01;09

ФУНКЦИЯ ГРИНА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА СРЕД

А.Г.Нерух

Харьковский государственный технический университет радиоэлектроники, Харьков, Украина
(Поступило в Редакцию 15 апреля 1993 г.)

Задача о построении функции Грина уравнений Максвелла для неоднородных нестационарных сред сведена к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Для трехмерного случая двух полупространств, разделенных плоской границей, в одном из которых диэлектрическая проницаемость скачкообразно изменяется во времени, получена пространственно-временна́я тензорная функция Грина как решение такого интегрального уравнения, найденное с помощью резольвенты. Сформулированы интегральные соотношения для электромагнитного поля в случае нестационарной неоднородности, расположенной в любом из этих полупространств.

Введение

Подход к решению уравнений Максвелла с помощью функций Грина является классическим как в случае однородных сред, так и в случае неоднородных сред, который рассматривается, например, в работах [1–3]. Однако при этом рассматривается только пространственная неоднородность среды, а во времени ее свойства предполагаются неизменными, даже если аппарат функций Грина и формулируется в пространственно-временны́х переменных, т.е. ориентирован на решение нестационарных задач. В этом случае рассмотрение нестационарности ограничено только нестационарностью первичного электромагнитного поля.

В данной работе построена пространственно-временна́я тензорная функция Грина уравнений Максвелла для трехмерного случая двух полупространств, разделенных плоской границей, в одном из которых диэлектрическая проницаемость испытывает скачкообразные изменения во времени начиная с нулевого момента. С помощью этой функции сформулированы интегральные соотношения для поля в случае нестационарной неоднородности, расположенной в любом из этих полупространств. Показано существование симметрии этих соотношений, определяемой расположением неоднородности относительно границы раздела сред, а не расположением нестационарного полупространства.

Постановка задачи

Построение функции Грина производится на основе интегрального подхода [4], одной из существенных предпосылок которого является описание кусочно-однородной среды с помощью разрывных функций. Известно [5], что при описании среды функциями $\mathbf{P}$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{j}$, которые могут иметь скачки на некоторых поверхностях, вид уравнений Максвелла не меняется по сравнению со случаем непрерывной среды, если на этих поверхностях отсутствуют поверхностные заряды и токи, а полевые функции и их производные в уравнениях понимаются в обобщенном смысле [6].

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} - \frac{I}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + 4\pi \operatorname{rot}\mathbf{M} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \qquad (1)$$

При этом граничные условия на поверхностях разрыва содержатся в самих уравнениях, так что обобщенные функции, являющиеся их решениями, удовлетворяют этим условиям [7]. Ниже все рассмотрение будет производиться только для электрического поля, так как магнитную индукцию можно выразить через электрическое поле с помощью второго уравнения в (1)

$$\mathbf{B} = -c \operatorname{rot}\int\limits_{-\infty}^{t} \mathbf{E}\,dt.$$

Пусть в фоновой среде, которая описывается непрерывными вектор-функциями электрической и магнитной поляризаций

$$\mathbf{P}_{ex} = \frac{1}{4\pi}(\varepsilon - 1)\mathbf{E}, \quad \mathbf{M}_{ex} = \frac{1}{4\pi}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\mathbf{B},$$

где ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости этой среды, имеется область $V_1(t)$, содержащая подобласть $V_2(t)$. Среда в дополнительных подобластях V_1/V_2 и V_2 описывается непрерывными функциями соответственно $\mathbf{P}_1, \mathbf{M}_1, \mathbf{j}_1$ и $\mathbf{P}_2, \mathbf{M}_2, \mathbf{j}_2$. Тогда функции, описывающие среду во всем пространстве, можно представить в виде

$$\mathbf{P} = \chi_2(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) + \chi_1(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_{ex}) + \mathbf{P}_{ex},$$

$$\mathbf{M} = \chi_2(\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) + \chi_1(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_{ex}) + \mathbf{M}_{ex},$$

$$\mathbf{j} = \chi_2(\mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1) + \chi_1\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_{extr}, \qquad (2)$$

где $\chi_{1,2}$ — характеристические функции областей $V_{1,2}$; $\mathbf{j}_{extr}$ — токи, описывающие сторонние источники поля.

