

01;07  
©1995 г.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА ЧЕРЕЗ ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ БАЗИС ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ТИПА МЕАНДР

*Б.Н.Казаков, Г.М.Сафиуллин, Н.К.Соловаров<sup>1</sup>*

Казанский государственный университет,  
420008, Казань, Россия

<sup>1</sup>Казанский физико-технический институт РАН, Казань, Россия  
(Поступило в Редакцию 28 апреля 1994 г.)

Предложен метод определения коэффициентов Фурье периодического сигнала с ограниченным предельной частотой  $\omega_N = 2\pi N/T$  спектром ( $T$  — период,  $N$  — целое число), основанный на процедуре синхронного детектирования с прямоугольными опорными сигналами типа меандр с периодом  $T/m$ , ( $m = 1, 2, \dots, N$ ). Примерно  $2/3$  значений коэффициентов Фурье находятся непосредственно при синхронном детектировании сигнала, а остальные — решением системы линейных алгебраических уравнений. Алгоритм решения содержит существенно меньше операций умножения, чем алгоритмы быстрого преобразования Фурье. Предлагаемый метод апробирован в последовательном спектроанализаторе (рабочий диапазон  $10-10^5$  Гц), в котором для реализации синхронного детектирования в цифровой форме аналоговый сигнал преобразовывался в частоту. Работа спектроанализатора продемонстрирована на примере определения коэффициентов Фурье экспоненциально спадающего сигнала.

### Введение

Математический алгоритм вычисления коэффициентов Фурье периодического сигнала соответствует технической процедуре синхронной демодуляции этого сигнала: его умножению на соответствующую гармонику и вычислению среднего по периоду значения этого произведения [1]. Однако техническая реализация умножения на гармоническую функцию относительно сложна, поэтому в настоящее время наибольшее распространение в диапазоне средних и низких частот получил двухэтапный метод определения коэффициентов Фурье.

На первом этапе в соответствии с теоремой отсчетов (Котельникова) осуществляется дискретизация сигнала. С математической точки

зрения дискретизация соответствует разложению сигнала по промежуточному базису, представляющему собой неполную систему прямоугольных функций  $blo(n, t/T)$ , где  $t$  — время;  $T$  — период сигнала;  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $N$  — набор целых чисел, определяемый числом отсчетов  $N$  [2]. Переход от промежуточного базиса к гармоническому (т.е. вычисление искоемых коэффициентов Фурье) осуществляется на втором этапе одним из алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ) [3].

Распространенность метода с промежуточным прямоугольным базисом  $blo(n, t/T)$  обусловлена технической простотой разложения сигнала по этим функциям. Кроме того, существуют оптимальные алгоритмы БПФ, содержащие минимальное число операций умножения, занимающих наибольшее время в расчетах на ЭВМ [3].

В качестве промежуточного базиса в принципе можно выбрать любую систему независимых функций. Критерием оптимальности выбора могут служить большая простота (или равноценность) технической реализации по сравнению с процедурой дискретизации и меньшее число операций умножения при преобразовании от промежуточного базиса к гармоническому по сравнению с алгоритмом БПФ.

В настоящей работе показано, что система сигнум-гармонических функций  $\text{sign}(\cos m\omega t)$ ,  $\text{sign}(\sin m\omega t)$  ( $\omega = 2\pi/T$ ,  $m = 0, 1, \dots, N$ ), представляющих собой прямоугольные функции типа меандр с единичной амплитудой, удовлетворяет сформулированному выше критерию оптимальности промежуточного базиса. Разложение периодических сигналов по такому базису соответствует хорошо известной технической процедуре синхронного детектирования с опорным прямоугольным сигналом типа меандр [1]. Предложенный метод определения коэффициентов Фурье апробирован в последовательном спектроанализаторе, работа которого продемонстрирована на примере определения коэффициентов Фурье экспоненциально спадающего сигнала.

