1 \exp(-l_1 z) + \right. \\ \left. + ikD \exp(kz) - l_1 E \exp(l_1 z) \right) \exp(ikx - i\omega t),$$

$$U_{1z}(x, z, t) = \left( -kB_1 \exp(-kz) + ikC_1 \exp(-l_1 z) + \right. \\ \left. + Dk \exp(kz) + ikE \exp(l_1 z) \right) \exp(ikx - i\omega t),$$

$$U_{2x}(x, z, t) = \left( ikB_2 \exp(kz) - l_2 C_2 \exp(l_2 z) \right) \exp(ikx - i\omega t),$$

$$U_{2z}(x, z, t) = \left( kB_2 \exp(kz) + ikC_2 \exp(l_2 z) \right) \exp(ikx - i\omega t),$$

$$l_1^2 = k^2 - i\omega\nu_1^{-1}, \quad l_2^2 = k^2 - i\omega\nu_2^{-1},$$

$$\zeta_1(x, t) = F_1 \exp(ikx - i\omega t), \quad \zeta_2(x, t) = F_2 \exp(ikx - i\omega t), \quad (20)$$

$B, C, E, D$  и  $F$  — константы.

Подставляя (20) в условия (11)–(19), можно получить дисперсионное соотношение для волн в описанной системе

$$\omega^2[r(L_2 + L_4) - L_1] + \omega 2ik^2 \left\{ \nu_2 \left( K \sqrt{1 - \frac{i\omega}{\nu_2 k^2}} - L_1 \right) - \right. \\ \left. - \nu_1 r \left( -L_2 - L_3 \sqrt{1 - \frac{i\omega}{\nu_1 k^2}} - L_4 + L_5 \sqrt{1 - \frac{i\omega}{\nu_1 k^2}} \right) \right\} + \omega_0^2 = 0,$$

$$K = \frac{-2 + rm \left( 2 - \frac{i\omega}{\nu_1 k^2} \right) \lambda_6 \delta_1 + 2rm \lambda_5 \delta_3}{\frac{i\omega}{\nu_2 k^2} - 2rm \lambda_5 \delta_4 - rm \left( 2 - \frac{i\omega}{\nu_1 k^2} \right) \lambda_6 \delta_2},$$

$$L_1 = 1 + K, \quad L_2 = \delta_3 + K \delta_4, \quad L_3 = \delta_1 + K \delta_2, \quad L_4 = L_1 \chi_6 + iL_2 \chi_7,$$

$$L_5 = -iL_1 \chi_4 + L_2 \chi_6, \quad \lambda_1 = 1 + \chi_6 + i\chi_4 \sqrt{1 - \frac{i\omega}{\nu_1 k^2}},$$

$$\lambda_2 = 1 - \chi_5 + \frac{i\chi_7}{\sqrt{1 - \frac{i\omega}{\nu_1 k^2}}}, \quad \lambda_3 = -1 + \chi_6 + i\chi_4, \quad \lambda_4 = 1 + \chi_5 - i\chi_7,$$

$$\lambda_5 = -1 + \chi_6 + i \left( 1 - \frac{i\omega}{2\nu_1 k^2} \right) \chi_4, \quad \lambda_6 = -1 - \chi_5 + i \left( 1 - \frac{i\omega}{2\nu_1 k^2} \right)^{-1} \chi_7,$$

$$\chi_2 = \frac{\exp(-l_1 h) \left(1 - \frac{i\omega}{\nu_1 k^2}\right) + \exp(-l_1 h)}{2i \exp(kh)}, \quad \chi_1 = \exp(-2kh),$$

$$\chi_3 = \frac{\exp(l_1 h) \left(1 - \frac{i\omega}{\nu_1 k^2}\right) \exp(l_1 h)}{2i \exp(kh)}, \quad \chi_4 = -\frac{\mu_1 + \chi_1 \mu_2}{\chi_3 \mu_2 + \mu_4},$$

$$\chi_5 = -\frac{\mu_3 + \chi_2 \mu_2}{\chi_3 \mu_2 + \mu_4}, \quad \chi_6 = \chi_1 + \chi_3 \chi_4, \quad \chi_7 = \chi_2 + \chi_3 \chi_5,$$

