

01;03

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ИНДУКЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ В МГД НАСОСАХ И ГЕНЕРАТОРАХ С ШИРОКИМ КАНАЛОМ

© Ю.А.Половко, Е.П.Романова, Э.А.Тропп

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
(Поступило в Редакцию 23 марта 1995 г.)

Анализируются вторичные течения в индукционных МГД машинах в рамках одномерной струйной модели течения. Исследовано влияние приведенной вязкости на вид внешних характеристик вторичных течений в насосном и генераторном режимах. Получены профили скорости течения, соответствующие различным точкам внешних характеристик.

Введение

Линейные индукционные МГД машины широко применяются в разных отраслях техники. Это, например, МГД насосы различного типа для транспортировки проводящих жидкостей, управляющие МГД дроссели, жидкометаллические МГД генераторы. МГД насосы большой подачи в последнее время нашли широкое применение в атомной энергетике во вспомогательных контурах и в контурах охлаждения реакторов на быстрых нейтронах [1]. Специфика области применения таких устройств налагает повышенные требования на надежность и устойчивость их работы.

Настоящая работа посвящена изучению возникающих вторичных течений в индукционных МГД машинах с широким каналом. Тема исследования имеет также самостоятельное теоретическое значение, поскольку по сути дела речь идет об изучении течений со сложной скоростной структурой, возникающих при определенных условиях в электропроводящей жидкости в переменных магнитных полях. Знание структуры и интегральных характеристик таких вторичных течений может оказаться необходимым при изучении ряда явлений в гео- и астрофизике [2]. В отличие от предшествующих [3-5] в настоящей работе учитывается трение жидкости не только о стенки канала, но и взаимное трение отдельных струй между собой, вызванное турбулентной вязкостью. При этом задача решается как для насосного, так и для генераторного режимов.

Схема идеализированной МГД машины показана на рис. 1. В таком устройстве жидкий металл протекает в канале кольцевого сечения, образованном двумя коаксиальными цилиндрами. Поверхности индуктора, обращенные к рабочему зазору, гладкие, на них расположена идеальная "обмотка" — бесконечно тонкий слой тока, линейная плотность которого j имеет только одну составляющую и представляет собой синусоидальную бегущую волну

$$j = A\sqrt{2} \cos(ax - \omega t).$$

Магнитная проницаемость магнитопровода принимается равной бесконечности, а удельная электрическая проводимость — нулю. Толщина проводящего слоя и его удельная электрическая проводимость принимаются постоянными, а магнитная проницаемость — равной магнитной проницаемости вакуума. Предполагается, что выполняются следующие соотношения для размеров машины:

$$\pi/\alpha = \tau \ll L, \quad \delta_h \approx \delta_m = \delta \ll \min(R, \tau),$$

где τ — длина полюсного деления, L — длина машины, δ_h — ширина гидравлического зазора, δ_m — ширина магнитного зазора между центральным и внешним магнитопроводами, R — радиус машины.

В такой постановке продольным краевым эффектом пренебрегают (поперечный краевой эффект отсутствует ввиду цилиндрической симметрии рассматриваемой машины), не учитываются высшие гармоники внешнего магнитного поля, связанные с зубчатостью рабочих поверхностей статора и дискретным распределением обмотки, и насыщение магнитопровода из-за конечного значения магнитной проницаемости электротехнической стали. Однако в отличие, например, от модели идеальной цилиндрической машины, принятой в [6], здесь уже не предполагается, что жидкометаллический "ротор" движется в рабочем зазоре как твердое тело с одинаковой во всех его точках скоростью (так называемое электродинамическое или "твердотельное"

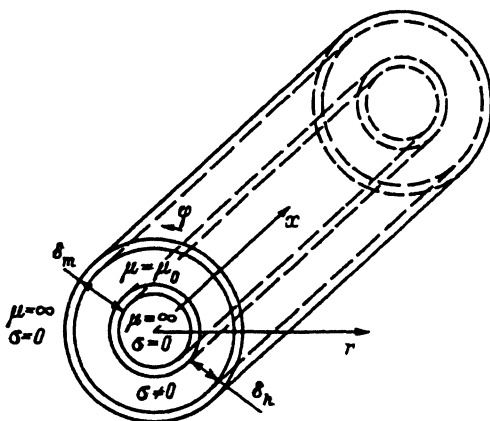


Рис. 1. Схема идеализированной МГД машины.