## Теория

Рассмотрим процедуру синхронного детектирования физического сигнала  $U(t)$  (с периодом  $T$ ), спектр которого ограничен предельной частотой  $\omega_N = 2\pi N/T$  и определяется коэффициентами Фурье  $a_n$ ,  $b_n$  ( $n = 0, 1, \dots, N$ ). Синхронный детектор с прямоугольным опорным сигналом типа меандр с периодом  $T$  действует как набор гармонических синхронных демодуляторов с несущими частотами  $2\pi(2n+1)/T$  и соответствующими коэффициентами передачи, обратно пропорциональными  $(2n+1)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) [1]. В качестве опорных сигналов при детектировании выберем сигнум-гармонические функции  $\text{sign}(\cos m\omega t)$ ,  $\text{sign}(\sin m\omega t)$  ( $m = 0, 1, \dots, N$ ). В результате синхронного детектирования получим  $2N+1$  значений

$$A_m = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) \text{sign}(\cos m\omega t) dt,$$

$$B_m = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) \text{sign}(\sin m\omega t) dt. \quad (1)$$

Если в (1) функции  $U(t)$  и  $\text{sign}(\cos m\omega t)$ ,  $\text{sign}(\sin m\omega t)$  заменить их разложением в ряд Фурье

$$\text{sign}(\cos m\omega t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos\{(2k+1)m\omega t\},$$

$$\text{sign}(\sin m\omega t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\{(2k+1)m\omega t\},$$

то получим систему  $2N+1$  уравнений, связывающих значения  $A_m$ ,  $B_m$  с коэффициентами Фурье  $a_n$ ,  $b_n$ ,

$$A_m = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^N a_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{1}{T} \int_0^T \cos(n\omega t) \cos\{(2k+1)m\omega t\} dt,$$

$$B_m = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^N b_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(n\omega t) \sin\{(2k+1)m\omega t\} dt. \quad (2)$$

В силу ортогональности гармонических функций интегралы в (2) равны  $\delta_{n, \{(2k+1)m\}}$ , где  $\delta$  — символ Кронекера. Поэтому система уравнений (2) примет вид

$$A_m = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{2k+1} a_{(2k+1)m},$$

$$B_m = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^p \frac{1}{2k+1} b_{(2k+1)m}, \quad (3)$$

где  $p$  равно максимальному целому значению  $k$ , удовлетворяющему условию  $(2k+1)m \leq N$ , т.е. целой части выражения

$$\left[ \frac{N-m}{2m} \right].$$

Для иллюстрации физического смысла полученных результатов на рис. 1 показан спектр Фурье модельного нечетного сигнала  $U^*(t)$ , состоящий из девяти гармоник, и спектры Фурье опорных сигналов  $\text{sign}(\sin m\omega t)$  до  $m=4$ . В спектрах сигналов  $\text{sign}(\sin m\omega t)$  с  $m > 3$  только одна гармоника совпадает по частоте с одной из гармоник сигнала  $U^*(t)$ . Поэтому в суммах (3) отлично от нуля лишь одно слагаемое с  $k=0$ . Следовательно, при синхронном детектировании с соответствующими опорными сигналами коэффициенты Фурье сигнала  $U^*(t)$  начиная с четвертой гармоники определяются с точностью до постоянного множителя  $(\pi/4)B_4 = b_4$ ,  $(\pi/4)B_5 = b_5$  и т.д. до  $(\pi/4)B_9 = b_9$ .

