

03; 04

©1995 г.

ВИХРИ В ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ И ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Г. В. Иваненков

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН,
117924, Москва, Россия
(Поступило в Редакцию 25 августа 1994 г.)

Рассматриваются две родственные задачи о вихрях: на фоне плоскопараллельного течения вращающегося тонкого слоя жидкости с малым наклоном дна и в слабонеоднородной бесстолкновительной плазме с током. Решение дается в классе линейных зависимостей потенциального вихря от функции тока. Изучается порожденная наклоном дна (градиентом плотности ионов) связь монополярных и дипольных мод в зависимости от интенсивности и влияние профиля скорости потока на перемещение вихря.

Вихри, возникающие в жидкости и плазме в природных, лабораторных и технических условиях, со времен Гельмгольца привлекают исследователей. Ныне популярны стационарные уединенные вихри — солитоноподобные дефекты пространственной структуры течений. Таков плоский вихрь-монополь Кельвина [1] — вращение воды с завихренностью, постоянной в ядре и нулевой на периферии, $v_\varphi = \omega_i r/2$ при $r < r_*$ и $= \omega_i r_*^2/2r$ при $r > r_*$ (в пределе $\omega_i \rightarrow \infty$, $\pi\omega_i r_*^2 < \infty$ он переходит в точечный вихрь Гельмгольца). Другой тип — квазиплоский диполь Ларичева-Резника во вращающемся слое жидкости [2]. Современные обзоры этих явлений, включая астро- и геофизический аспекты, даны в [3]; связь с двумерными солитонами обсуждается в [4]. Вихри типа гидродинамических важны и в сложной динамике различных плазменных устройств, таких как Z-пинч или плазмоэрозионный коммутатор. В замагниченной плазме это дрейфовые [5] и электронные вихри [6].

Обычное рассмотрение вихрей на однородном фоне покоя среды не всегда правомерно — уже их рождение обязано неустойчивости течения. В нашей задаче фоном взят плоскопараллельный поток мелкой воды (ток той же симметрии в плазме), а малый наклон дна (градиент плотности) не только имитирует β -эффект неоднородности вращения, но и создает связь монополярных и дипольных мод. Предмет работы составляет анализ этих явлений, включая эволюцию состава мод с вариацией интенсивности и влияние профиля скорости течения на дрейф

вихря. Сюда же ведет и изучение плоских вихрей в слабонеоднородной плазме с током замагниченных электронов. Лучшее восприятие явлений механики позволяет выбрать гидродинамический вариант изложения.

1. Формулировка задачи

Рассмотрим стационарный уединенный вихрь в равномерно крутящейся мелкой воде. Систему отсчета скоростей $v = \{v_x, v_y, 0\}$ свяжем с его центром, единицей длины выберем его радиус r_* , а времени — обратное значение параметра Кориолиса ω_C (двойная проекция угловой скорости вращения на нормаль к поверхности). Глубину $D(y)$ примем монотонной по оси OY поперек течения $u(y)$ вдоль OX (зависимость $D(x, y)$ закрепила бы вихрь относительно дна). Описывающий это изменение параметр $\varepsilon = D'_0 r_*/2D_0$ (индекс 0 относится к центру) предположим малым.

Крупные вихри Россби ($v \ll \omega_C r_*$ и $\zeta \ll (\omega_C r_*)^2/g$) отвечают геострофическому приближению $v^2/r_* \ll g\zeta \approx \omega_C v$. В примыкающей области $v^2/r_* \approx g\zeta \approx \omega_C v$ при $v \approx \omega_C r_*$ и $\zeta \approx (\omega_C r_*)^2/g \ll D_0 \varepsilon$ масштабы малых вихрей $v < \varepsilon^{1/2} c_0$ и $r_* < \varepsilon^{1/2} R$ заметно уступают скорости длинных волн $c_0 = (gD_0)^{1/2}$ и радиусу Обухова $R = c_0/\omega_C$. Рассмотрим здесь “газодинамические” уравнения вращающейся мелкой воды

$$\nabla(v^2/2 + g\zeta) = v \times (f + \text{rot } v), \quad \text{div}(\mu v) = 0, \quad \mu = (D + \zeta)/D_0,$$

где $f = \{0, 0, 1\}$ — вектор Кориолиса; ζ — смещение уровня от равновесия.

