

01;02

©1995 г.

ИОНИЗАЦИОННЫЕ ПОТЕРИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ МНОГОЗАРЯДНЫХ ИОНОВ

В.И.Матвеев, С.Г.Толманов

Отдел теплофизики АН Республики Узбекистан,
700135, Ташкент, Узбекистан
(Поступило в Редакцию 7 сентября 1994 г.)

Рассматриваются потери энергии при столкновениях тяжелых многозарядных ионов с легкими атомами при зарядах ионов $Z \gg 1$ и относительных скоростях столкновений $v \gg 1$, таких что $Z \sim v \leq c$, где c — скорость света (атомные единицы), а также поляризационные потери при движении тяжелых релятивистских ионов в веществе. В этой области параметров борновское приближение, строго говоря, не применимо. Получены простые формулы для эффективного торможения, проведено сравнение с эффективным торможением, рассчитанным в борновском приближении. Показано, что при $Z/v \sim 1$ борновское приближение систематически завышает потери энергии.

Введение

Обычно для расчетов ионизационных потерь при столкновениях релятивистских заряженных частиц с атомами используют борновское приближение [1, §82], область применимости которого требует выполнения неравенства $Z/v \ll 1$, где Z — заряд налетающей частицы, v — относительная скорость столкновения (здесь и ниже используются атомные единицы). Однако в последнее время выполнено много экспериментов, в которых исследуются неупругие столкновения атомов с ионами настолько больших зарядов, что для них область применимости борновского приближения не достигается даже при $v \sim c$ — скорости света, так что часто оказывается $Z/v \sim 1$ (см., например, [2-4] и указанные там ссылки). Использование же применимых при $Z/v \sim 1$ приближений — эйконоального и его модификаций [5,6], внезапных возмущений [7-10], а также метода классических траекторий [11] приводит при расчетах сечений неупругих процессов к значительному численному счету даже в нерелятивистской области скоростей столкновений. Расчеты тем более усложняются при распространении на релятивистскую область [10].

В настоящей работе на основе простого подхода [12] и его обобщения на случай релятивистских столкновений [13] рассмотрены потери энергии тяжелых релятивистских многозарядных ионов при столкновениях с легкими (нерелятивистскими) атомами при $Z \sim v \leq c$ ($Z \gg 1$, $v \gg 1$, $c \approx 137$), а также поляризационные потери при движении тяжелых релятивистских многозарядных ионов в веществе, получены простые формулы, описывающие эффективное торможение.

Столкновения с отдельными атомами

Согласно [14, §49], средние потери энергии при столкновениях характеризуются эффективным торможением

$$\kappa = \sum_n (\varepsilon_n - \varepsilon_0) \sigma_n, \quad (1)$$

где ε_n и ε_0 — энергии возбужденного $|n\rangle$ и основного $|0\rangle$ состояний атома, σ_n — сечение возбуждения состояния $|n\rangle$.

Рассмотрим сначала для простоты столкновение релятивистского многозарядного иона с атомом водорода.

Согласно [12, 13], весь интервал $0 \leq b < \infty$ возможных значений параметра удара b можно разбить на три области:

$$A) 0 \leq b \leq b_1; \quad B) b_1 \leq b \leq b_0; \quad C) b_0 \leq b \leq \infty, \quad (2)$$

соответствующие малым, средним и большим параметрам удара. Значения границ областей, согласно [13], $b_1 \sim 1$, $b_0 \sim v/\sqrt{1-\beta^2}$; $\beta = v/c$.

Мы вычислим κ в каждой из областей (2) и получим полное эффективное торможение, сложив вклады от каждой области. При этом точные значения границ для нас несущественны, поскольку зависимость κ в каждой области от параметров b_1 и b_0 оказывается логарифмической, что приводит к корректной сшивке вкладов от смежных областей и выпадению в окончательном ответе зависимости κ от параметров сшивки b_1 и b_0 .