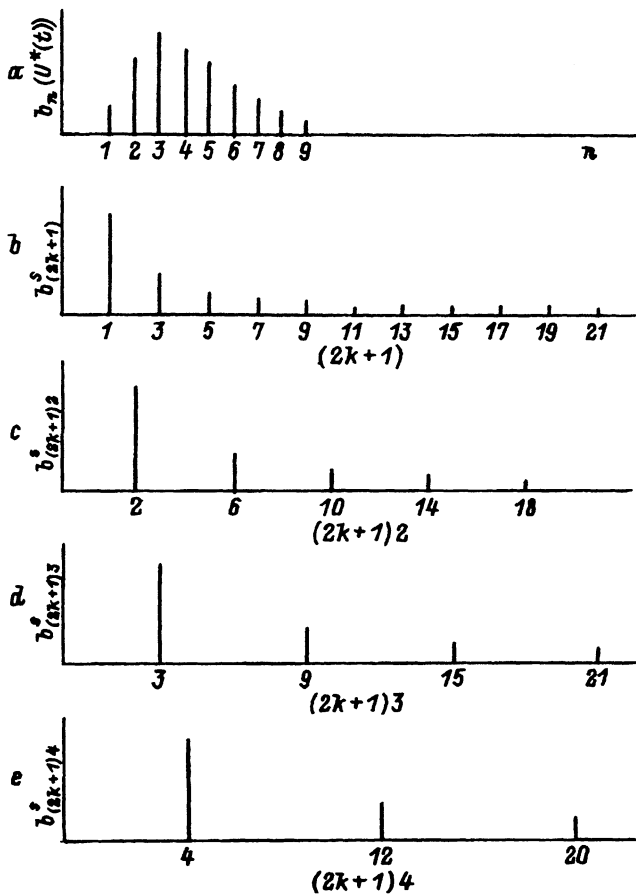


Рис. 1. Относительные величины фурье-компонент модельного нечетного сигнала  $U^*(t)$  (a) нечетных сигнум-гармонических функций  $\text{sign}(\sin m\omega t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{(2k+1)m}^s \sin\{(2k+1)m\omega t\}$  при  $m = 1, 2, 3, 4$  соответственно (b-e).

Коэффициенты с  $m \leq 3$  вычисляются аналитически последовательно начиная с  $m = 3$

$$b_3 = \frac{\pi}{4} B_3 - \frac{1}{3} b_9, \quad b_2 = \frac{\pi}{4} B_2 - \frac{1}{3} b_6,$$

$$b_1 = \frac{\pi}{4} B_1 - \frac{1}{3} b_3 - \frac{1}{5} b_5.$$

Таким образом, выражения

$$a_m = \frac{\pi}{4} A_m, \quad b_m = \frac{\pi}{4} B_m, \quad m \geq [N/3], \quad (4a)$$

$$\left. \begin{aligned} a_m &= \frac{\pi}{4} A_m - \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^k}{2k+1} a_{(2k+1)m} \\ b_m &= \frac{\pi}{4} B_m - \sum_{k=1}^p \frac{1}{2k+1} b_{(2k+1)m} \end{aligned} \right\} \begin{cases} m < [N/3], \\ p = [N-m/2m] \end{cases} \quad (4b)$$

определяют алгоритм нахождения коэффициентов Фурье сигнала  $U(t)$ , содержащего  $N$  гармоник, по значениям  $A_m, B_m$ , полученных предлагаемым методом.

Из (4а) следует, что примерно 2/3 коэффициентов Фурье (высокочастотных гармоник) можно определить аппаратно, а остальные коэффициенты (низкочастотных гармоник) — последовательным решением системы уравнений (4б).

Эффективность алгоритмов быстрого преобразования Фурье, как упоминалось выше, определяется числом операций умножения  $M$ . В оптимальных алгоритмах БПФ по основанию два  $M \cong 4N \log_2 N$  [3]. В предлагаемом методе число операций умножения  $M^*$  равно числу слагаемых в правых частях системы (4б)