Их лагранжевы инварианты $v \cdot \nabla I = 0$ (сохраняющиеся вдоль траекторий частиц интегралы Бернулли и Эртеля) запишем в виде

$$(\nabla\Psi)^2/2\mu^2 + g(D_0\mu - D) = gh(\Psi), \quad \Delta\Psi - \mu^{-1}\nabla\mu \cdot \nabla\Psi + \mu = \mu^2\Omega(\Psi),$$

введя функцию тока $\mu v = f \times \nabla\Psi$ и потенциальный вихрь $\Omega(\Psi) = (1 + \text{rot}_z v)/\mu = gh'(\Psi)$. Выражая μ из интеграла Бернулли, учтем, что в нашей области $\zeta/D_0 \approx (\nabla\Psi)^2/gD_0 \approx (r_*/R)^2 \ll \varepsilon$ и пренебрежем “сжимаемостью” $\mu \approx D/D_0 \equiv \bar{\mu}(\varepsilon y)$. Заменив в интервале Эртеля μ на $\bar{\mu}$ и перейдя к новой переменной $\psi = \Psi\bar{\mu}^{-1/2}$, получим уравнение

$$\Delta\psi - \varepsilon^2[(\bar{\mu}'/2\bar{\mu})^2 - \bar{\mu}''/2\bar{\mu}]\psi = \bar{\mu}^{3/2}\Omega(\psi\bar{\mu}^{1/2}) - \bar{\mu}^{1/2}.$$

Затем, представляя $\bar{\mu}(\varepsilon y) = 1 + 2\varepsilon y + \dots$, $\Omega(\Psi) = \Omega_* + \Omega'_* \Psi$ и опуская члены разложения старше ε , перепишем его в виде

$$\Delta\psi - \Omega'_* \psi = \Omega_* - 1 + \varepsilon(3\Omega_* - 1 + 4\Omega'_* \psi)y. \quad (1)$$

Кроме ψ потенциальный вихрь Ω зависит еще и от ε : Ω_* включает нулевой и первый порядки ε , а Ω'_* — нулевой. Содержащие ε члены правой части (1) описывают не только β -эффект топографической природы (слагаемое εy), но и связь вихревых мод, вызванную зависимостью $\Omega(\Psi)$. С нулевой степенью разложения по ε ассоциируется монополярный вихрь, а дипольный — с первой; высшие мультиполи не учитываются.

Обсудим теперь адиабатический ток электронов в плазме. Будем измерять плотность, скорость и электростатический потенциал единицами n_0 , $v_T = (T_0/m)^{1/2}$ и T_0/e , пометчая нулем параметры электронов в центре. Взяв масштабом длины r_* , а времени — r_*/v_T и обозначив ω_p плазменную частоту $(4\pi e^2 n_0/m)^{1/2}$, введем параметры $\beta = v_T/c \ll 1$ и $\sigma = r_*/l_s$, где $l_s = c/\omega_p$ — размер бесстолкновительного скин-слоя. Используя закон Ампера $nv = e_z \times \nabla \Psi$, определим связанную с магнитным полем функцию тока $\Psi = B/4\pi$ и запишем интегралы Бернулли и Эртеля (вмороженности поля $(\omega_c + \text{rot}_z v)/n$ с циклотронной частотой $\omega_c = \sigma^2 \Psi$)

$$(\nabla \Psi)^2/2 + n^2 \left[\kappa(n^{\kappa-1} - 1)/(\kappa - 1) - \Phi \right] = n^2 H(\Psi),$$

$$\Delta \Psi - n^{-1} \nabla n \cdot \nabla \Psi - \sigma^2 n \Psi = n^2 \Omega(\Psi),$$

где κ — показатель адиабаты.

Добавим сюда уравнение Пуассона

$$\beta^2 \Delta \Phi = \sigma^2 (n - N)$$

с плотностью $N(y)$ ионов массы M . Ясно, что при $\beta < \sigma(r_* > r_D) = v_T/\omega_p$ — дебаевский радиус) кулоновы поля мало искажают вихри. В электронной гидродинамике, где $\beta \ll \sigma \ll (M/m)^{1/2}$, $n \approx N$, а Φ дается интегралом Бернулли, задача сводится к условию вмороженности

$$\Delta \Psi - N^{-1} N' \partial_y \Psi - \sigma^2 N \Psi = N^2 \Omega(\Psi)$$

— аналогу уравнения Обухова-Чарни теории мелкой воды с l_s вместо радиуса Обухова (для электронных вихрей часто берут $N = 1$). Нашу задачу получим, выделив однородное поле $B_* = -4\pi\sigma^{-2}$, $\Psi = -\sigma^{-2} + \tilde{\Psi}$ и отбросив слагаемое $-\sigma^2 N \tilde{\Psi}$ при $\beta^2 \ll \sigma^2 \ll \varepsilon = N'_0 r_*/2N_0$. Такой вихрь размера электронного циклотронного радиуса $r_* = \beta mc^2/e|B_*|$ (гауссовы единицы) заключен в границах $r_D \ll r_* \ll \min(2N_0/|N'_0|, l_s)$. Ларморово вращение электронов со скоростью $\sim v_T$ изменяет его поле на величину $\tilde{B} \sim 4\pi n_0 T_0/|B_*|$, вблизи равновесия сравнимую с B_* ; неоднородность плазмы влияет на него в меру значения отношения $|N'_0|l_s/\tilde{N}_0$.

