

01;12  
©1995 г.

## ПРОСТРАНСТВЕННО ТРЕХМЕРНЫЕ РАСЧЕТЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО УСКОРЕНИЯ ПРОВОДЯЩИХ МАКРОТЕЛ

*М.П.Галанин, В.П.Игнатко, Ю.П.Попов, С.С.Храмцовский*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,  
125047, Москва, Россия  
(Поступило в Редакцию 17 января 1994 г.  
В окончательной редакции 6 февраля 1995 г.)

Методами вычислительного эксперимента исследованы процессы, протекающие при электродинамическом ускорении проводящих макротел. Проведено несколько серий экспериментов по исследованию физической и разностной моделей ускорителя, изучению влияния начальной скорости и амплитуды тока на эффективность ускорения. В частности, показано, что в рассмотренном диапазоне параметров эффективность ускорения растет с ростом начальной скорости тела.

### Введение

Настоящая работа посвящена развитию методов математического моделирования процесса электродинамического ускорения проводящих макротел в ускорителе типа рельсотрон для пространственно трехмерного случая и проведению цикла вычислительных экспериментов по исследованию влияния различных параметров на эффективность ускорения. Она продолжает работы авторов по данной тематике.

В качестве примера исследуются процессы в ускорителе, имеющем форму параллелепипеда с направляющими и якорем прямоугольного сечения в трехмерном по пространству и нестационарном по времени варианте. Предметом изучения являются электромагнитное и тепловое поля, а также кинематические характеристики ускоряемого тела.

Одним из наиболее показательных параметров ускорителя является его погонная индуктивность — отношение удвоенной силы, действующей на тело, к квадрату полного тока, протекающего через ускоритель. Погонная индуктивность часто используется при упрощенном теоретическом описании ускорения. При этом модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, что очень удобно как с точки зрения простоты расчета, так и с точки зрения простоты

анализа и варьирования параметров. Такая модель не предназначена для учета пространственных эффектов (распределения электромагнитного и теплового полей), однако позволяет получать хорошие результаты в описании кинематики ускорения.

Одной из целей проведения расчетов многомерных задач является прямое определение погонной индуктивности ускорителя методом вычислительного эксперимента, что позволяет построить набор моделей различной сложности по типу [1] для описания исследуемого явления. В данной работе погонная индуктивность является главной количественной характеристикой выполненных расчетов.

Они показали, что с точностью до 2-3 знаков погонная индуктивность в пространственно трехмерных расчетах является величиной постоянной. При этом теплофизические характеристики материалов брались также постоянными. Погонная индуктивность в расчетах не зависела от режима ускорения и менялась лишь при изменении геометрических характеристик области.

В работе представлены результаты нескольких серий экспериментов по исследованию процесса ускорения. Первая из них продемонстрировала устойчивость и надежность определения погонной индуктивности при измельчении пространственной сетки.

Для расчетов электродинамического ускорения в работе используется модель рельсотрона, представляющая собой ограниченную часть ускорителя, образованную его пересечением с пространственной областью, жестко связанной с ускоряемым якорем и перемещающейся вместе с ним. На границах области ставятся некоторые искусственные граничные условия, которые не вполне соответствуют действительности. Поэтому необходимо выбирать такие размеры области, которые позволили бы устранить влияние искусственных граничных условий на процесс разгона и сделали его полностью определяющимся общим протекающим через ускоритель током. Во второй серии проведенных экспериментов такие размеры установлены (для ускорителей рассматриваемого класса).

Третья и четвертая серии экспериментов посвящены исследованию влияния предускорения тела и амплитуды протекающего тока на эффективность процесса ускорения. В частности, показано, что эффективность ускорения растет с ростом начальной скорости тела.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-01-00634).

## Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим ускоритель типа рельсотрон с движущимся проводящим якорем. Схематически он представлен на рис. 1 с вырезом одной четвертой части. По рельсам (заштрихованным на рис. 1) течет ток, который создает магнитное поле. Оно действует на проводник с током (проводящий якорь) и ускоряет его. Протекающий через рельсы полный ток считается известным. Рельсотрон укрыт со всех сторон (кроме торцов, перпендикулярных оси  $y$ ) идеально проводящим кожухом. Все внутреннее пространство рельсотрона (помимо рельса и якоря) заполняет однородный диэлектрик. На рис. 2-4 показаны различные сечения области  $G$ , в которой ищется решение задачи. На них  $P$  — рельс,

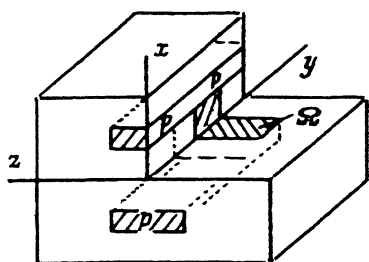


Рис. 1. Общий вид трехмерного электродинамического ускорителя типа рельсотрон с вырезом одной четверти.