$$\mu_1 = -\frac{\omega^2}{\nu_1^2 k^4} \exp(-kh) - \beta^2 \exp(-kh) - \frac{i\omega}{\nu_1 k^2} \exp(-kh),$$

$$\mu_2 = -\frac{\omega^2}{\nu_1^2 k^4} \exp(kh) + \beta^2 \exp(kh) - \frac{i\omega}{\nu_1 k^2} \exp(kh),$$

$$\mu_3 = i\beta^2 \exp(-l_2 h) - \frac{2\omega}{\nu_2 k^2} \sqrt{1 - \frac{i\omega}{\nu_2 k^2}} \exp(-l_2 h),$$

$$\mu_4 = i\beta^2 \exp(l_2 h) + \frac{2\omega}{\nu_2 k^2} \sqrt{1 - \frac{i\omega}{\nu_2 k^2}} \exp(l_2 h),$$

$$\beta^2 = \frac{\rho_1 g + \sigma_1 k^2 - 4\pi \kappa_1^2 k}{\rho_1 \nu_1^2 k^3}, \quad r = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad m = \frac{\nu_1}{\nu_2},$$

$$\omega_0^2 = k[g(1-r) + \rho_2^{-1} \sigma_2 k^2 - k4\pi \epsilon^{-1} \rho_2^{-1} \kappa_2^2]. \quad (21)$$

Ввиду громоздкости полученного соотношения его дальнейший анализ проведем численно, приведя предварительно к безразмерному виду,

$$y^2(\tau(L_2 + L_4) - L_1) + 2iy \left\{ \left(-L_1 + K \sqrt{1 - iy}\right) - \right.$$

$$\left. -rm \left( L_1 - L_3 \sqrt{1 - \frac{iy}{m}} - L_4 + L_5 \sqrt{1 - \frac{iy}{m}} \right) \right\} + \alpha^2 = 0,$$

$$y = \omega \nu_1^{-1} k^{-2}; \quad \alpha^2 = \omega_0^2 \nu_1^{-2} k^{-4}. \quad (22)$$

6. Отметим, что из общефизических соображений в решаемой задаче в отличие от задачи о волновом движении в однородной жидкости с плоской свободной поверхностью следует ожидать удвоения всех ветвей волновых движений, характерных для однородной жидкости. Это должно произойти потому, что в решаемой задаче волны генерируются силами, приложенными уже к двум поверхностям: свободной поверхности и границе раздела между жидкостями, каждая из них будет формировать свой набор волновых движений. Расчеты показывают, что, как и ожидалось, произошло удвоение спектра волновых движений, характерных для однородной жидкости с плоской свободной поверхностью. Получающиеся в результате кривые качественно совпадают с приведенными на рис. 1-6. Для сравнения на рис. 7 представлены