Область малых параметров удара — область больших передач импульса, и мы, следуя [1, §82], будем пренебрегать связью электрона в атоме и считать, что происходит упругое рассеяние многозарядного иона на первоначально покоившемся электроне. Тогда эффективное торможение выражается через $\sigma(\varepsilon)$ — сечение передачи энергии ε

$$\kappa = \int_{\varepsilon_{\min}}^{\varepsilon_{\max}} \varepsilon \sigma(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (3)$$

только в отличие от [1], где предполагается $Z/v \ll 1$, мы не можем подставить $\sigma(\varepsilon)$ в борновском приближении, так как в нашем случае возможно $Z/v \sim 1$. Далее, как и в [1], мы будем считать налетающий ион бесконечно тяжелой частицей, не меняющей своего движения при столкновении. Тогда сечение рассеяния первоначально покоящегося электрона на двигающемся с постоянной скоростью ионе можно получить при помощи преобразования к системе, где двигающийся

электрон рассеивается на неподвижном ионе. Соответствующий угол рассеяния обозначим через θ . Согласно [1], можно считать (исключая область сверхвысоких энергий), что потеря энергии $\varepsilon = \varepsilon(\theta)$ и

$$\varepsilon(\theta) = \frac{2v^2}{(1-\beta^2)} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (4)$$

а значения ε_{\max} и ε_{\min} достигаются при $\theta = \pi$ и $\theta = \theta_{\min}$ соответственно. В результате формулу (3) можно переписать в виде

$$\kappa = 2\pi \frac{Z^2}{v^2} \int_{\theta_{\min}}^{\pi} \frac{\sigma(\theta)}{\sigma_R(\theta)} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta, \quad (5)$$

где $\sigma(\theta)$ — сечение раасеяния электрона на неподвижном ионе заряда Z при произвольной скорости электрона v , полученное [15, §11] в результате точного решения задачи рассеяния для уравнения Дирака, $\sigma_R(\theta)$ — сечение Резерфорда

$$\sigma_R = \frac{Z^2}{c^4} \frac{(1-\beta^2)}{\beta^4} \frac{1}{(1-\cos\theta)^2}. \quad (6)$$

Согласно [15, 16], при $\theta \rightarrow 0$ отношение точного сечения к сечению Резерфорда $\sigma(\theta)/\sigma_R(\theta) \rightarrow 1$, поэтому для определения угла рассеяния θ_{\min} мы можем воспользоваться квазиклассической связью (задача к § 39 в работе [17]) угла рассеяния с параметром удара (см. также наглядную качественную картину столкновения, предложенную в [12] при $b > b_1$)

$$\theta_{\min} = \frac{2Z}{v^2 b_1} \sqrt{1-\beta^2}. \quad (7)$$

Далее нетрудно убедиться, что при малых θ_{\min} интеграл (5) зависит от угла θ_{\min} логарифмически, поэтому (5) можно представить в виде

$$\kappa = 4\pi \frac{Z^2}{v^2} \ln \left[\frac{v^2}{Z\sqrt{1-\beta^2} a(Z, v)} b_1 \right], \quad (8)$$

где функция $a(Z, v)$ определяется нами из сравнения (8) с результатами численных расчетов по формуле (5), которые выполнены с использованием значений $\sigma(\theta)$ из работы [16]. В результате $a(Z, v)$ можно аппроксимировать формулой

$$a(Z, v) = [-0.23016 \cdot \alpha - (1.00832 \cdot \alpha - 0.32388)\beta^2 + 1]^2, \quad (9)$$

где $\alpha = Z/c$.

Для подтверждения аппроксимации (9) в табл. 1 и 2 приведены значения эффективного торможения, рассчитанные (при $b_1 = 1$) по формуле (5) (табл. 1) и по формуле (8) (табл. 2) с использованием $a(Z, v)$

Таблица 1. Эффективное торможение, результат численного интегрирования по формуле (5) с использованием σ/σ_R из [16]