2. Фоновое течение

Вихрь обладает замкнутыми линиями тока $\psi^{(i)}$. Они образуют внутреннее ядро, которое имеет хотя бы один центр и извне граничит с областью суммарных траекторий $\varphi + \psi^{(e)}$; первые из них — открытые линии тока, замкнутые вторые подобны полю точечного вихря. Эти области (индекс e — внешняя и i — внутренняя, границы раздела Γ свободна) с разными знаками коэффициента $\Omega'_* = \pm \alpha_{e,i}^2$ делают двузначной функцию $\Omega(\Psi)$. Разрыв вторых, а в случае $\omega_i = \omega_e - \gamma$ третьих производных в уравнении (1) вводит внутренние и внешние значения $\Omega_* = 1 + \omega_i$ и $1 - \gamma + \omega_e$, где $\omega_{i,e}$ описывают вихрь, а γ — течение. Тем самым закон $\Omega(\Psi)$ связывается как с вихрем, так и с фоновым течением

$u(y) = -\varphi' + \varepsilon(y\varphi' - \varphi)$; функция тока $\varphi(y)$ содержится в вытекающем из (1) уравнении

$$\varphi'' - \alpha_e^2 \varphi = -\gamma + \varepsilon(2 - 3\gamma + 4\alpha_e^2 \varphi)y. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) с нормировкой $\varphi(0) = 0$ есть неограниченная вдали функция с постоянной интегрирования C

$$\begin{aligned} \varphi(y) = & \alpha_e^{-2} [\gamma - \varepsilon(2 + \gamma)y] + [C(1 - \varepsilon y) - \varepsilon\gamma y^2] \alpha_e^{-1} \operatorname{sh} \alpha_e y + \\ & + [-\gamma(1 - \varepsilon y)/\alpha_e^2 + \varepsilon C y^2] \operatorname{ch} \alpha_e y. \end{aligned}$$

Выразив через C скорость течения u_0 на оси $y = 0$, выделим движение вихря вместе с фоном $C = V - 2\varepsilon\alpha_e^{-2}$. Скорость $V = -u_0$ представляет дрейф вихря относительно фона, а градиент $u'_0 = \gamma$.

Как видно из исходного уравнения (1), величина α_e^2 одного порядка с ε и можно ограничиться первыми степенями ε - и α_e^2 -разложений

$$\varphi(y) = Vy - \gamma y^2/2 - \delta y^3/6 - \alpha_e^2 \gamma y^4/24, \quad \delta = \varepsilon(3\gamma - 2) - \alpha_e^2 V.$$

Такое семейство содержит при $\alpha_e = \varepsilon = 0$ течение $u'(y) = \gamma$, его параметр α_e определяет изменение градиента скорости течения постоянной глубины. При $\varepsilon \neq 0$ $u''(y) \approx \delta - \varepsilon\gamma + \alpha_e^2 \gamma y$ не исчезает из-за наклона дна даже при $\alpha_e \rightarrow 0$. Линейный анализ устойчивости течения дает для плоских возмущений уравнение рэлеевского типа с функцией $u'' + 2\varepsilon - 2\varepsilon u' \approx -\alpha_e^2(V - \gamma y)$ вместо u'' . Эта функция равна с точностью до знака и малого слагаемого $2\varepsilon y u''$ производной инварианта Эртеля течения $(1 - u')(1 - 2\varepsilon y)$. Возникающий критерий подобен обобщенной Го [7] теореме Рэля о точке перегиба скорости, но вдобавок к β -эффекту содержит еще и слагаемое $2\varepsilon u'$. Происхождение вихрей объяснено неустойчивости течения, и данная функция должна менять знак. Для $V = 0$ такая смена, заметим, отвечает центру вихря (см. разделы 4 и 5). Вихрь несет массу, и знак скорости V определяет знак изменения сопротивления.

В цилиндрических координатах $x = r \sin \vartheta$ и $y = r \cos \vartheta$ представим функцию $\varphi(y)$ рядом Фурье по угловой переменной

$$\begin{aligned} \varphi(r \cos \vartheta) = & -(1 + 3\alpha_e^2 r^2/48)\gamma r^2/4 + (V - \delta r^2/6)r \sin \vartheta + \\ & + [(1 + \alpha_e^2 r^2/12)\gamma r^2/4] \cos 2\vartheta + (\delta r^3/24) \sin 3\vartheta - (\alpha_e^2 \gamma r^4/192) \cos 4\vartheta. \quad (3) \end{aligned}$$

Эти первые члены ряда (3) достаточны для описания потока с почти постоянным градиентом скорости. Малость отброшенных членов, гарантированная пределом $\alpha_e \rightarrow 0$, никак не влияет на значение γ . Хотя и в общем случае, используя фурье-представление экспоненты через модифицированные функции Бесселя, нетрудно написать ряд Фурье по $\cos 2k\vartheta$ и $\sin(2k + 1)\vartheta$ для полной функции $\varphi(y)$, наш предел, как будет видно далее, связан еще и с малостью деформации почти круглого вихря.