приближение, до сих пор широко применяющееся в расчетной практике), а предполагается учет магнитогидродинамических явлений в канале. Принятые допущения, достаточно естественные для реально существующих МГД машин, позволяют сформулировать относительно простую, доступную для изучения математическую модель течения в таком устройстве. Эта модель соответствует осреднению полной системы уравнений магнитной гидродинамики по периоду токовой нагрузки и по высоте канала. Она также может быть получена из полной системы уравнений магнитной гидродинамики асимптотическими методами математической физики [7]. После соответствующих преобразований задача записывается в виде следующей безразмерной системы нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \kappa d^2 \mathbf{b}(\varphi) / d\varphi^2 &= [1 - i\varepsilon(1 - v(\varphi))] \mathbf{b}(\varphi) + i, \\ \nu d^2 v(\varphi) / d\varphi^2 &= -\varepsilon^{-1} j^2 \operatorname{Re} \mathbf{b}(\varphi) + v^2(\varphi) \operatorname{sign}(v(\varphi)) + p \end{aligned} \quad (1)$$

с периодическими граничными условиями $\mathbf{b}(0) = \mathbf{b}(2\pi)$, $\mathbf{b}'(0) = \mathbf{b}'(2\pi)$, $v(0) = v(2\pi)$, $v'(0) = v'(2\pi)$. Здесь $\mathbf{b}(\varphi) = \mathbf{B}(\varphi)/B_0$ — относительное значение комплексной амплитуды индукции магнитного поля, где B_0 — амплитуда внешнего магнитного поля; $v(\varphi) = V(\varphi)/V_0$ — относительное значение скорости течения, где V_0 — синхронная скорость; $p = P/P_0$ — относительная величина развиваемого машиной давления, где P_0 — гидравлические потери давления при синхронном расходе; $\kappa = 1/\alpha^2 R^2$; $\varepsilon = \mu_0 \sigma \omega \delta_h / \alpha^2 \delta_m$ — магнитное число Рейнольдса; $j = \sqrt{2\mu_0^2 \sigma \omega A^2 / \lambda \rho \alpha \omega \delta}$ — безразмерный ток электропитания, где σ , ρ — соответственно проводимость и плотность рабочего тела; λ — коэффициент гидравлического сопротивления [3]; ν — приведенная гидродинамическая вязкость. Если приведенная гидродинамическая вязкость принимается отличной от нуля, то связь между давлением и скоростью течения определяется уже не конечным уравнением, как в [3-5,8], а дифференциальным. Обозначим $\operatorname{Re} \mathbf{b}(\varphi) = x_1$, $\operatorname{Im} \mathbf{b}(\varphi) = x_2$, $v = x_3$ и преобразуем исходную систему уравнений и граничные условия к виду

$$\begin{aligned} \kappa x_1'' &= x_1 + \varepsilon x_2 - \varepsilon x_2 x_3 = f_1(x_1, x_2, x_3, p, \varepsilon, j), \\ \kappa x_2'' &= x_2 - \varepsilon x_1 + \varepsilon v x_1 + 1 = f_2(x_1, x_2, x_3, p, \varepsilon, j), \\ \nu x_3'' &= -\varepsilon^{-1} j^2 x_1 + x_3 |x_3| + p = f_3(x_1, x_2, x_3, p, \varepsilon, j), \\ x_i(0) &= x_i(2\pi), \quad x_i'(0) = x_i'(2\pi), \quad i = 1 \dots 3. \end{aligned} \quad (2)$$

Точки ветвления решений

Задача состоит в нахождении решений (2), переменных по φ , в насосном и генераторном режимах. Эти решения ответвляются от не зависящего от азимута решения, получаемого из системы уравнений

$$f_i(x_1^*, x_2^*, x_3^*, p^*, \varepsilon, j) = 0, \quad i = 1 \dots 3. \quad (3)$$

Выберем давление в качестве параметра ветвления. Для определения точек ветвления введем надкритичность $\lambda = p - p^*$ и линеаризуем