Подставив (2) в (1) и объединяя эти уравнения в одно [7], получим обобщенное неоднородное волновое уравнения относительно вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varepsilon\mu\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mu\chi_1(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_{ex}) + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mu\operatorname{rot}\chi_1(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_{ex}) +$$

$$+\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\chi_1\mu\mathbf{j}_1 = \mathbf{F}_2 - \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mu\mathbf{j}_{extr}, \tag{3}$$

где слагаемые с коэффициентами, разрывными на границе области V_2, отнесены в правую часть

$$\mathbf{F}_2 = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mu\chi_2(\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1) - \frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mu\operatorname{rot}\chi_2(\mathbf{M}_2-\mathbf{M}_1) - \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\chi_2\mu(\mathbf{j}_2-\mathbf{j}_1). \tag{4}$$

Решение уравнения (3) может быть представлено в виде свертки правой части этого уравнения с его фундаментальным решением G_1 (функцией Грина) [6]

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0' + \mathbf{G}_1\left(\mathbf{F}_2 - \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}_{extr}\right). \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{E}_0'$ есть решение уравнения (3) с нулевой правой частью, т.е. поле в среде, параметры которой имеют разрывы только на границе области V_1. Так как исходные уравнения (1) содержат в себе граничные условия на всех поверхностях разрыва, то $\mathbf{E}_0'$ удовлетворяет этим условиям на границе области V_1.

Функция Грина уравнения (3) определяется в общем случае неоднозначно, с точностью до произвольного решения однородного уравнения, но так как это решение уже представлено в (5) слагаемым $\mathbf{E}_0'$, то в дальнейшем потребуется только сингулярная часть функции Грина, удовлетворяющая уравнению

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}G_1 + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varepsilon\mu G_1 + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mu\chi_1\left(\hat{P}_1 - \hat{P}_{ex}\right)G_1 + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mu\operatorname{rot}\chi_1\times$$

$$\times\left(\hat{M}_1 - \hat{M}_{ex}\right)G_1 + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\chi_1\mu\hat{j}_1G_1 = \hat{I}\delta(x-x') \tag{6}$$

где $\hat{P}$, $\hat{M}$, $\hat{j}$ — операторы, соответствующие функциям $\mathbf{P}$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{j}$; $\hat{I}$ — тождественный оператор; $\delta(x)$-дельта-функция, $x = (t, r)$.

Это уравнение учитывает граничные условия на поверхности V_1, следовательно, и его решение, т.е. функция G_1, будет удовлетворять этим условиям.

Преобразуем уравнение (6) в интегральное уравнение, решение которого будем производить с помощью метода резольвенты [6]. Перенеся слагаемые с разрывными коэффициентами в правую часть, будем иметь

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}G_1 + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varepsilon\mu G_1 = F, \tag{7}$$

где

$$F=-\frac{4\pi\mu}{c^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\chi_1\left(\hat{P}_1-\hat{P}_{ex}\right)+c\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\chi_1\left(\hat{M}_1-\hat{M}_{ex}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\chi_1\hat{j}_1\right]G_1+\hat{I}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{8}$$

Решение уравнения (7) представим в виде свертки его фундаментального решения G_0 с правой частью F

$$G_1 = G_0 \cdot F. \tag{9}$$

В силу существования этой свертки, обеспеченного финитностью обобщенной функции F, дифференцирование по времени в (9) можно перенести на G_0, в результате чего получим

$$G_1 = G_0 - \frac{4\pi\mu}{c^2}\frac{\partial^2 G_0}{\partial t^2} - \chi_1\left(\hat{P}_1-\hat{P}_{ex}\right)G_1 - \frac{4\pi\mu}{c^2}\frac{\partial G_0}{\partial t} -$$

$$-\left[c\operatorname{rot}\chi_1\left(\hat{M}_1-\hat{M}_{ex}\right)+\chi_1\hat{j}_1\right]G_1. \tag{10}$$

При вычислении этой свертки интегрирование производится по всему четырехмерному пространству $-\infty < t < \infty$, $-\infty < x, y, z < \infty$.

Существенным моментом используемого в данной работе подхода является предположение, что нестационарность среды начинается в конечный момент времени. Для упрощения выкладок будем считать, что этот момент совпадает с нулевым. Пусть нестационарность среды обусловлена образованием области V_1 в нулевой момент времени. Это значит, что при $t < 0$ $\hat{P}_1 = \hat{P}_{ex}$, $\hat{M}_1 = \hat{M}_{ex}\hat{j}_1 = 0$. Тогда интегрирование по времени в (10) сведется к интегрированию по полуоси $t \geqslant 0$.