3. Монопольные вихри

С вихрем связаны исчезающая на бесконечности внешняя "точечная" часть $\psi^{(e)}$ и описывающее его структуру ограниченное внутреннее решение $\psi^{(i)}$. Их ряды Фурье типа (3) имеют коэффициенты

$$\begin{aligned}\psi_k^{(i,e)}(r) &= C_k^{(i,e)} F_k^{(i,e)}(\alpha_{i,e} r) + \chi_k^{(i,e)}(r); \\ \chi_0^{(i,e)}(r) &= \pm \alpha_{i,e}^{-2} \omega_{i,e}, \\ \chi_1^{(i,e)}(r) &= \varepsilon r \left[\alpha_{i,e}^{-2} (1 \pm 1 \mp \omega_{i,e}) - C_0^{(i,e)} \alpha_{i,e} r F_1^{(i,e)}(\alpha_{i,e} r) \right], \\ \chi_k^{(i,e)}(r) &\approx 0 \quad (k \geq 2).\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь мы ввели обозначения $F_k^{(i)}(\xi) = J_k(\xi)$ и $F_k^{(e)}(\xi) = K_k(\xi)$ и использовали решения $f_{i,e}(\xi) = \pm (\xi/2)^2 F_1^{(i,e)}(\xi)$ неоднородных уравнений Бесселя

$$f_{i,e}'' + \xi^{-1} f_{i,e}' + (\pm 1 - \xi^{-2}) f_{i,e} = \xi F_0^{(i,e)}(\xi).$$

Коэффициенты $C_k^{(i,e)}$ определяются условиями $\psi^{(i)} = \varphi + \psi^{(e)} = 0$ на границе $r = r_\Gamma(\vartheta)$. В фурье-представлении $r_\Gamma = 1 + r_1 \sin \vartheta + r_2 \cos 2\vartheta + r_3 \sin 3\vartheta + \dots$ коэффициент r_1 во избежание сдвига центра вихря по оси y надо принять равным нулю. Полагая другие r_k малыми и разлагая по ним граничные условия, найдем значения коэффициентов

$$\begin{aligned}C_0^{(i)} &= -\omega_i / \alpha_i^2 J_0(\alpha_i), \quad C_0^{(e)} = (\omega_e + \alpha_e^2 \gamma / 4) / \alpha_e^2 K_0(\alpha_e); \\ C_1^{(i)} &= -\varepsilon \left\{ 2 - \omega_i [1 - \alpha_i J_1(\alpha_i) / J_0(\alpha_i)] \right\} / \alpha_i^2 J_1(\alpha_i), \\ C_1^{(e)} &= -(\alpha_e^{-2} \varepsilon \omega_e + V - \delta / 6) / K_1(\alpha_e) - \varepsilon \omega_e / \alpha_e K_0(\alpha_e); \\ C_2^{(i)} &= \Phi_2^{(i)}, \quad C_2^{(e)} = -\gamma / 4 K_2(\alpha_e) + \Phi_2^{(e)}; \quad C_3^{(i,e)} = \Phi_3^{(i,e)}; \\ \Phi_k^{(i,e)} &= \pm r_k \omega_{i,e} F_1^{(i,e)}(\alpha_{i,e}) / \alpha_{i,e} F_0^{(i,e)}(\alpha_{i,e}) F_k^{(i,e)}(\alpha_{i,e}).\end{aligned}\quad (5)$$

Форма границы Γ (коэффициенты r_k), а также параметры α_i и V находятся из непрерывности скорости. Это условие, равносильное $\partial_r \psi^{(i)} = \partial_r (\varphi + \psi^{(e)})$, в нулевом порядке фурье-разложения с помощью (4) и (5) дает "дисперсионное" уравнение

$$\omega_i \frac{J_1(\alpha_i)}{\alpha_i J_0(\alpha_i)} + \omega_e \frac{K_1(\alpha_e)}{\alpha_e K_0(\alpha_e)} = -\frac{\gamma}{2} \left[1 + \frac{\alpha_e K_1(\alpha_e)}{2 K_0(\alpha_e)} \right].\quad (6)$$

Его приближенное решение, оставив пока в стороне особый случай $\omega_{i,e} = \gamma = 0$, в области типичных интенсивностей $\omega_i \sim 1$ напомним в виде

$$\alpha_i = \xi_n^{(0)} + \omega_i \lambda / \xi_n^{(0)} \omega_e, \quad \lambda = \alpha_e^2 \ln \alpha_e^{-1},\quad (7)$$

$\xi_n^{(k)}$ — ненулевые корни уравнения $J_k(\xi) = 0$.