$$M^* = 2 \sum_{n=1}^{[N/3]} [N/2n - 1/2],$$

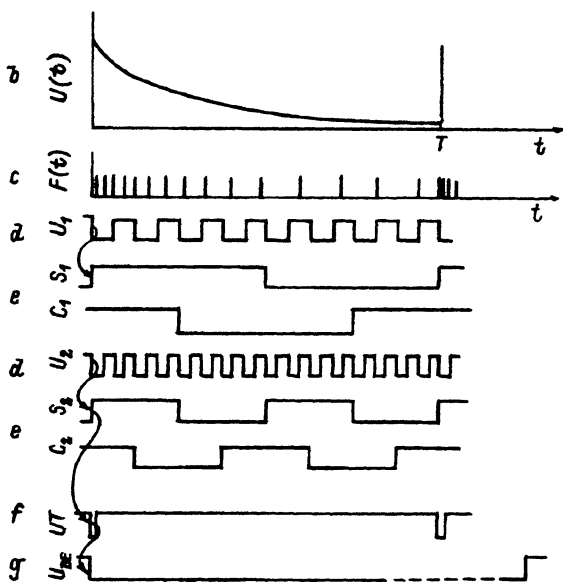
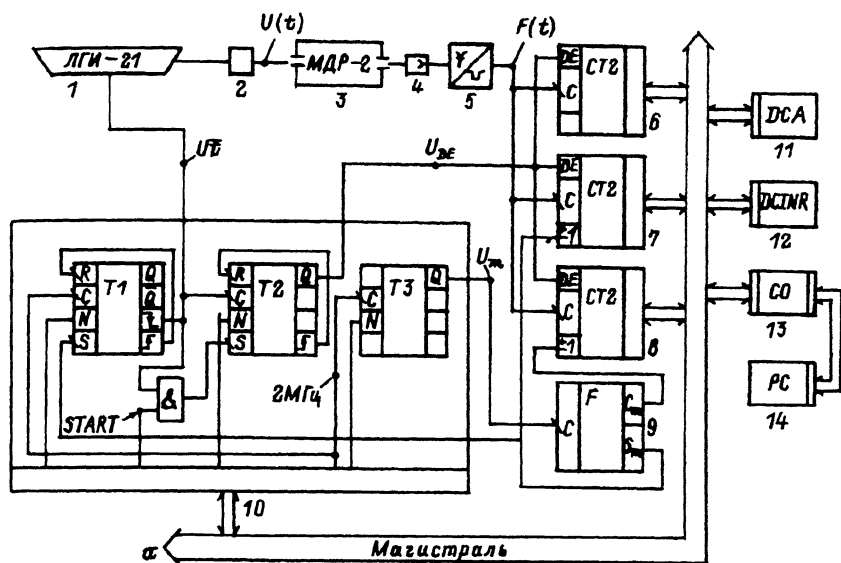
где множитель 2 перед суммой учитывает независимость расчетов  $a_n$  и  $b_n$ , а квадратные скобки означают целую часть дроби.

Обычно в спектроанализаторах, использующих БПФ,  $N = 2^9$ . В этом случае  $M = 40960$ , а  $M^* = 2944$ . Таким образом, алгоритм преобразования от предложенного промежуточного базиса к гармоническому содержит на порядок меньше операций умножения, чем алгоритмы БПФ.

### Эксперимент

Предлагаемый метод был апробирован в последовательном фурье-спектроанализаторе, собранном на базе магистрально-модульного измерительно-вычислительного комплекса (ИВК). Системный интерфейс ИВК представлял собой упрощенный вариант мультибас. Применение преобразователя аналог-частота позволило наиболее просто аппаратно реализовать процедуру синхронного детектирования на реверсивных счетчиках. Такой синхронный детектор практически безынерционно можно перестраивать по частоте. Это важно при использовании последовательного принципа построения спектроанализатора, когда на каждом  $m$ -том шаге скана одновременно определяются значения  $A_0, A_m, B_m$ , а  $m$  последовательно изменяется в течение скана от 1 до  $N$ .

Блок-схема прибора представлена на рис. 2,а. Спектроанализатор состоит из пяти функциональных модулей (ФМ) 6-10. Из них идентичные ФМ 6-8 — двоичные двухбайтовые реверсивные счетчики, собранные на микросхемах К155ИЕ7. Эти счетчики имеют три внешних входа: счетный  $C$ , запрещения счета  $DE$  и управления направлением счета  $\pm 1$ . Работа системы синхронизировалась ФМ 10, собранным на микросхеме КР580ВИ53. Этот модуль содержит три идентичных многофункциональных таймера, на выходы  $C$  которых подавалась тактовая частота с магистрали ИВК (2 МГц) или от внешних источников. Последовательности прямоугольных импульсов  $S_m = 0.5[1 + \text{sign}(\sin(mwt))]$ ,  $C_m = 0.5[1 + \text{sign}(\cos(mwt))]$ , сдвинутых относительно друг друга на четверть периода и управляющих направлением счета счетчиков 7, 8 (рис. 2,а, е) получались в ФМ 9 делением сигнала