Энергия иона МэВ/нукл.	Заряды ионов					
	6	13	29	50	82	92
91.8	0.894	3.714	16.247	44.368	110.067	135.497
183.6	0.554	2.333	10.411	29.185	75.125	93.469
367.2	0.372	1.580	7.160	20.452	53.402	68.540
734.4	0.280	1.200	5.495	15.893	43.418	55.109
1285.2	0.245	1.056	4.872	14.181	39.220	49.993
1836	0.235	1.015	4.697	13.705	38.063	48.618
3672	0.231	1.003	4.670	13.671	38.079	48.701
7344	0.229	1.043	4.879	14.310	40.246	50.941
18360	0.257	1.129	5.311	15.595	43.308	55.302

Таблица 2. Эффективное торможение по формуле (8) с использованием функции $a(Z, v)$, определенной в (9)

Энергия иона МэВ/нукл.	Заряды ионов					
	6	13	29	50	82	92
91.8	0.891	3.697	16.056	43.666	110.134	137.246
183.6	0.552	2.319	10.268	28.454	73.567	92.369
367.2	0.370	1.570	7.066	19.922	52.838	66.916
734.4	0.278	1.192	5.439	15.559	42.255	53.985
1285.2	0.244	1.051	4.834	13.951	38.430	49.379
1836	0.234	1.010	4.666	13.520	37.462	48.252
3672	0.230	0.999	4.647	13.529	37.685	48.636
7344	0.238	1.040	4.860	14.185	39.523	50.991
18360	0.256	1.125	5.291	15.475	43.018	55.405

из (9): 1-й столбец — энергия многозарядного иона (в МэВ/нуклон), соответствующая относительным скоростям, для которых приведены данные [16]; остальные столбцы — значения κ (в ат.ед.) для зарядов иона 6, 13, 29, 50, 82, 92 соответственно. Как видно из таблиц, предложенная аппроксимация достаточно хороша во всяком случае в пределах изменения Z и v , для которых приведены данные работы [16]. Отметим также, что в нерелятивистском пределе $\beta \rightarrow 0$ и при $\alpha \rightarrow 0$, согласно (9), $a(Z, v) \rightarrow 1$, в соответствии с тем фактом, что $\sigma/\sigma_R \rightarrow 1$ при $\beta \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$.

Область средних значений параметров удара $b_1 \leq b \leq b_0$ — область средних передач импульса, вносящая [12,13] основной вклад в сечения неупругих процессов. В этой области передаваемая энергия $\varepsilon \leq I \sim 1$, где I — потенциал ионизации атома водорода, и вклады от этой области не могут быть учтены по теории возмущений [7,9,12,13]. Отметим также, что в этой области электрон атома водорода до и после столкновения остается нерелятивистским [13]. Вклад от этой области в эф-

эффективное торможение легко может быть получено из формулы (1) путем подстановки сечения неупругих процессов [13]

$$\sigma_n = \int_{b_1}^{b_0} 2\pi b |\langle n | e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} | 0 \rangle|^2 db, \quad \mathbf{q} = \frac{2Z}{vb^2} \mathbf{b}, \quad (10)$$

где \mathbf{b} — вектор параметра удара, с дальнейшим повторением выкладок [14, с. 721] (с упрощением, обусловленным тем, что верхний предел интегрирования в (10) не зависит от конечного состояния атома)

$$\kappa = \sum_n (\varepsilon_n - \varepsilon_0) \sigma_n (b_1 \leq b \leq b_0) = 4\pi \frac{Z^2}{v^2} \ln(q_1/q_0), \quad (11)$$

где $q_0 = 2Z/vb_0$, $q_1 = 2Z/vb_1$.

Область больших параметров удара $b_0 \leq b < \infty$. В этой области параметров удара взаимодействие налетающего иона с атомом может быть учтено по теории возмущений [7, 12, 13]. Соответствующую амплитуду перехода атома из состояния $|0\rangle$ в состояние $|n\rangle$ получим, следуя [18],

$$A_n = 2i \frac{Z}{v^2} \Omega_n \mathbf{r}_{0n} \left[i \frac{\mathbf{v}}{v} (1 - \beta^2) K_0(\eta) + \frac{\mathbf{b}}{b} \sqrt{1 - \beta^2} K_1(\eta) \right], \quad (12)$$

где $\Omega_n = \varepsilon_n - \varepsilon_0$; $\eta = (\Omega_n/v)b\sqrt{1 - \beta^2}$; $K_0(\eta)$, $K_1(\eta)$ — функции Макдональда; $\mathbf{r}_{0n} = \langle 0 | \mathbf{r} | n \rangle$.