Затем в первом порядке найдем скорость вихря, а далее параметры деформации границы

$$V = -\alpha_e^{-2} \varepsilon \omega_e - \varepsilon \left[1/3 - (2 - \omega_i) \xi_n^{(0)-2} - \omega_e/12 \right] - \varepsilon \omega_e / \lambda - (\varepsilon / \ln \alpha_e^{-2}) (\omega_e/3 - \gamma/4);$$

$$r_2 = \gamma \lambda / \omega_e, \quad r_3 = \delta \lambda / 16 \omega_e. \quad (8)$$

При близких по порядку ω_e и γ коэффициенты r_2 и в еще большей мере r_3 малы. Формула (8) также связывает дрейф вихря с наклоном дна. Скорость V весьма слабо зависит от γ и в первом приближении равна $-\alpha_e^{-2} \varepsilon \omega_e$, а при малых ω_e становится $\sim \varepsilon$. В итоге с помощью (7) и (8) находим, что параметр $\delta \approx \varepsilon(3\gamma + \omega_e - 2)$, а коэффициенты (5) приближенно равны

$$C_0^{(i)} = (\omega_e + \gamma \lambda / 2) / \xi_n^{(0)} J_1(\xi_n^{(0)}), \quad C_0^{(e)} = (\omega_e + \gamma \alpha_e^2 / 4) \lambda;$$

$$C_1^{(i)} = \left[(\omega_e + \gamma \lambda / 2) / \lambda - (2 - \omega_i) \xi_n^{(0)-2} \right] / J_1(\xi_n^{(0)}), \quad C_1^{(e)} = \gamma \alpha_e / 2. \quad (9)$$

Из (7) следует, что при $n \rightarrow \infty$ корень $\alpha_i \rightarrow \infty$ для любого значения α_e . В пределе сепаратриса Γ удаляется на бесконечность, а решение $\psi^{(i)}$ осциллирует, затухая в заполняющем все пространство ядре. Немонотонный спад, однако, делает весьма проблематичным стационарное существование такого вихря из-за неустойчивости Кельвина-Гельмгольца разнонаправленных потоков, а отсутствие периферии препятствует сопряжению вихря с течением. Стремление $\alpha_i \rightarrow 0$, превращающее ядро в однородное, а в частности, сводящее его в точку, присуще корням (6) лишь для особых значений параметров и невозможно для (7).

Отметим еще свойство локализации решения (4) вблизи ядра: даже малость α_e не нарушает слабого $\sim \exp(-\alpha_e \varepsilon)$ влияния берега, расстояние до которого $\sim 1/\varepsilon$. Решение демонстрирует связь основной моды $k = 0$ и малой, в меру ε , примеси $k = 1$. В частности, при $\omega_e = [(2 - \omega_i) \xi_n^{(0)-2} - \gamma/2] \lambda$ вихрь почти чисто монополюсный, а при малых $\omega_e \ll \alpha_e^2$ доли обеих мод сравниваются, а затем доминирует дипольная мода, но здесь нужен более тонкий анализ корней уравнения (6).

4. Особые случаи

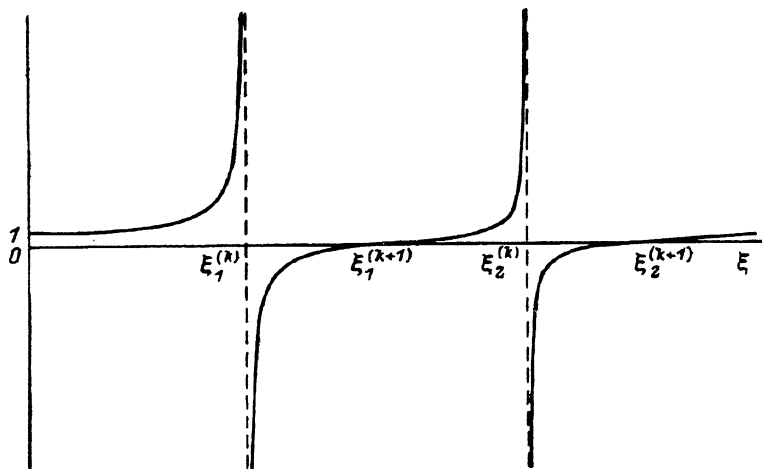
Возле особых значений параметров вместо корня (7) возникают иные решения (6). Так, при $\omega_e \approx -(\omega_i + \gamma) \lambda / 2$ имеются тривиальные корни $\alpha_i = 0$. Среди них есть и решение $\alpha_{i,e} = 0$ для течения с постоянным градиентом скорости и с непрерывной на Γ завихренностью $\omega_i = -\gamma, \omega_e = 0$. Нулевая гармоника его ряда (3) совпадает с одной для твердотельного вращения воды, ядро которого стабильно из-за нулевой скорости деформации. В том же классе, но для разрывной на Γ завихренности при $\gamma = 0$ выделяется решение $\omega_e / \omega_i \approx -\lambda/2$, в пределе $\alpha_{e,i} \rightarrow 0$ описывающее при $\varepsilon = 0$ вихрь Кельвина. Давно доказанная его линейная устойчивость в бесконечной идеальной несжимаемой жидкости [1] ныне распространена и на нелинейную область [8], включая электронную гидродинамику. В ее основе вариационный метод

Арнольда [7]: составленный из энергии и момента импульса функционал Ляпунова минимален на решении Кельвина. Сжимаемость жидкости нарушает устойчивость, но ее можно восстановить, окружив вихрь жесткой оболочкой. Подобная радиационная неустойчивость объяснима с помощью отрицательной энергии собственных колебаний [9]. Звук, генерируемый нестационарными возмущениями течения в вихре, отбирает энергию у азимутальных волн частот $\omega = \omega_i(k-1)/2$ [1]. Угловая фазовая скорость и частота вращения воды в вихре лежат в области аномального доплер-эффекта $\omega/k < \omega_i$ с отрицательным поглощением: излучение повышает возбуждение "среды", раскачивая амплитуды мод $k \geq 2$. Поэтому вихрь в мелкой воде всегда стабилен при неуходе излучаемых гравитационных волн, а возбужденный вихрь усиливает рассеиваемые им волны.