**Рис. 2.**  
 а) — блок-схема спектроанализатора: 1 — азотный импульсный лазер, 2 — образец, 3 — монохроматор, 4 — фотоэлектронный умножитель, 5 — дискриминатор-формирователь одноэлектронных импульсов, 6–8 — двухбайтовые реверсивные счетчики, 9 — формирователь прямоугольных последовательностей  $S_m$  и  $C_m$ , 10 — три многофункциональных таймера в одном модуле, 11 — дешифратор адреса, 12 — дешифратор прерываний, 13 — контроллер измерительно-вычислительного комплекса, 14 — компьютер. Временные диаграммы сигнала  $U(t)$  (b); последовательности импульсов  $F(t)$  (c); тактовых сигналов  $U_m$  при  $m = 1, 2$  (d); прямоугольных последовательностей  $S_m$  и  $C_m$  при  $m = 1$  и 2, управляющих направлением счета (e); тактовых сигналов  $UT$  с периодом  $T$  (f); импульса разрешения счета  $U_{DE}$  (g). Все сигналы, кроме  $U(t)$ , ТТЛ уровня.

$U_m$  с частотой  $4m\omega$  (рис. 2, *d*), сформированного таймером ТЗ ФМ 10. Деление осуществлялось двумя последовательно соединенными делителями частоты на два, собранными на *D*-триггерах [4].

Временные диаграммы работы спектроанализатора представлены на рис. 2, *b-g*. На каждом *m*-том шаге скана тактовый сигнал  $U_m$  с частотой  $4m\omega$  от таймера ТЗ (ФМ 10) преобразовывался в прямоугольные последовательности  $S_m, C_m$  в ФМ 9.

Последовательность импульсов  $F(t)$ , частота следования которых пропорциональна интенсивности сигнала  $U(t)$ , подавалась на счетные входы *C* счетчиков 6-8, а стробирующий импульс  $U_{DE}$  — на входы запрещения счета *DE*. Длительность импульса  $U_{DE}$  кратна заданному числу периодов *T* и определяла суммарное время счета (интегрирования) на каждом *m*-том шаге скана. Этот импульс формировался таймером Т2 в режиме одновибратора, на синхронизирующий вход *C* которого подавался сигнал  $UT$  с периодом *T*. Запуск таймера Т2 осуществлялся программным способом (сигнал START) и синхронизован с отрицательным фронтом сигнала  $UT$ . На входы управления направлением счета  $\pm 1$  счетчиков 7 и 8 поступали сигналы с соответствующих выходов ФМ 9 (сигналы  $C_m$  и  $S_m$ ). Таким образом, на счетчиках 7 и 8 происходило синхронное детектирование сигнала  $F(t)$ , а на счетчике 6 — вычисление его среднего значения на периоде *T*.

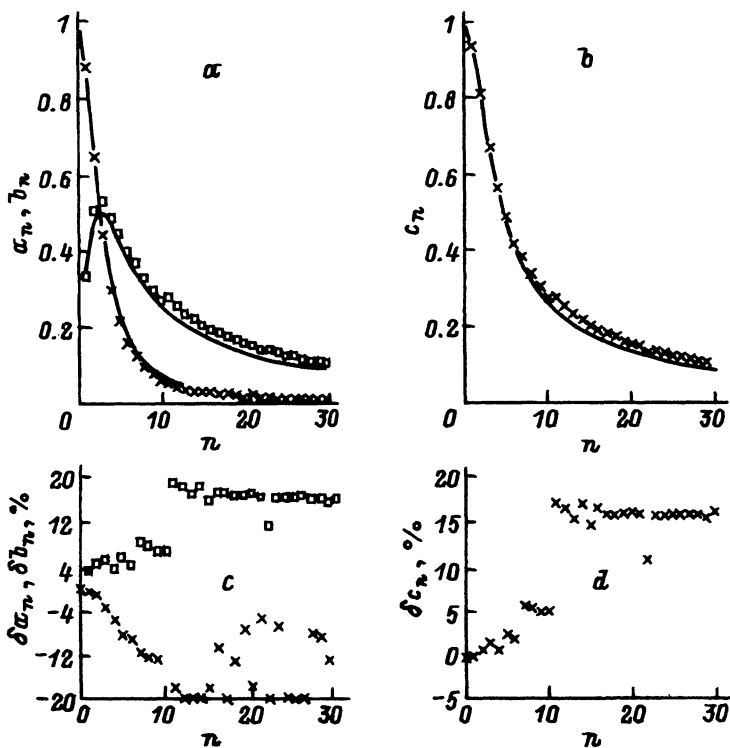


Рис. 3. Коэффициенты Фурье модельного сигнала  $\exp(-t/\tau u)$  при  $\tau = 933 \pm 2$  мкс, период возбуждения  $T = 16$  мс, 100 сканов.