Сечение, соответствующее (12), $\sigma_n (b_0 \leq b < \infty) = \int d^2b |A_n|^2$ получается интегрированием по параметру удара \mathbf{b} : угол вектора \mathbf{b} меняется от 0 до 2π и $b_0 \leq b \leq \infty$. В результате получим¹

$$\sigma_n = 4\pi \frac{Z^2}{v^2} |x_{0n}|^2 \left\{ \ln \frac{4v^2}{\delta^2 b_0^2 \Omega_n^2 (1 - \beta^2)} - \beta^2 \right\}, \quad (13)$$

где $\delta = e^B = 1.781$ ($B = 0.5772$ — постоянная Эйлера), $x_{0n} \equiv \langle n | x | 0 \rangle$.

Вклад в эффективное торможение от этой области, стабильно получаем подстановкой (13) в (1)

$$\kappa = 4\pi \frac{Z^2}{v^2} \left[\ln \frac{2v}{\delta b_0 \sqrt{1 - \beta^2} I} - \frac{\beta^2}{2} \right], \quad (14)$$

где следуя [1, §82], мы ввели “среднюю атомную энергию” I , такую что

$$\ln I = \frac{\sum_n (\varepsilon_n - \varepsilon_0) |x_{0n}|^2 \ln(\varepsilon_n - \varepsilon_0)}{\sum_n (\varepsilon_n - \varepsilon_0) |x_{0n}|^2}. \quad (15)$$

¹ Строго говоря, формула (13) получена в предположении, что $\eta = \Omega_n b (1 - \beta^2)^{1/2} / v \ll 1$ (где $\Omega_n \sim 1$), тогда $b \ll v / (1 - \beta^2)^{1/2} \sim b_0$, так что последующая сшивка может быть проведена именно при таких b .

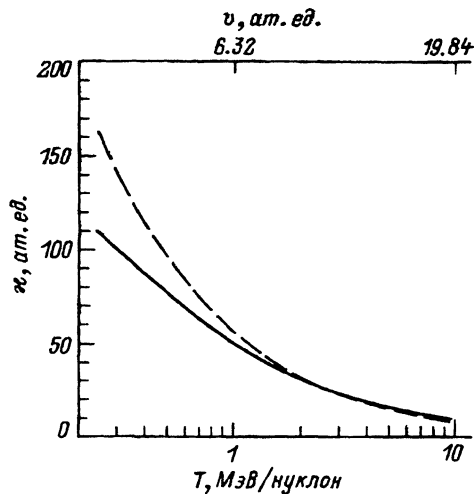


Рис. 1. Эффективное торможение κ (в ат. ед.) в зависимости от энергии налетающего иона T (в МэВ/нукл.) для иона заряда $Z = 6$.

На верхней горизонтальной шкале для удобства отмечено несколько значений скорости иона (в ат. ед.); сплошная линия — наш расчет по формуле (10), штриховая — борновское приближение, формула (17).

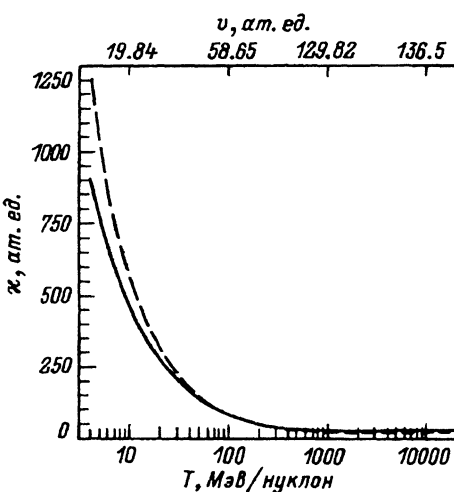


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, для иона заряда $Z = 50$.