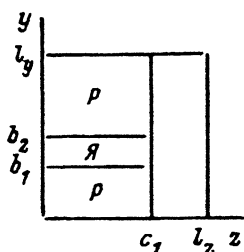


Рис. 2. Половина двумерного сечения рельсотрона плоскостью  $x = \text{const}$ , проходящей по якорю.

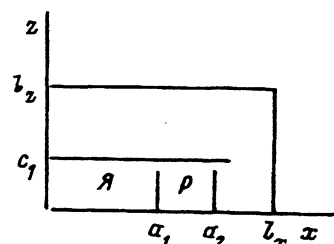


Рис. 3. Половина двумерного сечения рельсотрона плоскостью  $y = \text{const}$ , проходящей по рельсу и якорю.

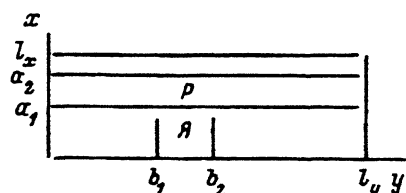


Рис. 4. Половина двумерного сечения рельсотрона плоскостью  $z = \text{const}$ , проходящей по рельсу и якорю.

$\text{Я}$  — якорь. Размер якоря по  $z$  совпадает с размером рельса. Рельсы и якорь имеют форму параллелепипедов.

Для описания электромагнитных полей будем использовать систему уравнений Максвелла в магнитогидродинамическом приближении [2,3]

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}([\mathbf{u} \cdot \mathbf{H}] - \mathbf{E}),$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi\sigma\mathbf{E} = 4\pi\mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (1)$$

Здесь и далее  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — напряженности электрического и магнитного полей соответственно,  $\mathbf{j}$  — плотность тока,  $\sigma$  — электропроводность,  $\mathbf{u}$  — скорость движения вещества,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор,  $t$  — время. Нам потребуются температура  $T$ , плотность  $\rho$ , удельная теплоемкость  $c_v$ , удельная внутренняя энергия  $\varepsilon = \int c_v dT$ . Система уравнений (1) записана в безразмерном виде. В ней  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля в системе координат, в которой вещество покоится. Будем обозначать через  $\mathbf{E}^*$  напряженность электрического поля в неподвижной (лабораторной) системе координат. Преобразование величин осуществляется по следующему правилу:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^* + [\mathbf{u} \cdot \mathbf{H}].$$

Значения  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{H}$  в МГД приближении от системы координат не зависят. Внутренняя энергия описывается уравнением

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}, \nabla)\varepsilon = (\mathbf{j}, \mathbf{E}). \quad (2)$$

В нем нет члена, соответствующего теплопроводности. Как показывают расчеты, в рассматриваемых процессах влияние теплопроводности пренебрежимо мало по сравнению с конвективным переносом.

Для получения полной постановки задачи систему уравнений (1), (2) необходимо дополнить начальными и граничными данными. Они будут конкретизированы ниже.

В рассматриваемой ситуации происходит движение якоря со скоростью  $\mathbf{u} = (0, u_0, 0)$ , т.е. только по оси  $y$ . Анализ симметрии граничных и начальных данных, геометрии рассматриваемой области показывает, что задачу можно решать в одной четверти рельсотрона, т.е. в области  $x > 0, y > 0, z > 0$ . При этом на плоскостях симметрии должны быть выполнены условия

$$\mathbf{E}_\tau|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{E}_n^*}{\partial n} \Big|_{x=0} = 0, \quad \mathbf{H}_\tau|_{z=0} = 0, \quad \mathbf{E}_n^*|_{z=0} = 0. \quad (3)$$

Здесь и далее индексы  $n$  и  $\tau$  указывают на нормальную или тангенциальную компоненту (по отношению к границе).