системе уравнений приращений $\delta x = (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)^T$. В результате получим следующую краевую задачу:

$$\mathbf{B}\delta x = F_{01}\lambda + \sum_{i+j \geq 3} C_{i+j}^i F_{ij} \delta x \lambda^j,$$

$$\delta x(0) = \delta x(2\pi), \quad \delta x'(0) = \delta x'(2\pi). \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{B} = d^2/d\varphi^2 + \mathbf{A}$, \mathbf{A} — матрица, компоненты которой $a_{11} = 1/\kappa$, $a_{12} = \varepsilon(1 - x_3^*)/\kappa$, $a_{13} = -\varepsilon x_2^*/\kappa$, $a_{21} = -\varepsilon(1 - x_3^*)/\kappa$, $a_{22} = 1/\kappa$, $a_{23} = \varepsilon x_1^*/\kappa$, $a_{31} = j^2/\varepsilon\nu$, $a_{32} = 0$, $a_{33} = -2|x_3^*|/\nu$; $F_{i,j}$ — степенные ограниченные операторы порядка i по δx , возникающие при линеаризации. По теореме о неявных операторах [9] задача имеет единственное решение в окрестности точки $(\delta x, \lambda) = (0, 0)$, если оператор \mathbf{B} обратим. Если

$$\det(\mathbf{A} - m^2 \mathbf{E}) = 0, \quad (5)$$

то оператор \mathbf{B} необратим и однородная краевая задача

$$\mathbf{B}\delta x = d^2\delta x/d\varphi^2 + \mathbf{A}\delta x = 0, \quad \delta x(0) = \delta x(2\pi), \quad \delta x'(0) = \delta x'(2\pi) \quad (6)$$

имеет нетривиальные решения. Подставим в уравнение (5) выражение для матрицы \mathbf{A} и после простых алгебраических преобразований получим

$$2|q^*| + m^2\nu = \frac{j^2 [\varepsilon^2(1 - q^*)^2 - (1 + m^2\kappa)]}{[\varepsilon^2(1 - q^*)^2 + 1][\varepsilon^2(1 - q^*)^2 + (1 + m^2\kappa)^2]}. \quad (7)$$

При этом учитывается, что в точках ветвления x_3 совпадает с расходом q^* .

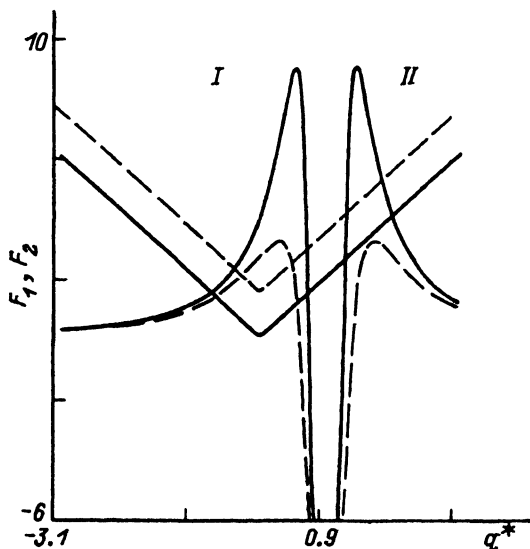


Рис. 2. Графическое решение уравнения (7) для различных значений азимутального числа m .

Сплошные кривые — $m = 1$, штриховые — $m = 3$; $j^2 = 80$, $\varepsilon = 4$, $\nu = 0.1$, $\kappa = 0.1$; I — область насосного режима, II — область генераторного режима.

Специфический V -образный вид левой части (7) делает удобным его графическое решение. На рис. 2 уравнение (7) решено графически при $\varepsilon = 4$, $\nu = 0.1$, $\kappa = 0.1$, $j^2 = 80$ для $m = 1$ и 3. Абсциссы точек пересечения графиков левой (F_1) и правой (F_2) частей уравнения (7) представляют собой его решения — они соответствуют значениям q^* в точках ветвления.

Из графика видно, что при одних и тех же величинах параметров в насосном режиме ответвляющиеся решения существуют при больших значениях m , чем в генераторном режиме. Для $m = 1$ ответвляющееся решение существует как в насосном (I), так и в генераторном режимах (II). Азимутальному числу $m = 3$ соответствует уже только одно ответвляющееся решение — в насосном режиме. Расстояние между точками ветвления, соответствующими одному ответвляющемуся решению, уменьшается с ростом m .

Во всей области изменения параметров задачи вид графиков качественно не изменяется: график правой части уравнения всегда имеет минимум при $q^* = 1$ и два положительных максимума, равных по величине $j^2 / [(z + 1)^2 (\sqrt{z} + 1)]$ в точках $q^* = 1 \pm \sqrt{z + \sqrt{z}(z + 1)} / \varepsilon$, где $z = 1 + m^2 \kappa$. Можно показать, что при $\nu = 0$ и $j \leq \varepsilon^2 + 1$ максимально возможному значению m , при котором уравнение (7) имеет решение, соответствует прохождение графика правой части (7) через точку излома левой части при $q = 0$. Отсюда при $\nu = 0$ сразу получается выражение для общего количества возможных вторичных течений $M = \text{ent}[(\varepsilon^2 - 1) / \kappa]^{1/2}$, где $\text{ent}(x)$ — целая часть x [4].