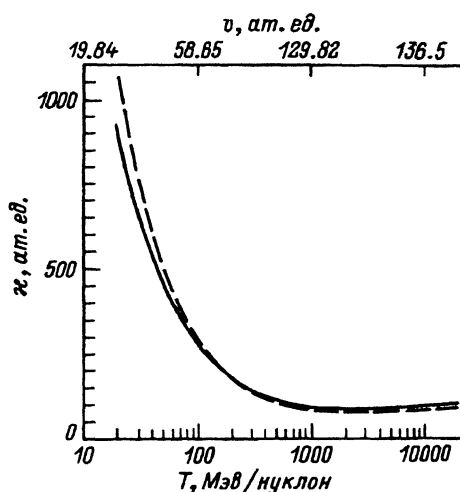


Рис. 3. То же, что и на рис. 1, для иона заряда $Z = 92$.

Полное эффективное торможение релятивистского многозарядного иона на атоме водорода получаем, складывая (14), (11) и (8),

$$\kappa = 4\pi \frac{Z^2}{v^2} \left[\ln \frac{2v^3}{\delta I Z (1 - \beta^2) a(Z, v)} - \frac{\beta^2}{2} \right]. \quad (16)$$

Приведем для сравнения значение κ из [1, 82], вычисленное в борновском приближении

$$\kappa_B = 4\pi \frac{Z^2}{v^2} \left[\ln \frac{2v^2}{I(1 - \beta^2)} - \beta^2 \right]. \quad (17)$$

На рис. 1–3 приведены значения эффективного торможения для $Z = 6, 50, 92$ соответственно: сплошная линия — наш расчет (формула (16)), штриховая — борновское приближение (формула (17)). Как

видно из рисунков, борновское приближение систематически завышает значения κ в области $v \leq Z$, тогда как при больших энергиях различие несущественно.

Отметим, что нерелятивистский предел для ионизационных потерь (16) (учитывая, что $a(Z, v) \rightarrow 1$ при $\beta \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow 0$)

$$\kappa = 4\pi \frac{Z^2}{v^2} \ln \frac{2v^3}{I\delta Z}$$

имеет вид, аналогичный известной формуле Бора [19, № 4], полученной на основе классических представлений. Кроме того, подчеркнем, что наши результаты (16), полученные на основе подхода [12, 13], справедливого только при $Z \sim v \gg 1$, не допускают перехода (как и формула Бора) к борновскому приближению, справедливому при $v/Z \ll 1$.

Как следует из нашего вывода формулы (16), ее обобщение, так же как и обобщение борновских потерь (17), на случай столкновений релятивистских многозарядных ионов со сложными атомами (для которых характерная скорость атомных электронов $v_a \ll v$ — относительной скорости столкновения) получается умножением правой части (16) на Z_a — число атомных электронов с заменой I на средний атомный потенциал I_a , по-прежнему определяемый по формуле (15) с $\varepsilon_n, \varepsilon_0$ и $|x_{0n}|^2$, вычисленными для сложного атома,

$$\kappa = 4\pi \frac{Z^2}{v^2} Z_a \left[\ln \frac{2v^3}{\delta I_a Z (1 - \beta^2) a(Z, v)} - \frac{\beta^2}{2} \right]. \quad (18)$$

Потери энергии в веществе

Рассмотрим теперь потери энергии релятивистского многозарядного иона при его движении в среде, представляющие собой сумму макроскопических (поляризационных) потерь и потерь энергии при столкновениях с отдельными атомами. При этом скорость иона предполагается много большей характерных скоростей атомных электронов (или по крайней мере большинства из них). Согласно Ферми [20, № 85], поляризационные потери при движении заряженной частицы в среде определяются потоком вектора Пойтинга через цилиндр радиуса b'_0 , построенный вокруг траектории частицы. Потери энергии на единицу длины или эффективное торможение получается после деления потока на скорость частицы

$$\kappa = \frac{Z^2 b}{\pi v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega K_0(b'_0 \xi) K_1(b'_0 \xi^*) \left\{ \frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right\} \xi^* i\omega, \quad (19)$$

где $\xi^2 = \omega^2(v^{-2} - c^{-2}\varepsilon(\omega))$, $\varepsilon(\omega)$ — диэлектрическая проницаемость.