В используемой модели считается, что к центру каждого рельса с торца  $y = 0$  подсоединены бесконечно тонкие проводники, по которым протекает заданный ток  $I(t)$ . При этом через верхний (т.е. при  $x > 0$ ) рельс ток протекает, а через нижний вытекает. Протекающий ток создает тангенциальное магнитное поле, вычисляемое так же, как поле бесконечно длинного прямолинейного проводника с током. От двух проводников с током при  $y = 0$  ( $x \geq 0, z \geq 0$ ) имеем следующее поле:

$$H_x|_{y=0} = \frac{\partial \varphi_p}{\partial x}, \quad H_z|_{y=0} = \frac{\partial \varphi_p}{\partial z},$$

$$\varphi_p = \begin{cases} 2I \left( \arctg \left( \frac{x-x_0}{z} \right) - \arctg \left( \frac{x+x_0}{z} \right) \right), & z > 0, \\ 0, & z = 0, x > x_0, \\ -2I\pi, & z = 0, x < x_0. \end{cases} \quad (4)$$

Представление  $\mathbf{H}_\tau$  на торце  $y = 0$  через градиент потенциала  $\varphi_p$  вне области подвода тока (в точке с координатами  $x = x_0, y = z = 0$ ) позволяет автоматически удовлетворить условию  $(\text{rot } \mathbf{H})_n = 0$  в этой части границы, т.е. получить граничное условие, согласованное с уравнениями Максвелла (1).

Проведем следующие упрощения задачи. Будем рассматривать не весь рельсотрон, а лишь его часть, ограниченную фиксированной пространственной областью, жестко связанной с якорем и перемещающейся вместе с ним по направлению  $y$ . Длина этой области  $l_y$  по  $y$  является фиксированной. До сих пор использовались только эйлеровы переменные.

Для решения задачи в такой области введем смешанные эйлерово-лагранжевы (СЭЛ) переменные [4], под которыми будем понимать, например, начальные координаты частиц заданного объема, перемещающегося по  $y$  со скоростью  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ . В дальнейшем мы будем считать  $\mathbf{v}$  равной скорости движения якоря. Переход от производных

по  $t$  при фиксированных эйлеровых переменных  $\partial/\partial t$  к  $D/Dt$  (производная по  $t$  при фиксированных СЭЛ переменных) осуществляется по правилу

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla).$$

Тогда вместо (1), (2) получаем систему уравнений в СЭЛ переменных.

Введем в движущейся (по отношению к исходному рельсотрону) области декартову систему координат. Оси  $x, z$  совпадают с такими на рис. 1, ось по направлению движения обозначим также через  $y$ . Будем считать, что на торце этой области  $y = 0$  задано тангенциальное магнитное поле (4), на противоположном торце поле  $\mathbf{H}_\tau$  нулевое. В результате имеем следующую задачу: требуется найти поля  $\mathbf{H}, \mathbf{E}, T$ , описываемые системой уравнений (1), (2) в СЭЛ переменных в области  $G = (x, y, z) = (0, l_x) \cdot (0, l_y) \cdot (0, l_z)$  при  $t > 0$ , удовлетворяющих граничным условиям (3), (4) и

$$\mathbf{H}_\tau|_{y=l_y} = 0, \quad \varepsilon|_{y=l_y} = \varepsilon_0, \quad \mathbf{E}_\tau^*|_{x=l_x, z=l_z} = 0,$$

а в начальный момент

$$\mathbf{H}|_{t=0} = 0, \quad \varepsilon|_{t=0} = \varepsilon_0 = \varepsilon(T_0).$$

В задаче предполагается, что  $\sigma$  может зависеть от  $T$ . Дополнительно к (1), (2) используется уравнение движения якоря

$$m \frac{du_0}{dt} = \int_{\Omega} [\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}]_y dV, \quad u_0|_{t=0} = v_0,$$

где  $m$  — масса якоря,  $\Omega$  — занимаемая им область.

Тем самым данная модель является самосогласованной и позволяет описывать процесс электродинамического ускорения полностью. Задаваемой извне характеристикой ускорения является лишь полный ток, протекающий через ускоритель.

Для определения положения ускоряемого тела интегрируется скорость движения якоря с нулевыми начальными данными. Общая задача решается до тех пор, пока координата не достигнет значения  $l_{\max}$ .

В рассматриваемом случае электромагнитную часть (1) задачи можно свести к одному уравнению путем введения векторного потенциала [5] (подробности см. в [6])

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = [\mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{A}] - \frac{D\mathbf{A}}{Dt} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{A}. \quad (5)$$

Задача для векторного потенциала  $\mathbf{A}$  выписывается на основании приведенных выше уравнений, граничных и начальных данных. Найдя ее решение, по формулам (5) можно определить интересующие нас физические поля. Задача для  $\mathbf{A}$  решается одновременно с другими частями полной задачи, описанной выше. Для численного решения задачи использовался метод конечных разностей. Разностные аналоги уравнений и численный алгоритм подробно рассмотрены в [7,8].