Перейдем к нетривиальным корням уравнения (6). В виде $\alpha_i = \xi_n^{(1)}$ они возникают при $\gamma = \omega_e = 0$, когда (1) при $\varepsilon = 0$ дает локализованные вихри (вне круга $r = 1$ вода покоится) с завихренностью в центре ω_i :

$$\psi^{(i)} = -2\omega_i \alpha_i^{-2} [1 - J_0(\alpha_i r) / J_0(\alpha_i)], \quad \psi^{(e)} = 0$$

— линии тока вида концентрических окружностей с исчезающей на границе скоростью $v_\vartheta = -2\omega_i J_1(\alpha_i r) / \alpha_i J_0(\alpha_i)$. Для $n = 1$ направление вращения всюду одно (при этом $J_0(\xi_1^{(1)}) < 0$); для других оно последовательно чередуется, но эти движения, видимо, снижают их устойчивость с ростом n (см. конец раздела 3). Результат можно обобщить, не требуя в (6) обращения в нуль γ наряду с ω_e : уравнение $2J_1(\alpha_i) / \alpha_i J_0(\alpha_i) = -\gamma / \omega_i$ (иначе, $J_2(\alpha_i) + (1 + \gamma / \omega_i) J_0(\alpha_i) = 0$) имеет те же типы корней для правой части меньше 1; если же ее значение ≥ 1 , возникает новый, "твердотельный" $n = 0$, корень $0 \leq \alpha_i < \xi_1^{(0)}$, отвечающий, видимо, наиболее устойчивому движению. В целом монополярные вихри можно классифицировать, исходя из принадлежности α_i интервалам монотонности входящей в (6) функции $J_1(\xi) / \xi J_0(\xi)$ (см. рисунок), если заменить γ при $\omega_e \neq 0$ на $\gamma + 2\omega_e / \lambda$.



Поведение функций $2(k+1)J_{k+1}(\xi) / \xi J_k(\xi)$, определяющих корни "дисперсионных" уравнений (6) и (10).

Особо выделим случай непрерывной на контуре Γ завихренности, когда $\omega_e = \omega_i + \gamma$, и выражения (7), (8) в первом приближении дают

$$\alpha_i = \xi_n^{(0)} + \frac{\lambda}{\xi_n^{(0)}(1 + \gamma/\omega_i)}, \quad V = -\frac{\varepsilon}{\alpha_e^2}(\omega_i + \gamma), \quad r_2 = \frac{\gamma\lambda}{\omega_i + \gamma}.$$

Деформирующий Γ градиент скорости вытягивает вихрь вдоль течения при $\gamma/\omega_e > 0$ и сжимает его в противном случае. Это особенно зримо для интенсивного вихря $\omega_i \approx -\gamma$, когда $\omega_e \approx 0$, а вращение воды зависит от знака градиента. Здесь, в области смены направления дрейфа вихря, наши формулы требуют уточнения: при $|\omega_e/\omega_i| \ll \lambda$ сингулярным вторым слагаемым в левой части (6) можно пренебречь, а справа следует учесть добавку к единице. Используя рекуррентную формулу Бесселя, получим "дисперсионное" уравнение $J_2(\alpha_i) \approx J_0(\alpha_i)/\ln \alpha_e^{-2}$ с решением

$$\alpha_i = \xi_n^{(2)} + J_0(\xi_n^{(2)})/J_2'(\xi_n^{(2)}) \ln \alpha_e^{-2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Интересна высокая локализация подобного вихря в ядре ($C_0^{(e)} \approx \gamma/\ln \alpha_e^{-4}$; см. (9)) и малость при $\gamma \gg \varepsilon$ дипольной примеси (см. (5))

$$C_0^{(i)} = \gamma/\xi_n^{(2)2} J_0(\xi_n^{(2)}) \gg C_1^{(i)} = -\varepsilon(2 + 3\gamma/4)/\xi_n^{(2)2} J_1(\xi_n^{(2)}).$$

Коэффициенты деформации оказываются всегда конечными, но они малы $\sim \alpha_e^2$, если δ мала вместе с ω_e . Скорость вихря при $\delta = 0$, когда $\gamma \approx 2/3$, приближенно равна $V = -\varepsilon(1 - 1/\ln \alpha_e^{-4})/3$. Вихри же "твердотельной" моды, возникающие при $\omega_i < -\gamma \approx -2/3$, дрейфуют быстрее: в пределе малых бесселевых аргументов имеем $\alpha_i = \alpha_e$, $V = \alpha_e^{-2}\varepsilon(1 + 1/4\lambda)/3$. Важно, что столь интенсивные вихри возможны лишь в градиентном потоке. Значение $\gamma \approx 2/3$ совпадает с отмеченным в разделе 2 случаем смены знака при $y = 0$ определяющей стабильность функции с $\delta = 0$. Дипольная примесь, несинхронность движения вихря с течением, деформация проявляются как слабый совместный эффект и наколона дна, и градиента течения, а направление дрейфа определяется лишь знаком ε .