Учет приведенной вязкости поднимает график левой части уравнения (7) на величину $m^2 \nu$ и, следовательно, уменьшает максимальное значение m , при котором существуют точки пересечения. Таким образом, если учитывать трение между струями, то ответвляющиеся решения перестают существовать при меньших значениях азимутального числа m . Как видно из (7), в этом случае предельное значение m получается в результате решения кубического уравнения относительно m^2 . Так, при выбранных для рис. 2 параметрах $M = 4$.

Численный метод анализа вторичных течений

На первом этапе нелинейная система уравнений (3) и (5) численно решалась методом Ньютона как для насосного, так и для генераторного режима при выбранных значениях m и таким образом определялись координаты точки ветвления (p_m, q_m). Затем были найдены зависящие от азимута решения вдали от точки ветвления. Для этого задача (2) заменялась следующей конечноразностной аппроксимацией:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2} - \mathbf{f}_i \\ \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{x}_N \end{pmatrix} = 0, \quad (8)$$

где $i = 2, 3, \dots, n - 1$, $h = 2\pi / (N - 1)$, $\mathbf{x}_{i+1} = (x_1(ih), x_2(ih), x_3(ih))^T$, $\mathbf{f}_i = (f_1(x_i, p, \varepsilon, \kappa, j), f_2(x_i, p, \varepsilon, \kappa, j), f_3(x_i, p, \varepsilon, \nu, j))^T$.

Вблизи одной из найденных точек ветвления выбиралась заданная точность $|\lambda| = 0.001$ и по методике [10] строилось начальное приближение к решению x_i^0 , $i = 1, N$. Затем на каждой итерации методом матричной прогонки находилось решение следующей линейной системы относительно приращений Δx^n :

$$[F'(x^{n-1})] \Delta x^n = -F(x^{n-1})\tau,$$

$$x^n = x^{(n-1)} + \Delta x^n, \quad x^n = (x_{11}^n, x_{21}^n, x_{31}^n \dots x_{1i}^n, x_{2i}^n, x_{3i}^n \dots x_{1N}^n, x_{2N}^n, x_{3N}^n)^T. \quad (9)$$

Величина итерационного параметра τ вычислялась в соответствии с [11]. На начальном этапе вблизи точки ветвления переход к каждой последующей точке $p(q)$ характеристики осуществлялся заданием отрицательного приращения по p . Ответвляющиеся кривые расходонапорной характеристики имеют участки с большой кривизной. Поэтому для нахождения решений на втором этапе использовался метод продолжения по длине дуги $p(q)$ характеристики [10]. Для этого система (8) дополнялась двумя уравнениями

$$q^{(k)} - \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{v_{i+1} + v_i}{2} h = 0,$$

$$\left[(q^{(k)} - q^{(k-l)})^2 + (p^{(k)} - p^{(k-l)})^2 \right]^{1/2} - \left[(q^{(k-1)} - q^{(k-l)})^2 + (p^{(k-1)} - p^{(k-l)})^2 \right]^{1/2} = \Delta, \quad (10)$$

где $p^{(k)}$ и $q^{(k)}$ — соответственно давление и расход на шаге продолжения с номером k .

При вычислениях Δ полагалась равной 0.01, а l изменялась от 3 до 10, причем величина Δ автоматически уменьшалась при ухудшении сходимости. Два дополнительных уравнения (10) усложнили вид матрицы Якоби. При этом соответствующим образом был модифицирован процесс матричной прогонки, используемый для решения линейных систем уравнений на каждой итерации метода Ньютона.