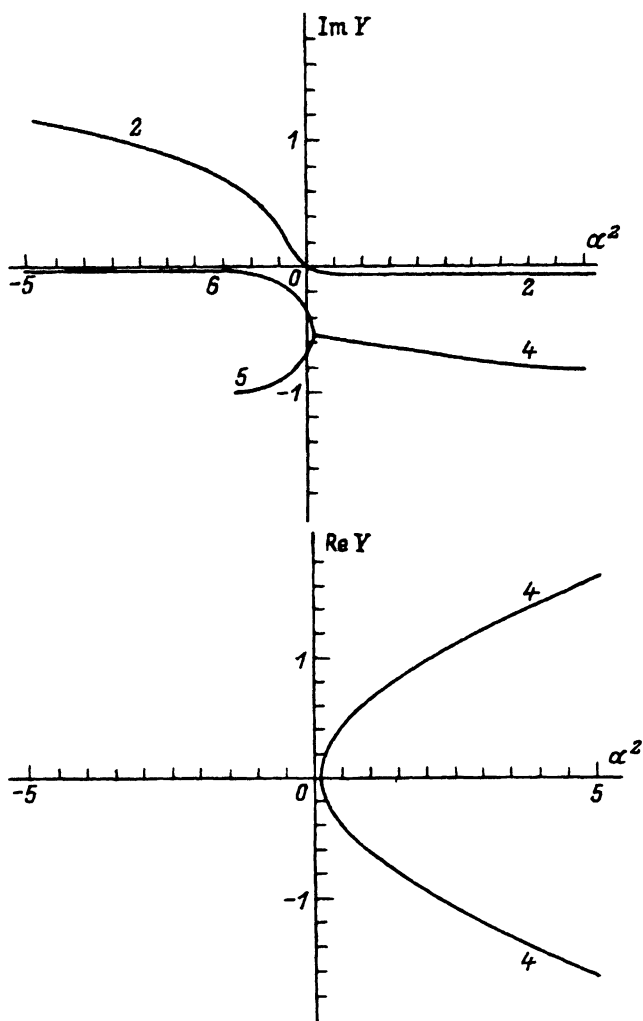


Рис. 7.

рассчитанные по (22) зависимости  $\text{Im } y = \text{Im } y(\alpha^2)$  и  $\text{Re } y = \text{Re } y(\alpha^2)$  в системе двухслойной вязкой жидкости при  $m = 1.05$ ,  $\gamma = 0.95$ ,  $\beta^2 = 0.5$ ,  $\xi = kh = 0.1$ .

Сравнение кривых, приведенных на рис. 7, с данными, приведенными в разделе 3 (см., в частности, рис. 4), указывает на их качественное сходство. Это обстоятельство можно интерпретировать как эквивалентность структуры волновых движений жидкости, подверженной действию эффекта дисперсии поверхностного натяжения, структуре волновых движений в стратифицированной жидкости, определяемых системой (9)–(19).

Обнаруженное сходство структур волновых движений в рассматриваемых задачах представляется достаточно закономерным, так как сам эффект дисперсии поверхностного натяжения связан с наличием двойного электрического слоя у поверхности жидкости и с некоторым упо-

рядочением ориентации ее молекул в приповерхностном слое конечной толщины, т.е. с возникновением своего рода стратификации по физико-химическим свойствам (плотности, вязкости и т.п.), обусловленной наличием свободной поверхности, а в общем случае просто границы, даже твердой. Яснее становится и природа дисперсионных волн, обусловленных эффектом динамического поверхностного натяжения. Они теперь естественно связываются с периодическими возмущениями нижней границы стратифицированного приповерхностного слоя жидкости (нижней границы двойного электрического слоя у поверхности жидкости), вызываемыми, как и капиллярные волны [12], уже тепловым движением молекул жидкости.

Сходство в структуре волновых движений задач (1)–(5) и (9)–(19) может быть интерпретировано в пользу утверждения о четкой очерченности нижней границы двойного слоя у поверхности жидкости, обеспечивающего существование эффекта динамического поверхностного натяжения, а также наличия у нижней границы двойного слоя некой избыточной (по отношению к объему) поверхностной энергии, приводящей к появлению аналога поверхностного натяжения и обеспечивающего генерацию поверхностных волн.

Интересно отметить, что зависимости  $\text{Im } y = \text{Im } y(\beta^2)$  и  $\text{Re } y = \text{Re } y(\beta^2)$  при  $m = 1.05$ ,  $r = 0.95$ ,  $\alpha^2 = 0.5$ ,  $\zeta = 0.1$ , рассчитанные численно по (22), имеют точно такой же вид, как зависимости, приведенные на рис. 7. Физически это означает, что в рассматриваемой в разделах 4–6 задаче при прочих равных условиях и малой величине  $\xi$  (когда толщина слоя верхней жидкости меньше длины волны, на которой проводится анализ) волновые движения, вызываемые свободной поверхностью и границей раздела между двумя несмешивающимися жидкостями, идентичны, что представляется достаточно прозрачным физически, ибо характерный линейный масштаб изменения характеристик волнового движения есть длина волны.