*a* — значения  $a_n, b_n$  экспериментальные (x, D) теоретические (сплошные линии); *b* — амплитудный спектр; x — эксперимент, сплошная линия — теория; *c, d* — погрешность определения относительно теоретических значений коэффициентов  $a_n, b_n$  и  $c_n$  соответственно.

Полученные в счетчиках цифровые сигналы пропорциональны значениям  $A_m$ ,  $B_m$  при  $m > 0$  (ФМ 7, 8) и  $A_0$  (ФМ 6). Для уменьшения влияния неустойчивости сигнала  $U(t)$  значения  $A_m$ ,  $B_m$  программно нормировались на  $A_0$ , при этом и коэффициенты Фурье нормированы:  $a_0 = 1$ . Для повышения точности измерений значения  $A_0$ ,  $A_m$ ,  $B_m$  усреднялись многократным сканированием.

Работа спектроанализатора проиллюстрирована на примере определения коэффициентов Фурье экспоненциально спадающего сигнала. В качестве такого сигнала использован спад люминесценции ионов  $Tb^{3+}$  (уровня  $^5D_4$  с временем жизни  $\tau = 0.933 \pm 0.002$  мс) в кристалле  $TbF_3$  при комнатной температуре. Люминесценция возбуждалась импульсным азотным лазером ЛГИ-21 ( $\lambda = 337$  нм,  $\Delta t = 10$  нс), запускаемым таймером ТЗ с периодом  $T = 16$  мс. Оптический сигнал преобразовывался в последовательность импульсов (преобразование аналог-частота) фотоэлектронным умножителем, работающим в режиме счета фотонов. Импульсы, нормированные по длительности и амплитуде ФМ 5, подавались на входы С ФМ 6-8.

Теоретические и экспериментальные значения коэффициентов Фурье модельного экспоненциального сигнала представлены на рис. 3. Относительно высокая погрешность измерения коэффициентов Фурье с  $n > 10$  обусловлена вкладом гармоник с частотами больше, чем выбранная нами граничная частота, равная  $30\omega$  ( $N = 30$ ). Этот вклад для экспоненциального сигнала, спектр которого имеет лоренцеву форму, практически не зависит от выбора граничной частоты и отношения  $T/\tau$ . Теоретическая погрешность определения коэффициентов с  $n > N/3$  равна  $\delta a_n \simeq 25\%$  и  $\delta b_n \simeq 5\%$ . Для повышения точности измерения в этом случае необходимо, как и в любых спектроанализаторах, использовать фильтры низких частот с частотой среза, определяемой выбранной граничной частотой.

Таким образом, предложен новый метод определения коэффициентов Фурье и показано, что его можно реализовать цифровыми средствами, используя преобразователь аналог-частота. При исследовании оптических сигналов (как в рассмотренном примере) таким преобразователем может служить фотоэлектронный умножитель. Для анализа электрических сигналов спектроанализатор необходимо дополнить ФМ, осуществляющим преобразование аналог-частота. Очевидно, что коэффициенты  $A_m$ ,  $B_m$  можно определить в аналоговом режиме. В этом случае синхронные детекторы можно заменить синхронными интеграторами [5], выделяющими из сигнала сигнум-гармонические компоненты с амплитудами (1).

#### Список литературы

- [1] Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. М.: Мир, 1983. Т. 2. 256 с.
- [2] Хармут Х. Теория секвентного анализа. М.: Мир, 1980. 574 с.
- [3] Залманзон Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. М.: Наука, 1989. 496 с.
- [4] Димитрова М., Пуджес В. 33 схемы на триггерах. М.: Энергоатомиздат, 1990.
- [5] Frater R.H. Rev. Sci. Instr. 1965. Vol. 36. N 5. P. 634.