Отметим, что численное моделирование рассматриваемых процессов в трехмерной геометрии началось сравнительно недавно. Так, в одной из первых работ [9] описанная программа для трехмерных расчетов находилась еще в стадии развития и позволяла считать лишь двумерные задачи без движения и температуры. Подход к моделированию ускорителя путем его описания с помощью электротехнических уравнений цепи был применен в [10], где ускоритель представлен в виде набора токовых контуров с последующим решением уравнений цепи для них. Этот подход позволил считать и трехмерные задачи. С тех пор ситуация изменилась. Появился пакет MEGA для расчета электродинамических процессов путем решения системы уравнений Максвелла [11], давший толчок работам с его применением [12]. Однако указанные работы (а также [13]) посвящены в основном методическим аспектам применения различных пакетов программ, а не получаемым с их помощью физическим результатам.

Разработанное авторами программное обеспечение отличается от [11-13] главным образом использованием практически однородного описания полей по подобластям с разным типом электропроводности. В [11-13] в области диэлектрика поля рассчитываются через скалярный магнитный потенциал, а в проводнике — через векторный. В данной работе поля всюду рассчитываются через векторный магнитный потенциал. Другие отличия состоят в различных способах калибровки векторного потенциала, выборе способа дискретного описания процессов и численного моделирования.

## Результаты расчетов

Для решения поставленной задачи создан программный комплекс, который позволяет проводить численные расчеты и визуализировать полученные результаты.

Ниже представлены результаты решения задачи. С целью демонстрации общих закономерностей все данные, как правило, приводятся в безразмерном виде. При необходимости они могут быть преобразованы в размерные по алгоритму [2, с. 230]. Использовались следующие основные масштабные величины:  $x_0 = 10$  см,  $t_0 = 1$  мс,  $m_0 = 4$  кг,  $I_0 = 2$  мА,  $U_0 = 20$  В,  $L_{p0} = 0.1$  мГн/м.

Во всех расчетах область  $G$  состоит из подобластей диэлектрика и проводника. Их параметры помечены соответственно индексами 2 и 1. При этом материалы, из которых изготовлены рельсы и ускоряемый якорь, различны. Они помечены индексами 11 и 12 соответственно. Все электро- и теплофизические величины в данных расчетах взяты постоянными. При этом брались (в опорном расчете) границы по  $x$  ( $a_1, a_2, l_x$  с рис. 3, 4) 0.05, 0.2, 0.375, границы по  $y$  ( $b_1, b_2, l_y$  с рис. 2, 4) 0.165, 0.33, 0.495, границы по  $z$  ( $c_1, l_z$  с рис. 2, 3) 0.05, 0.375, число ячеек по  $x$  (по участкам) 4, 4, 3, число ячеек по  $y$  (по участкам) 5, 5, 3, число ячеек по  $z$  (по участкам) 4, 5, координата токопровода  $x_0 = 0.19$ , длина ускорителя  $l_{\max} = 20$ , параметры материалов:  $\rho_{11} = 2.225$ ,  $\rho_{12} = 0.675$ ,  $\rho_2 = 0.0003$ ;  $\sigma_{11} = 41.25$ ,  $\sigma_{12} = 35.71$ ,  $\sigma_2 = 0$ ;  $c_{v11} = 78.51$ ,  $c_{v12} = 17.6$ ,  $c_{v2} = 14.4$ , начальная температура  $T_0 = 1.45$ , ускоряемая масса  $m = 1.11375 \cdot 10^{-3}$ , ток  $I$  за время  $\tau = 0.2$  линейно по времени изменяется от нуля при  $t = 0$  до величины  $I_0$ , а далее остается постоянным. Область  $G$  покрыта разностной сеткой размерами  $11 \times 13 \times 9$ .

1) Опорный расчет. Мы опишем данный расчет отдельно, так как все остальные по используемым ими физическим (или геометрическим) характеристикам отличаются от него каким-то одним параметром (см. исходные данные).

Вариант 1 характеризовался заданием начальной скорости  $v_0 = 10.0$  и амплитуды тока  $I_0 = 0.25$ . Остальные параметры сетки, материалов и пр. заданы выше. Этот вариант является тем расчетом, с результатами которого сравниваются результаты всех других расчетов. В таблице показаны в сравнительном (по отношению к варианту 1) виде результаты всех 10 проведенных расчетов.