7. В соответствии с полученными результатами теперь можно более конкретно проанализировать упоминавшийся в разделе 3 эффект “гашения капиллярного волнового движения дисперсионным”. В самом деле, появление дисперсионного волнового движения с волновым числом  $k$ , генерируемого колебаниями нижней границы двойного слоя, соответствует появлению периодических изменений толщины двойного слоя  $\sim \exp(ikx - i\omega t)$ , которое в свою очередь приведет к периодическому же изменению вдоль поверхности жидкости ее поверхностной энергии и величины коэффициента поверхностного натяжения. Появление зависимости  $\sigma = \sigma(x)$  приведет к возникновению тангенциальной силы  $\nabla\sigma(x)$ , действующей на единицу площади свободной поверхности жидкости, и к изменению граничного условия (4) для касательной компоненты тензора напряжений, как это и имеет место в случае присутствия на поверхности жидкости поверхностно активных веществ [10]. Если  $\lambda \nabla\sigma(x) \geq \sigma$  (где  $\lambda$  — длина волны), что и имеет место в нашем случае, то описанное изменение граничного условия приведет к резкому увеличению коэффициента затухания капиллярных волн вследствие увеличения интенсивности вихревого движения в приповерхностном слое жидкости [10]. Это и объясняет отмеченное в разделе 3 уменьшение при усилении эффекта дисперсии поверхностного натяжения (при увеличении  $\gamma$ ) области существования капиллярного волнового движения.

8. Описанный в разделе 7 эффект возникновения неоднородности коэффициента поверхностного натяжения, по-видимому, может реализоваться и в крайнем своем проявлении: в рассматриваемой системе в двухслойной жидкости, физические свойства которой (плотность, диэлектрическая проницаемость, степень упорядоченности в ориентации молекул и т.п.) в объеме и в приповерхностном слое различаются, возможна раскачка волн на нижней границе верхнего слоя, как это имеет место в эффекте “мертвого моря” [14], вплоть до их обрушения. Это будет приводить к возникновению неоднородностей в величине коэффициента поверхностного натяжения с амплитудой  $\approx \sigma_*$  и, следовательно, к возникновению интенсивных тангенциальных движений жидкости в поверхностном слое, т.е. будет реализовываться некий аналог эффекта Марангони.

9. В проведенном рассмотрении показано, что волновые движения, порождаемые дисперсией поверхностного натяжения, можно идентифицировать с волнами на нижней границе двойного электрического слоя в приповерхностном слое жидкости.

Полученные данные свидетельствуют в пользу предположения, что нижняя граница двойного электрического слоя у поверхности жидкости обладает избыточной (по сравнению с объемом жидкости) энергией, как и свободная поверхность, не размыта, но имеет достаточно четкую границу, колебания которой и порождают дисперсионные волны.

Эффект подавления капиллярного волнового движения дисперсионными волнами на нижней границе двойного электрического слоя, связан с появлением тангенциальных сил, действующих на свободную поверхность жидкости, порождаемых колебаниями толщины двойного слоя и изменяющих граничное условие для тангенциальной компоненты тензора напряжений.

На закономерностях реализации (на критических условиях и инкременте) неустойчивости Тонкса–Френкеля эффект динамического поверхностного натяжения сказывается слабо.

#### Список литературы

- [1] Быковский Ю.А., Маныкин Э.А., Полуэктов П.П. и др. // ЖТФ. 1976. Т. 46. Вып. 10. С. 2211–2213.
- [2] Kochurova N.N., Rusanov A.I. // J. Coll. Int. Sci. 1981. Vol. 81. N 2. P. 297–303.
- [3] Liggeri L., Ravera F., Passerone A. // J. Coll. Int. Sci. 1995. Vol. 169. N 1. P. 226–237.
- [4] Bonfillon A. et al. // J. Coll. Int. Sci. 1994. Vol. 164. N 2. P. 497–504.
- [5] Zhang X. et al. // J. Coll. Int. Sci. 1994. Vol. 168. N 1. P. 47–60.
- [6] Shiryaeva S.O., Grigor'ev A.I. // J. Electrostatics. 1995. Vol. 34. N 1. P. 51–59.
- [7] Шевченко С.И., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Науч. приборостроение. 1991. Т. 1. № 4. С. 3–21.
- [8] Пастухов В.А., Пасынков С.В. и др. // Расплавы. 1987. Т. 1. № 3. С. 63–67.
- [9] Тежого С.Ф., Ваус М. // Molecular Physics. 1985. Vol. 54. N 6. P. 1307–1324.
- [10] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [11] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
- [12] Френкель Я.И. // ЖТФ. 1936. Т. 6. Вып. 4. С. 348–350.
- [13] Антонюк П.Н. // ДАН СССР. 1986. Т. 286. № 6. С. 1324–1328.
- [14] Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 696 с.