Представив (10) в операторном виде

$$G_1 = G_0 + \hat{K}G_1, \tag{11}$$

найдем,что в этом случае оператор будет определяться выражением

$$\hat{K} = \frac{4\pi\mu}{c^2}\int dx'\left\{\frac{\partial^2 G_0(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{\partial t^2}\chi_1(\mathbf{x}')\left(\hat{P}_1-\hat{P}_{ex}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial G_0(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{\partial t}\left[c\operatorname{rot}'\chi_1(\mathbf{x}')\left(\hat{\mathbf{M}}_1-\hat{\mathbf{M}}_{ex}\right)+\chi_1(\mathbf{x}')\hat{j}_1\right]\right\}, \tag{12}$$

где интеграл $\int d\mathbf{x}'$ здесь и ниже обозначает интегрирование по четырехмерному полупространству $t \geqslant 0$.

Свойства оператора $\hat{K}$ определяются свойствами функции G_0, в качестве которой можно взять сингулярную часть функции Грина уравнения (7). Регулярная часть этой функции, удовлетворяющая уравнению (7) при $F = 0$, дает решение соответствующего однородного уравнения для поля, т.е. дает поле в фоновой среде. Но это поле уже представлено слагаемым $\mathbf{E}_0'$ в (5) и повторный его учет не нужен.

Таким образом, в качестве фундаментального решения уравнения (7) можно взять известное, например [4,6], выражение

$$G_0 = \frac{\nu^2}{4\pi}\hat{D} f(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \tag{13}$$

где

$$\hat{D} = \nabla\nabla - \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \nu = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

$$\bar{\bar{f}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left(t - t'\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\nu}\right)\theta\left(t-t'\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\nu}\right), \tag{14}$$

$\theta(t)$ — единичная функция Хевисайда.

Так как носителем функции G_0 является прошедший световой конус с вершиной в точке наблюдения и эта функция имеет интегрируемую в четырехмерном пространстве особенность, то оператор $\hat{K}$ представляет собой интегральный оператор Вольтерра. Его конкретное выражение получим после подстановки (13) в (12)

$$\hat{K} = \int d\mathbf{x}'\left\{\frac{1}{\varepsilon}\hat{D} f(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\chi_1(\mathbf{x}')\left(\hat{P}_1 - \hat{P}_{ex}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} f(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\chi_1(\mathbf{x}')\left(\hat{M}_1 - \hat{M}_{ex}\right) + \frac{1}{c}\hat{D}\bar{f}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\chi_1(\mathbf{x}')\hat{j}_1\right\}, \tag{15}$$

где

$$\bar{f}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \frac{\partial}{\partial t} f = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\theta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\nu}\right),$$

$$f(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\nu}\right).$$

Так же как и в общей теории метода интегральных уравнений [4], смысл соотношения (11) существенно зависит от расположения точки наблюдения r. В области V_1, ($\chi_1 = 1$) выражение (11) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода и его решение может быть представлено через резольвенту $\hat{R}$

$$G_1^{in} = \chi_1 G_0 + \chi_1\hat{P}\chi_1 G_0. \tag{16}$$

Вне этой области ($1-\chi_1 = 1$) выражение (11) является квадратурной формулой и функция G_1 будет равна

$$G_1^{(ex)} = (1-\chi_1)G_0 + \hat{K}^{ex}\left(\hat{I} + \chi_1\hat{R}\right)\chi_1 G_0, \tag{17}$$

где индекс (ex) у опратора $\hat{K}$ означает, что аргумент r определен вне области V_1 (переменная же r' принадлежит области V_1).

Объединяя (16) и (17), получим

$$G_1 = G_0 = \chi_1\hat{R}\chi_1 G_0 + (1-\chi_1)\hat{K}^{(ex)}\left(\hat{I} + \chi_1\hat{R}\right)\chi_1 G_0. \tag{18}$$

Следует отметить, что областью изменения аргументов функции Грина $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$ является четырехмерное полупространство $t \geqslant 0$, $-\infty < x, y, z < \infty$, причем $\mathbf{x}'$ по сути дела является параметром.