При счете данного варианта получено, что с точностью до 2-3 знаков погонная индуктивность является величиной, постоянной для данного варианта. Поэтому в таблице приводится одно число для характеристики  $L_p$ . Оно, как правило, предстает собой среднее значение  $L_p$ .

На рис. 5 показана типичная картина распределения напряженности магнитного поля  $H$  в проведенных расчетах. Приведены векторное поле  $H_r$ , модуль  $|H|$  и его нормальная компонента в сечении  $y = \text{const} = 7$ , проходящем по рельсу и якорю. Для двух последних величин показаны линии уровня и видовые проекции. Данные рис. 5 получены при расчете варианта 1.

Сводные результаты расчетов

Номер варианта	Отличие от варианта 1	$L_p$	$t_{\text{ускор}}$	Число временных слоев	$\eta_0$ на выходе	$\max T$
1	Нет	2.57	0.73	275	52.57	110
2	Сетка $15 \times 16 \times 11$	2.6	0.271	77	20.02	
	$l_{\max} = 3.48$					
3	$b_1 = 0.33$	3.1	0.27	49	21.87	
	$b_2 = 0.495$					
	$l_y = 0.66$					
	$l_{\max} = 3.61$					
4	$b_1 = 0.495$	3.25	0.271	47	22.51	
	$b_2 = 0.66$					
	$l_y = 0.825$					
	$l_{\max} = 3.68$					
5	$b_1 = 0.66$	3.28	0.27	55	22.59	
	$b_2 = 0.825$					
	$l_y = 0.99$					
	$l_{\max} = 3.67$					
6	$l_y = 0.66$	2.61	0.724	280	53.4	
7	$v_0 = 5$	2.57	0.802	231	52.71	110
8	$v_0 = 15$	2.57	0.664	237	52.77	96
9	$I_0 = 0.425$	2.58	0.512	235	87.86	230
10	$I_0 = 0.34$	2.59	0.595	234	70.82	170

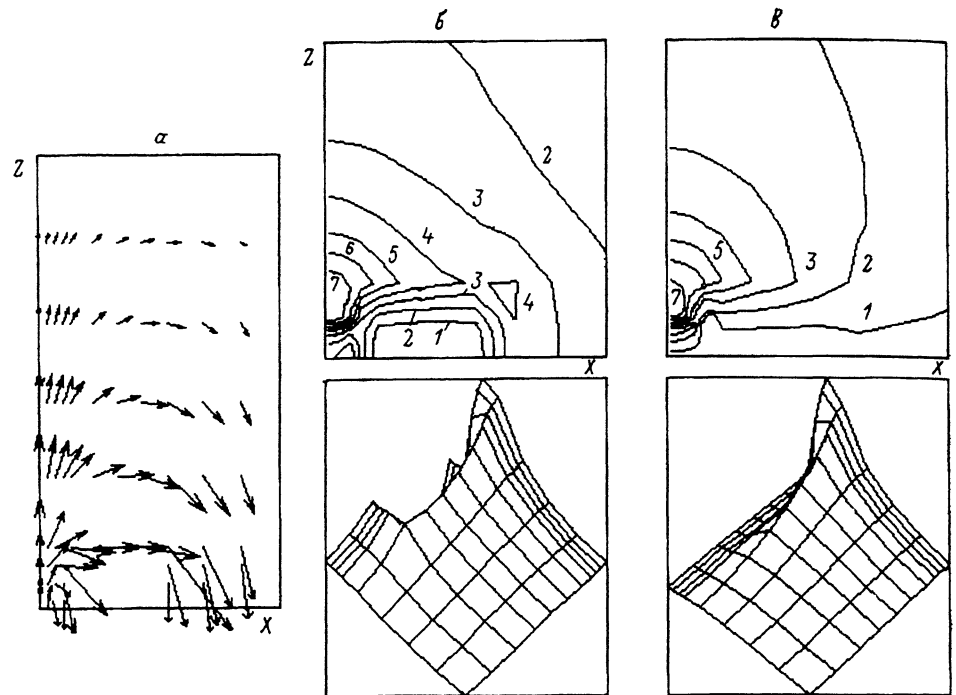


Рис. 5. Типичная картина распределения напряженности магнитного поля  $H$  в сечении  $y = \text{const}$ , проходящем по рельсу и якору.