При достаточно малых радиусах цилиндра b'_0 , т. е. при

$$|b'_0 \xi| \ll 1 \quad (20)$$

имеем

$$\kappa = \frac{iZ^2 b}{\pi v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \ln \frac{2}{\delta b'_0 \xi} \left\{ \frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right\} \omega, \quad (21)$$

где, как и в (13), $\delta = 1.781$.

С другой стороны, согласно Ландау [21], потери энергии могут быть рассчитаны как работа поля на единицу длины пути

$$\kappa = \frac{iZ^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{q_0} \frac{(v^{-2} - \varepsilon(\omega)c^{-2})}{\varepsilon(\omega)[q^2 + \xi^2]} \omega q dq d\omega. \quad (22)$$

Формулы (21) и (22) совпадают при выполнении условия (20) и при $q_0 = 2/(\delta b'_0)$ действительно,

$$\ln \frac{2}{\delta b'_0 \xi} \approx \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2^2}{\delta^2 b_0'^2 \xi^2} + 1 \right) = \int_0^{q_0} \frac{q dq}{q^2 + \xi^2}.$$

Далее обычно отдельно рассматриваются два случая: $v^2 < c^2/\varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$ — диэлектрическая проницаемость в статическом поле, и $v^2 > c^2/\varepsilon_0$. В первом случае [21]

$$\kappa = \frac{4\pi N Z^2}{v^2} \left[\ln \frac{q_0 v}{\bar{\omega}(1 - \beta^2)^{1/2}} - \frac{\beta^2}{2} \right], \quad q_0 = 2/(\delta b'_0), \quad (23)$$

где, как и в [21], $\bar{\omega}$ — среднее значение частоты движения атомных электронов

$$\bar{\omega} = \int_0^{\infty} \omega \eta''(\omega) \ln \omega d\omega / \int_0^{\infty} \omega \eta''(\omega) d\omega,$$

где $\eta''(\omega) = \text{Im}(\varepsilon^{-1}(\omega))$.

Во втором случае ($v^2 > c^2/\varepsilon_0$) для частиц не слишком больших энергий (энергия движения \leq энергии покоя иона) обычно используют ту же формулу (23). Тогда как в ультрарелятивистском случае [21]

$$\kappa = \frac{2\pi N Z^2}{c^2} \ln \frac{c^2 q_0^2}{4\pi N}. \quad (24)$$

Далее следует “сшить” макроскопические потери с потерями энергии на отдельных атомах, для этого перепишем условие (20) так:

$$b'_0 \ll v/|\omega(1 - \beta^2 \varepsilon)^{1/2}| < v/(1 - \beta^2)^{1/2} \simeq b_0,$$

где для оценок положено $\omega \simeq \omega_{\text{ат}} \sim 1$ ($\omega_{\text{ат}}$ — характерная атомная частота).

Условие применимости макроскопического подхода имеет вид $b'_0 \gg b_1 \sim 1$ — характерного атомного размера. Таким образом, нижняя граница b'_0 находится в пределах b_1 и b_0

$$b_1 \ll b'_0 \ll b_0. \quad (25)$$

Сравнивая это условие с условиями (2), приходим к выводу, что для получения полных потерь при движении релятивистского многозарядного иона в среде следует сложить вклады от областей A и B из (2) (причем в области B верхний предел равен b'_0) с поляризационными потерями. Сумма вкладов от областей A и B , согласно (8) и (11), равна

$$\kappa = 4\pi \frac{Z^2}{v^2} N \ln \left[\frac{v^2}{Z(1-\beta^2)^{1/2} a(Z, v)} b'_0 \right], \quad (26)$$

где мы заменили число атомных электронов Z_a на число электронов в единице объема N , как принято в [21].