Построение функции Грина

Конкретное построение функции Грина произведем для случая нестационарного диэлектрического полупространства, ограниченного плоской границей. В этом случае $\hat{P}_1 = (\varepsilon_1 - 1)/4\pi$, $\hat{M}_1 = 0$, $\hat{j}_1 = 0$, $\chi_1 = \theta(x)$. Фоновую среду будем считать немагнитной ($\mu = 1$).

Входящие в (18) операторы являются интегральными операторами $\hat{A} = \int d\mathbf{x}' \left\langle \mathbf{x}|\hat{A}|\mathbf{x}'\right\rangle$. Представим ядра этих операторов в виде обратных преобразований Фурье-Лапласа

$$\left\langle \mathbf{x}|\hat{A}|\mathbf{x}'\right\rangle = \int d\mathbf{p} e^{pt+i\mathbf{k}\mathbf{r}} \left\langle \mathbf{p}|\hat{A}|\mathbf{x}'\right\rangle, \ \mathbf{p} = (p, \mathbf{k}), \ \mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3),$$

$$\int d\mathbf{p} = \int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}, \quad \mathrm{Re}\, p > 0.$$

Тогда при сделанных в начале этого параграфа предложениях ядро оператора $\hat{K}$ будет равно

$$\left\langle \mathbf{p}|\hat{K}|\mathbf{x}'\right\rangle = \frac{\nu_1^2 - \nu^2 \nu^2 Q + p^2 I}{\nu_1^2 p^2 + \nu^2 k^2} e^{-pt' - i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \theta(\mathbf{x}'), \tag{19}$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} k^2 & k_1 \mathbf{k}_\perp \\ k_1 \mathbf{k}_\perp^* & \mathbf{k}_\perp^* \mathbf{k}_\perp \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_\perp = (k_2, k_3), \ \mathbf{k}_\perp^* = \begin{pmatrix} k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

I — единичная матрица, $\nu_1 = c/\sqrt{\varepsilon_1}$.

Резольвентный оператор $\hat{R}$ для полупространства построен в работе [8] и его ядро имеет вид

$$\left\langle \mathbf{p}|\hat{R}|\mathbf{x}'\right\rangle = \frac{\nu_1^2 - \nu^2}{\nu^2} \theta(x) \left\{ \frac{\nu_1^2 Q + p^2 I}{\varphi_1^2 + \nu_1^2 k_1^2} e^{-ik_1 x'} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\varphi_1} \left[\frac{\nu_1^2 Y_1 + p^2 I}{\varphi_1 - i\nu_1 k_1} + \frac{X}{\varphi_1 + i\nu_1 k_1} \right] e^{-\frac{\varphi_1}{\nu_1} x'} \right\} e^{-pt - i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp} \theta(x'), \tag{21}$$

где

$$Y_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\varphi_1^2}{2} & -i\frac{\varphi_1}{\nu_1}\mathbf{k}_\perp \\ -i\frac{\varphi_1}{\nu_1}\mathbf{k}_\perp^* & \mathbf{k}_\perp^* \mathbf{k}_\perp \end{pmatrix},$$

$$X = -\nu_1^2 V_m \begin{pmatrix} k_\perp^2 & i\frac{\varphi_1}{\nu_1}\mathbf{k}_\perp \\ -i\frac{\varphi_1}{\nu_1}\mathbf{k}_\perp^* & \mathbf{k}_\perp^* \mathbf{k}_\perp \end{pmatrix} + 2\nu\nu_1 V_{em} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_\perp^* \mathbf{k}_\perp \end{pmatrix} + p^2 V_e I_\perp, \tag{22}$$

$$V_m = \frac{\nu\varphi - \nu_1\varphi_1}{\nu\varphi + \nu_1\varphi_1}, V_{em} = \frac{\nu_1\varphi - \nu\varphi_1}{\nu\varphi + \nu_1\varphi_1}, V_e = \frac{\nu_1\varphi - \nu\varphi_1}{\nu_1\varphi + \nu\varphi_1}, I_\perp = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$\varphi_i = \sqrt{p^2 + \nu_1^2 k^2}, \quad \mathrm{Re}\,\varphi_i > 0, \quad \mathbf{r}_\perp = (y, z).$$

В виде обратного преобразования Фурье-Лапласа удобно представить и функцию G_0, для которой будем иметь

$$\langle \mathbf{p}|G_0|\mathbf{x}'\rangle = \nu^2 \frac{\nu^2 Q + p^2 I}{p^2(p^2+\nu^2 k^2)} e^{-pt'-i\mathbf{k}\mathbf{r}'}. \tag{24}$$