$a$  — картина векторного поля  $H_r = (H_x, H_z)$  в данной плоскости,  $b$  — амплитуда вектора  $H$  в сечении и ее линии уровня,  $в$  — нормальная к данному сечению компонента  $H$  —  $H_y$ , и ее линии уровня.

Для проверки устойчивости вычисления погонной индуктивности по отношению к измельчению сетки был проведен расчет (вариант 2), в котором проводящая область была покрыта более густой (в 1.5 раз) сеткой. Сравнение с результатом первого расчета показывает отличие значений погонной индуктивности немногим более одного процента. Следовательно, используемая в опорном варианте сетка (при данных геометрических размерах) достаточна для получения надежного значения погонной индуктивности.

2) Проверка физической модели ускорителя. Следующие несколько вариантов (1; 3–6) расчетов составили серию для выяснения зависимости полученных результатов от длины области  $G$ , жестко связанной с движущимся якром. Требуется определить длину области, при которой граничные эффекты не будут сказываться на характеристиках процесса ускорения. Это должно выражаться прежде всего в независимости погонной индуктивности  $L_p$  от длины  $G$  при превышении ею некоторой минимальной величины.

Сравнение вариантов 1, 3–5 показывает следующее. Варианты отличались длиной рельса  $b_1$  (по  $y$  в  $G$ ) от токопровода до якоря. Она составила 0.165, 0.33, 0.495, 0.66. При этом получены следующие значения  $L_p$ : 2.57, 3.1, 3.25, 3.28. Видно, что увеличение  $b_1$  ведет к сходимости значений  $L_p$  к некоторой величине. Для получения надежных значений  $L_p$  в данной задаче нужно брать  $b_1 \sim 0.5$ – $0.7$  (в размерных единицах это 5–7 см).



В варианте 6 проведено удлинение области  $G$  в другую от ускоряемого якоря сторону — взято  $l_y = 0.66$  по сравнению с 0.495 в варианте 1 при неизменных остальных размерах. Полученное значение  $L_p$  немногим более процента отличается от результата варианта 1, что позволяет утверждать о правомерности использования данной физической модели ускорителя для его моделирования.

Для иллюстрации постоянства  $L_p$  приведем интервал полученных значений погонной индуктивности в варианте 6: она изменялась от 2.52 до 2.69.

3) Изучение влияния предускорения (начальной скорости тела) на эффективность процесса. Варианты в третьей серии (1, 7, 8) расчетов отличались заданием начальной скорости (10, 5, 15). Практически одинаковые значения погонной индуктивности, полученные в этих трех расчетах, означают равенство действующих на протяжении ускорения сил. Однако время ускорения различно (0.73, 0.802, 0.664), что вызвано разной начальной скоростью. В результате получаем практически равную конечную скорость в разных вариантах: 52.57, 52.71, 52.77. Влияние начальной скорости на конечную оказывается незначительным.

Оценим хотя бы грубо эффективность процесса ускорения. Отметим, что в модели, описывающей только кинематику ускорения при условии постоянства погонной индуктивности, КПД процесса будет равен единице. Это вызвано неучетом значительного числа других процессов.

В разных вариантах данной серии различно приращение кинетической энергии вылетающего тела. Приведем разность квадратов конечной и начальной скоростей для разных вариантов: 2663.6, 2753.3, 2559.7. Энергозатраты на ускорение пропорциональны квадрату протекающего тока. Тогда полный энерговыклад за время ускорения с учетом участка нарастания тока пропорционален квадрату амплитуды тока и времени ускорения без двух третей  $\tau$ . В результате КПД пропорционален разности квадратов скоростей, деленных на указанную временную разность. Это составляет в разных вариантах 4461.6, 4115.5, 4820.5. Коэффициент полезного действия тем выше, чем выше начальная скорость метаемого тела.

Отметим также температурный эффект. Полный протекающий ток во всех вариантах одинаков. Поэтому конечная температура якоря в значительной степени будет определяться временем ускорения. Чем оно больше, тем выше будет и конечная температура. Это подтверждают и данные о максимальной температуре в проведенных расчетах: 110.0, 110.0, 96.0.

Таким образом, энергетически более выгодным из просчитанных вариантов является процесс ускорения с большей начальной скоростью.

4) Влияние амплитуды тока на эффективность ускорения. Следующая серия расчетов проводилась с целью изучения влияния величины амплитуды тока на получаемые окончательные результаты. Варианты отличались только заданием  $I_0 = 0.25, 0.425, 0.34$  соответственно. В этом же порядке будем приводить далее результаты.