Складывая (23) и (26), получим полные потери энергии релятивистского многозарядного иона в веществе в случае $v^2 < c^2/\varepsilon_0$

$$\kappa = 4\pi \frac{Z^2}{v^2} N \left[\ln \frac{2v^3}{Z\delta\bar{\omega}(Z, v)(1-\beta^2)} - \frac{v^2}{2c^2} \right]. \quad (27)$$

Как уже говорилось, эта формула применяется чисто и для случая $v^2 > c^2/\varepsilon_0$ и не слишком быстрых частиц. Отметим, что формула (22) отличается от формулы (18) (особенности поведения которой приведены на рис. 1–3), описывающей потери на отдельных атомах, лишь заменой среднего потенциала I_a на $\bar{\omega}$ (ср. аналогичную ситуацию в [21]).

В ультрарелятивистском случае, действуя аналогично, получаем полное эффективное торможение в виде

$$\kappa = 2\pi \frac{Z^2}{c^2} N \left[\ln \frac{4c^6}{Z^2(1-\beta^2)a^2(Z, c)4\pi N\delta^2} - \frac{1}{2} \right]. \quad (28)$$

Таким образом, в ультрарелятивистском случае учет поляризационных потерь приводит к более медленному росту эффективного торможения с ростом скорости по сравнению с потерями на отдельных атомах (18).

Заключение

Предложенный в работах [12,13] простой подход позволяет проделать оценки эффективного торможения релятивистских высокозарядных ионов при столкновении с отдельными атомами и при движении в веществе для всех практически важных случаев. Поскольку полученные в настоящей работе формулы для эффективного торможения позволяют воспользоваться широко распространенной методикой (см., например, [22,§13;23]) введения феноменологических поправок, обычно используемой в прикладных расчетах.

- [1] Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989. 704 с.
- [2] Kelch S., Ullrich J., Rauch W. et al. // J. Phys. B. 1986. Vol. 19. N 2. P. L47-L52.
- [3] Ullrich J., Horbatsch M., Dansdorf V. et al. // J. Phys. B. 1988. Vol. 21. P. 611.
- [4] Berg H., Ullrich J., Benstein E. et al. // J. Phys. B. 1992. Vol. 25. N 17. P. 3655-3670.
- [5] McGuire J.H. // Phys. Rev. A. 1982. Vol. 26. N 1. P. 143-147.
- [6] Crothers D.S.F., McCann J.H. // J. Phys. B. 1983. Vol. 16. N 17. P. 3329-3342.
- [7] Eichler J.H. // Phys. Rev. A. 1977. Vol. 15. N 5. P. 1856-1862.
- [8] Salop A., Eichler J.H. // J. Phys. B. 1979. Vol. 12. N 2. P. 257-264.
- [9] Юдин Г.Л. // ЖЭТФ. 1981. Т. 80. Вып. 3. С. 1026-1037.
- [10] Yudin G.L. // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 44. N 11. P. 7355-7360.
- [11] Reinhold C.O., Olson R.E., Fritsch W. // Phys. Rev. A. 1990. Vol. 41. N 9. P. 4837-4842.
- [12] Матвеев В.И. // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. Вып. 12. С. 2021-2026.
- [13] Матвеев В.И., Мусатов М.М. // ЖЭТФ. 1994. Т. 105. Вып. 2. С. 280-287.
- [14] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. М.: Наука, 1989. 767 с.
- [15] Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1969. 623 с.
- [16] Doggett J.A., Spenser L.V. // Phys. Rev. 1956. Vol. 103. N 6. P. 1597-1601.
- [17] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1967. 509 с.
- [18] Moisewitsch B.L. // Phys. Rep. 1985. Vol. 118. N 3. P. 133-177.
- [19] Бор Н. Избранные тр. Т. 1. М.: Наука, 1970.
- [20] Ферми Э. Науч. тр. Т. 11. М.: Наука, 1972.
- [21] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
- [22] Ремизович В.С., Rogozhin D.P., Ryzanov M.I. Флуктуации пробегов заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 1988. 240 с.
- [23] Далгарно А. Пробеги и потери энергии // Атомные и молекулярные процессы / Под ред. Д. Бейтса. М.: Мир, 1964. Гл. 15.
-