5. Дипольные вихри

В типичном стационарном решении монополярная компонента доминирует над дипольной. Исключение составляет случай вырождения "дисперсионного" уравнения (6), когда $\omega_i = 0$ и $\omega_e \approx -\gamma\lambda/2$ (в частности, для непрерывной завихренности все параметры $\omega_{i,e}$ и γ равны нулю), а ε существенно $\neq 0$. Здесь, согласно (5) и (9), для значений α_i вблизи $\xi_n^{(1)}$ возможно преобладание дипольных мод над монополярными

$$C_0^{(i)} \approx -\omega_i/\xi_n^{(1)2} J_0(\xi_n^{(1)}) \ll C_1^{(i)} \approx -2\varepsilon/\xi_n^{(1)2} J_0(\xi_n^{(1)})(\alpha_i - \xi_n^{(1)})$$

(в первом члене разложения $J_1(\alpha_i)$ использовано равенство $J_1'(\xi_n^{(1)}) = J_0(\xi_n^{(1)})$); в левой же части условия шивки первого порядка

$$2\varepsilon \frac{J_2(\alpha_i)}{\alpha_i J_1(\alpha_i)} - (\varepsilon\omega_e + \alpha_e^2 V) \frac{K_2(\alpha_e)}{\alpha_e K_1(\alpha_e)} = -\frac{\delta}{2} + \frac{\varepsilon\omega_i}{\alpha_i^2} \left\{ 1 - \frac{\alpha_i^2}{2} \left[3 + \frac{J_2(\alpha_i)}{J_0(\alpha_i)} \right] \right\},$$

ранее определявшего скорость вихря, теперь нельзя отбросить первое слагаемое, хотя можно пренебречь членами $\sim \varepsilon\omega_{i,e}$.

Именно это соотношение теперь заменяет (6) в роли "дисперсионного" уравнения в случае сопряжения дипольного вихря с течением

$$V = -\frac{\varepsilon(2-3\gamma)+\delta}{\alpha_e^2}, \quad 2\varepsilon \frac{J_2(\alpha_i)}{\alpha_i J_1(\alpha_i)} + [\varepsilon(2-3\gamma)+\delta] \frac{K_2(\alpha_e)}{\alpha_e K_1(\alpha_e)} = -\frac{\delta}{2}. \quad (10)$$

Форма такого вихря искажена градиентом ($r_2 \sim \gamma$). Она близка к кругу лишь для непрерывной на границе завихренности с $\gamma = 0$ ($r_2 = 0$, хотя $r_3 \sim \delta = u_0''$, вообще говоря, $\neq 0$). В этом случае видна симметрия формул (6) и (10): если монополь совместим с течением со сдвигом скорости $u(y) + V \sim y$, то диполь встраивается в поток с параболическим профилем $u(y) + V \sim y^2$. Вихрь точно круглой формы ($r_k = 0$; при $k = 2$ и 3 это означает, что как γ , так и $\delta = 0$) представляет солитон Ларичева-Резника с "законом дисперсии" $\alpha_i^2 = \xi_n^{(1)2} + \alpha_e^2$, или $\alpha_i = \xi_n^{(1)} + \alpha_b^2/2\xi_n^{(1)}$. В общей ситуации, когда $\delta \neq \varepsilon(3\gamma - 2)$, сингулярность функций Макдональда в нуле ведет к близкому закону $\alpha_i = \xi_n^{(1)} - \varepsilon/V\xi_n^{(1)}$, причем, согласно (10), направление движения вихря зависит от параметров течения γ и δ .

Синхронизм вихря и потока $V = 0$ отвечает границе неустойчивости критерия раздела 2. Здесь уравнение (10) сводится к более простому $J_3(\alpha_i) = (1-3\gamma)J_1(\alpha_i)$. Соответствующие значения α_i образуют счетный набор корней, в котором подобно монополю появляется дипольная мода $n = 0$ (при $\gamma = 0$ для нее $\alpha_i \approx 2$).

При отказе от непрерывности завихренности на границе дипольное решение Ларичева-Резника, как показано в [10], допускает монополюсную добавку к функции тока комбинации $A^{(i,e)} F_0^{(i,e)}(\alpha; r) + B^{(i,e)}$ с $B^{(i)} \neq 0$ в ядре и $B^{(e)} = 0$ на периферии. Эта возможность, в достаточной мере отраженная в формулах (5) при $\omega_{i,e} \sim \varepsilon$, по сути представляет один из вариантов связи монополюсных и дипольных мод.