Как и в предыдущей серии, во всех вариантах зависимости действующих на протяжении ускорения сил от протекающего полного тока

одинаковы, что выражается в равенстве значений погонной индуктивности в разных вариантах.

В различных вариантах время ускорения различно: 0.73, 0.512, 0.595. Вызвано это разной амплитудой тока и тем самым разной скоростью. В результате влияние  $I_0$  на конечную скорость оказывается значительным: 52.57, 87.86, 70.82.

Нетрудно видеть, что конечная скорость прямо пропорциональна току. Это подтверждают и полученные результаты. Токи в разных вариантах относятся друг к другу как 1:1.7:1.36. А конечные скорости как 1:1.67:1.35. Отличие явно вызвано наличием ненулевой (равной во всех вариантах) начальной скорости.

Отсюда следует, что и приращение кинетической энергии (при сравнительно малой начальной скорости) пропорционально квадрату амплитуды тока. Затраченная на ускорение энергия пропорциональна квадрату  $I_0$  и времени ускорения, обратно пропорциональному  $I_0$ . Отсюда получаем, что КПД процесса прямо пропорционален  $I_0$ .

Однако из тех же соображений получим, что максимальная температура якоря прямо пропорциональна  $I_0$ . Это подтверждается и данными расчетов. Максимальные температуры в вариантах составили 110.0, 230.0, 170.0. Они относятся друг к другу как 1:2.09:1.55. Видно, что зависимость является не линейной и не квадратичной, а близкой степени 1.5: амплитуды тока в степени 1.5 относятся друг к другу как 1:2.22:1.59. Отличие от линейности вызвано более сложным поведением решения, чем приведенное его качественное описание.

5) Сравнение со случаем идеально проводящих рельсов. Проведено несколько вариантов расчета, соответствующих случаю  $\sigma_{11} = +\infty$ , т.е. идеально проводящему рельсу. Сравнение результатов подобных в остальных расчетах показывает, что во всех случаях погонная индуктивность примерно на 7% выше, чем в случае рельсов конечной проводимости. При этом меняются и другие кинематические характеристики. С увеличением электропроводности рельса сужается зона, через которую ток втекает в якорь. Это ведет к росту максимальной температуры примерно на 10%. Качественное же поведение результатов аналогичных серий расчетов подобно проводящему случаю.

6) Элементарная теория кинематики ускорения. В случае постоянства погонной индуктивности легко провести анализ кинематики процесса. Подобно теории [14] в нашем случае при условии  $t_a \geq \tau$  получим

$$l_a = v_0 t_a + \frac{L_p}{24m} I_0^2 (6t_a^2 - 8\tau t_a + 3\tau^2),$$

$$v_a = v_0 + \frac{L_p}{6m} I_0^2 (3t_a - 2\tau).$$

Здесь  $l_a$  — координата ускоряемого тела,  $t_a$  — время ускорения,  $v_a$  — скорость тела. Из этих выражений могут быть получены соотношения, определяющие необходимые характеристики процесса ускорения. Например, время окончания процесса ускорения

$$t_a = \left( \frac{2}{3} \tau - \frac{2mv_0}{L_p I_0^2} \right) + \left( \left( \frac{2}{3} \tau - \frac{2mv_0}{L_p I_0^2} \right)^2 + \left( \frac{4ml_a}{L_p I_0^2} - \frac{1}{2} \tau^2 \right) \right)^{0.5}$$

При этом считаем, что  $t_a \geq \tau$ , что справедливо при условии

$$v_0\tau + \frac{L_p}{24m} I_0^2 \tau^2 \leq l_a. \quad (6)$$

И получаем скорость в конце ускорения

$$v_a = \frac{L_p}{2m} I_0^2 \left( -\frac{1}{18} \tau^2 - \frac{8mv_0}{3L_p I_0^2} \tau + \frac{4m}{L_p I_0^2} \left( l_a + \frac{mv_0^2}{L_p I_0^2} \right) \right)^{0.5}.$$

Отсюда следует, что при выполнении (6) конечная скорость уменьшается с ростом  $\tau$  монотонным образом. Попутно приведем еще некоторые характеристики: конечная скорость достигает своего максимума при силе тока

$$I_0^2 = \frac{12m}{L_p \tau^2} (3l_a - 2v_0\tau),$$

конечная скорость достигает своего минимума при начальной скорости

$$v_0 = \frac{L_p}{3m} I_0^2 \tau.$$

Отметим, что данные выражения могут дать ответ на вопрос об эффективности ускорения только в совокупности с рассмотрением энергозатрат во внешней цепи, тепловыделения и т.п.