Анализ результатов расчетов

Описанным выше алгоритмом были получены расходонапорные $p(q)$ характеристики и профили скорости вторичных течений при различных значениях параметров задачи (рис. 3, 4). Профили скорости и внешние характеристики получены как для насосного (рис. 3), так и для генераторного режима (рис. 4). Найденные внешние характеристики при каждом m соединяют две точки ветвления на $p(q)$ -характеристике, соответствующей однородному по φ течению. Как видно из графиков, и в генераторном, и в насосном режимах ответвляющиеся внешние характеристики имеют достаточно протяженный участок с малым наклоном, а при достаточно малых значениях параметра mt^2 — отрицательный наклон вблизи точек ветвления. Уменьшение параметра

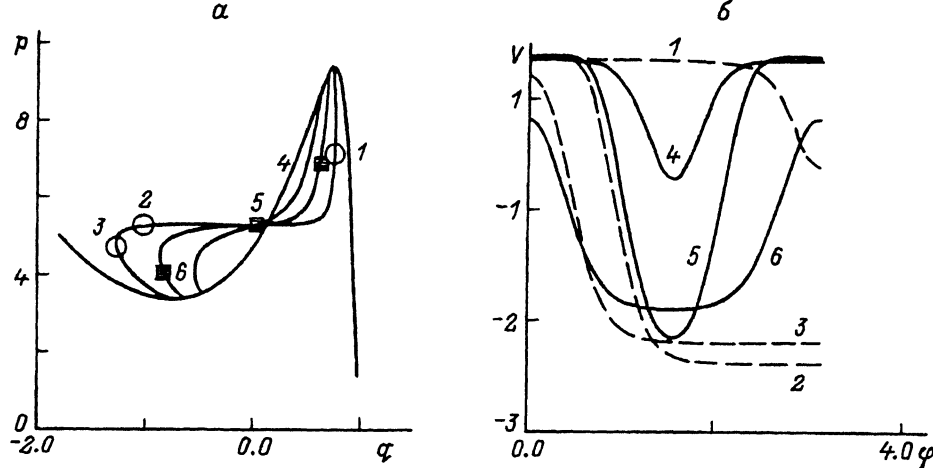


Рис. 3. Внешние характеристики (а) и профили скоростей (б) в насосном режиме для $m = 1 \dots 3$.

1-6 — на графике (б) соответствуют точкам под теми же номерами на графике (а); $j^2 = 80$, $\varepsilon = 4$, $\nu = 0.1$, $\kappa = 0.1$.

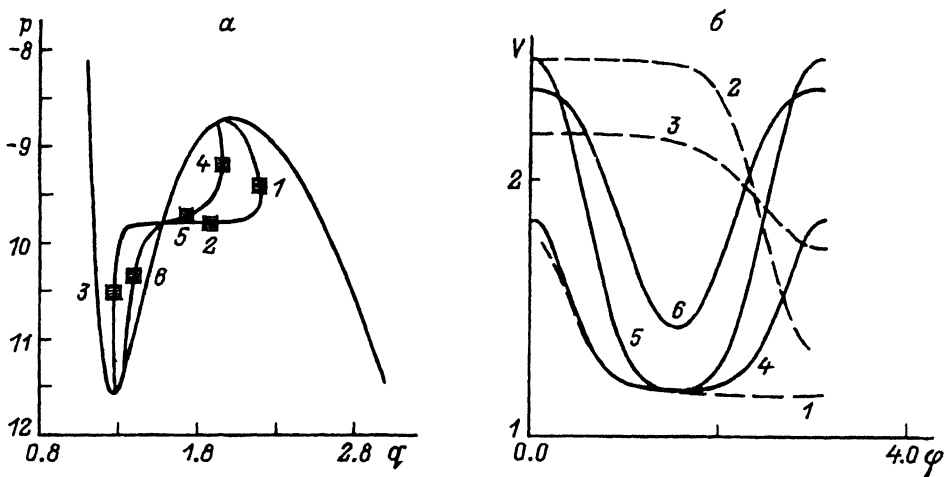


Рис. 4. Внешние характеристики (а) и профили скоростей (б) в генераторном режиме для $m = 1 \dots 2$.

1-6 — на графике (б) соответствуют точкам под теми же номерами на графике (а); $j^2 = 80$, $\varepsilon = 4$, $\nu = 0.1$, $\kappa = 0.1$.

κm^2 приводит к удлинению горизонтального участка, т.е. к увеличению области изменения расхода, где $p_c \approx \text{const}(q, m, \kappa, \nu)$. В обоих исследованных режимах профили скорости, соответствующие горизонтальному участку, имеют ярко выраженный ступенчатый характер, т.е. состоят из протяженных по азимуту областей, где скорость не зависит от φ и узких участков "переключения" значения скорости с одной константы на другую (рис. 3, 4). Таким образом, характер $p(q)$ зависимости в генераторном режиме имеет те же особенности, что и в насосном. Однако, как видно из рис. 2, область изменения q^* , в которой существуют ответвляющиеся решения, в генераторном режиме меньше, чем в насосном при одних и тех же параметрах.