Заключение

В заключение работы сделаем ряд замечаний.

1. Классификация вихрей по числу неподвижных центров связана с инвариантом (топологическим зарядом [6]) гладкого поля скорости v

$$Q = (2\pi)^{-1} \oint_L v^{-2} (v_x dv_y - v_y dv_x)$$

— числом оборотов поля v при обходе вдоль Γ со стороны ядра или периферии (контуром интегрирования L служит образ границы Γ при

отображении $v(r)$). В нем можно узнать известный принцип аргумента в ТФКП либо более абстрактные индекс Пуанкаре или степень Брауэра непрерывного отображения. Нетривиальность Q выражает качественное различие замкнутых линий тока вихря и открытых траекторий фонового потока: $Q = 0$ для фона, 1 для монополюсного и 2 для дипольного вихрей. Фазовое пространство полей скорости топологически распадается на совокупность связанных компонент, объединяющих всевозможные движения с данным Q . Это придает смысл выделению в особый класс случая вырождения “дисперсионного” уравнения (6) в тождество. Столь жесткое обособление состояний с разными Q говорит о нетривиальности проблемы переходов между ними, в частности рождения вихря.

2. Класс линейных потенциальных вихрей $\Omega(\Psi)$ сужает рамки задачи. В существенно нелинейной модели вихревой цепочки Стюарта [11] уравнение $\Delta\psi = a \exp(-b\psi)$ имеет гладкое на периодической сепаратрисе решение. Здесь уместно отметить аргументацию [12] неизбежности сепаратрисы в вихревых решениях стационарных уравнений в замороженности.

3. В вязкой задаче обе ветви функции $\Omega(\Psi)$ срачиваются за счет изменения коэффициентов при степенях Ψ в переходном слое размытия границы Γ . Нелинейность и устранение разрывов высших производных теперь видятся иначе: потенциальный вихрь неинвариантен вдоль траекторий, и задача нелинеаризуема простым выбором произвольной функции $\Omega(\Psi)$ даже при простейшем законе трения о дно $-2\nu v/D_0^2$. Идеальная задача предполагает времена, с одной стороны, превосходящие ω_c^{-1} , а с другой, существенно уступающие времени диссипации D_0^2/ν . Малость числа Экмана $(\nu/2\omega_c D_0^2)^{1/2}$ достижима в лабораторном эксперименте, но ей труднее удовлетворить в природных условиях.

Подведем итог нашему рассмотрению. Наклон дна, порождая β -эффект дифференциального вращения, смешивает монополюсные и дипольные моды в вихре в отношении интенсивность / параметр наклона дна (в плазме — градиента плотности ионов). Наряду с градиентом скорости он деформирует круглые вихри, порождая их дрейф относительно потока. Круглые интенсивные вихри существуют в течении с выделенным значением градиента скорости $\gamma = 2/3$. Установлено, что движение вихря согласуется с профилем течения и, в частности, при достижении $u_0' = -\omega$; монополюсный вихрь, а при $u_0'' = 2\varepsilon(\gamma - 1)$ дипольный меняют направление дрейфа. В этих случаях точкой смены знака функции, определяющей устойчивость течения, служит центр вихря.

По сравнению с жидкостью в плазме изучение вихрей имеет несравнимо меньшую историю. В лабораторных устройствах, таких как Z -пинч, их роль не всегда ясна, и прогресс в этом направлении пролил бы свет на многие все еще скрытые стороны их поведения. Например, можно обсуждать ускорение или замедление электронных вихрей на фоне тока в неоднородной плазме короны пинча.

Список литературы

- [1] Лэмб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947.
 - [2] Ларичев В.Д., Резник Г.М. // ДАН СССР. 1976. Vol. 231. С. 1077.
 - [3] Монин А.С., Житарев Г.М. // УФН. 1990. Т. 160. № 5. С. 1.
 - [4] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
 - [5] Hasegawa A., Mita K. // Phys. Rev. Lett. 1977. Vol. 39. P. 205. Phys. Fluids. 1978. Vol. 21. P. 87.
 - [6] Филиппов Д.В., Яньков В.В. // Физика плазмы. 1986. Т. 12. С. 953.
 - [7] Монин А.С. // УФН. 1986. Т. 150. С. 61.
 - [8] Ивонин И.А. // Физика плазмы. 1992. Т. 18. С. 582.
 - [9] Степанянц Ю.А., Фабрикант А.Л. // УФН. 1989. Т. 159. С. 83.
 - [10] Frierl G.M., Larichev V.D., McWilliams J.C., Reznik G.M. // Dyn. Atmos. Ocean. 1980. Vol. 5. P. 1.
 - [11] Stuart J.T. // J. Fluid Mech. 1967. Vol. 29. P. 417.
 - [12] Nycander J. // Phys. Fluids B. 1989. Vol. 1. P. 1788.
-