### Заключение

В работе представлены результаты различных вычислительных экспериментов, выполненных для численного исследования высокоскоростных электродинамических явлений и изучения возможностей повышения эффективности процесса электродинамического ускорения проводящих макротел.

Первая серия методического характера по исследованию влияния выбранной физической модели ускорителя на полученные результаты показала, что для получения более надежных числовых результатов необходимы расчеты на более мощных ЭВМ, которые позволят использовать при моделировании пространственные области большей длины. Однако для получения качественных результатов достаточно использовать короткие области.

Вторая серия по исследованию влияния предускорения показала практически постоянную скорость вылетающего тела и рост КПД процесса с ростом начальной скорости. При таком росте уменьшается и конечная температура тела.

Результаты третьей серии расчетов по исследованию влияния амплитуды тока продемонстрировали пропорциональность конечной скорости указанной амплитуде и рост КПД процесса при ее увеличении. При этом растет и максимальная температура тела.

Расчеты пространственно трехмерных задач необходимы для учета пространственных эффектов. Это, например, распределение тока по якорю, приводящее к наибольшим перегрузкам его задних ребер. Другой эффект — скоростной скин-слой. Третий — распределение тока по

сечению рельса. Указанные явления могут быть изучены в рамках соответствующих двумерных задач по отдельности, но вместе — только в трехмерном варианте.

Значение погонной индуктивности ускорителя характеризует процесс ускорения в целом. Постоянство  $L_p$  в проведенных расчетах означает ее практическую независимость от меняющегося во времени трехмерного распределения тока и позволяет использовать для описания кинематики модель без пространственных производных. Представляется, что это является следствием выбора достаточно толстого якоря. При этом скин-слои у граней, по которым течет ток, не взаимодействуют между собой. Весьма вероятно, что в соответствующих двумерных расчетах для данного набора параметров будут получены те же значения погонной индуктивности. Однако необходимость проверки независимости  $L_p$  от меняющегося трехмерного распределения тока для конкретного режима и набора параметров, вообще говоря, остается.

Представленные в работе результаты свидетельствуют об эффективности разработанных авторами методов математического и численного моделирования высокоскоростных электродинамических явлений, позволяющих и на сравнительно маломощной вычислительной технике решать физически содержательные трехмерные нестационарные задачи для описания электродинамических ускорителей.

#### Список литературы

- [1] Галанин М.П., Игнатко В.А., Попов Ю.П. // Матер. II Всесоюз. семинара по динамике силовоточного дугового разряда в магнитном поле. Новосибирск, 1992. С. 72–103.
- [2] Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980. 352 с.
- [3] Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 248 с.
- [4] Колдова А.В., Кузнецова О.А., Повещенко Ю.А., Попов Ю.П. Препринт Ин-та прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР. № 29. М., 1986. 20 с.
- [5] Страттон Дж.А. Теория электромагнетизма. М.; Л., 1948. 540 с.
- [6] Галанин М.П. Препринт Ин-та прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР. № 64. М., 1991. 36 с.
- [7] Галанин М.П., Попов Ю.П., Чублукова Ю.Н. Препринт Ин-та прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. № 32. М., 1992. 34 с.
- [8] Галанин М.П., Игнатко В.П., Попов Ю.П., Храмцовский С.С. Препринт Ин-та прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. № 47. М., 1993. 36 с.
- [9] Atkinson S.P. // IEEE Trans. Magn. 1989. Vol. MAG-25. N 1. P. 52–56.
- [10] Подольцев А.Д. Препринт Ин-та электродинамики АН УССР. № 606. Киев, 1989. 32 с.
- [11] Rodger D., Leonard P.J., Eastham J.F. // IEEE Trans. Magn. 1991. Vol. MAG-27. N 1. P. 314–317.
- [12] Critchley R., Leyden C. // 4<sup>th</sup> European Symposium on Electromagnetic Launch Technology. Cell (Germany), 1993.
- [13] Kinner P. // 4<sup>th</sup> European Symposium on Electromagnetic Launch Technology. Cell (Germany), 1993.
- [14] Дьяков В.В., Резников Б.И. // Матер. I Всесоюз. семинара по динамике силовоточного дугового разряда в магнитном поле. Новосибирск, 1990. С. 38–68.