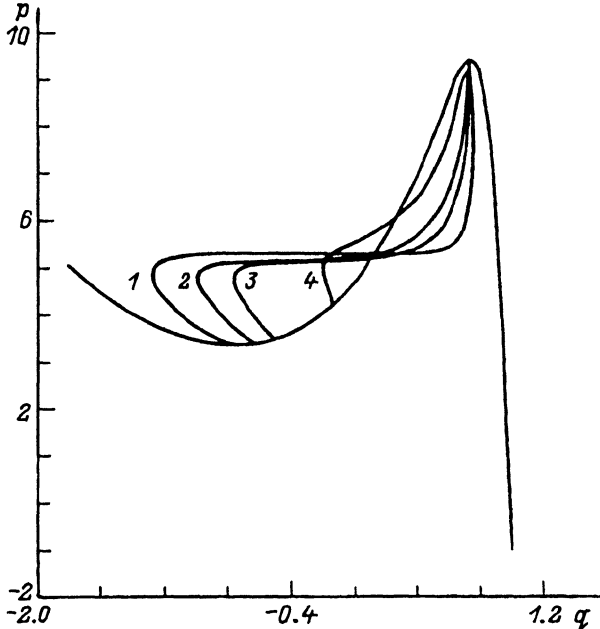


Рис. 5. Расходонапорные характеристики при различных значениях ν .
 ν : 1 — 0.1, 2 — 0.5, 3 — 1, 4 — 3; $j^2 = 80$, $\epsilon = 4$, $\kappa = 0.1$.

На рис. 5 показаны $p(q)$ характеристики ответвляющихся решений при различных значениях параметра ν . Увеличение приведенной вязкости приводит к уменьшению и затем к исчезновению горизонтального участка $p(q)$ характеристики. Учет трения между струями при достаточно малых ν качественно не меняет вида интегральных характеристик вторичных течений, однако, как показывает уравнение (7), приводит к уменьшению числа ответвляющихся решений. Путем численного исследования нестационарной задачи, соответствующей (1), по методике [5] было показано, что при учете трения между струями однородное течение, так же как в [5], теряет устойчивость в точках ветвления, соответствующих $m = 1$. В то же время найденные ответвляющиеся вторичные течения являются устойчивыми как в насосном, так и в генераторном режимах.

Заключение

Проведенный анализ выявил важное общее свойство внешних характеристик вторичных течений — наличие на них горизонтального “плато”, т. е. протяженного по расходу участка, на котором МГД машина работает как “идеальный источник” давления. Ранее этот феномен наблюдался без учета трения между струями в насосном режиме [4,8]. В дальнейшем представляет особый интерес исследование причин возникновения такого участка на внешних характеристиках вторичных течений и определение зависимости величины характерного значения давления на “плато” p_c от параметров машины.

Формулировка и анализ соответствующей двумерной модели МГД течения, учитывающей азимутальную составляющую скорости и способной описать развитие течения по длине машины, также является очередной требующей решения задачей.

Список литературы

- [1] Глузик В.А., Тананаев А.В., Кириллов И.Р. Магнитная гидродинамика в ядерной энергетике. М.: Энергоатомиздат, 1987. 264 с.
 - [2] Валдманис Я.Я. // Магнитная гидродинамика. 1983. № 2. С. 21–24.
 - [3] Гайлитис А., Лиелаусис О. // Магнитная гидродинамика. 1975. № 1. С. 87–101.
 - [4] Половко Ю.А., Тропп Э.А. // Магнитная гидродинамика. 1986. № 4. С. 106–113.
 - [5] Половко Ю.А. // Магнитная гидродинамика. 1989. № 3. С. 81–88.
 - [6] Лиелпетер Я.Я. Жидкометаллические индукционные МГД машины. Рига: Зинатне, 1963. 246 с.
 - [7] Тропп Э.А. // Вопросы математической физики. Л.: Наука, 1976. С. 282–292.
 - [8] Половко Ю.А., Тропп Э.А. // Материалы Междунар. конф. по энергопереносу в магнитогидродинамических потоках. Кадараш (Франция), 1991. С. 73–78.
 - [9] Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 528 с.
 - [10] Keller H.B., Langford W.F. // Arch. Rat. Mech. Anal. 1972. Vol. 48. P. 83–108.
 - [11] Половко Ю.А. // Вычислительные методы и математическое моделирование. М.: Знание, 1984. С. 51–52.
-