Произведя умножение операторов, после громоздких выкладок получим

$$\left\langle \mathbf{x}|\hat{R}\chi_1 G_0|\mathbf{x}'\right\rangle = \int d\mathbf{x}'' \left\langle \mathbf{x}|\hat{R}|\mathbf{x}''\right\rangle \langle \mathbf{x}''|\chi_1 G_0|\mathbf{x}'\rangle = -\theta(x)\langle \mathbf{x}|G_0|\mathbf{x}'\rangle +$$

$$+\theta(x)\int d\mathbf{p}_\perp e^{p(t-t')+i\mathbf{k}_\perp(\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}'_\perp)}\frac{\nu_1}{2\varphi_1 p^2}\left\{\left[\theta(x-x')(\nu_1^2\bar{Y}_1+p^2 I)e^{-\frac{\varphi_1}{\nu_1}(x-x')}+\right.\right.$$

$$\left.+\theta(x'-x)(\nu_1^2 Y_1+p^2 I)e^{\frac{\varphi_1}{\nu_1}(x-x')} - X e^{-\frac{\varphi_1}{\nu_1}(x+x')}\right]\theta(x')+$$

$$\left.+\frac{\nu\varphi_1}{\nu_1\varphi}\left[\nu\nu_1 T_m\begin{pmatrix}-k_\perp^2 & i\frac{\varphi}{\nu}\mathbf{k}_\perp\\ i\frac{\varphi_1}{\nu_1}\mathbf{k}_\perp^* & \mathbf{k}_\perp^*\mathbf{k}_\perp\end{pmatrix}+p^2 T_e I_\perp\right]e^{-\frac{\varphi_1}{\nu_1}x+\frac{\varphi}{\nu}x'}\theta(-x')\right\}, \tag{25}$$

где $\bar{Y}_1$ есть комплексно сопряженная к Y_1 матрица, $\mathbf{p}_\perp = (p, \mathbf{k}_\perp)$,

$$T_m = \frac{2\nu_1\varphi}{\nu\varphi+\nu_1\varphi_1}, \quad T_e = \frac{2\nu_1\varphi}{\nu_1\varphi+\nu\varphi_1}. \tag{26}$$

Аналогично

$$\left\langle \mathbf{x}|\hat{K}^{(ex)}(\hat{I}+\hat{R})\chi_1 G_0|\mathbf{x}'\right\rangle = -\theta(-x)\langle \mathbf{x}|G_0|\mathbf{x}'\rangle\theta(x')+$$

$$+\theta(-x)\int d\mathbf{p}_\perp e^{p(t-t')+i\mathbf{k}_\perp(\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}'_\perp)}\frac{\nu}{2\varphi p^2}\left\{X^{(ex)}e^{\frac{\varphi}{\nu}(x+x')}\theta(-x')+\right.$$

$$\left.+\left[\nu\nu_1 T_m\begin{pmatrix}-k_\perp^2 & -i\frac{\varphi_1}{\nu_1}\mathbf{k}_\perp\\ -i\frac{\varphi}{\nu}\mathbf{k}_\perp^* & \mathbf{k}_\perp^*\mathbf{k}_\perp\end{pmatrix}+p^2 T_e I_\perp\right]e^{\frac{\varphi}{\nu}x-\frac{\varphi_1}{\nu_1}x'}\theta(x'),\right\} \tag{27}$$

где

$$X^{(ex)} = -\nu^2 V_m\begin{pmatrix}k_\perp^2 & -i\frac{\varphi}{\nu}\mathbf{k}_\perp\\ i\frac{\varphi}{\nu}\mathbf{k}_\perp^* & \mathbf{k}_\perp^*\mathbf{k}_\perp\end{pmatrix}+2\nu\nu_1 V_{em}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathbf{k}_\perp^*\mathbf{k}_\perp\end{pmatrix}+p^2 V_e I_\perp. \tag{28}$$

Подставив (25) и (27) в (18), получим окончательное выражение для искомой функции Грина при $t \geqslant 0$:

$$G_1 = \theta(x)\left\{[G_{n1}\theta(x-x') + G_{n2}\theta(x'-x) - G_{n3}]\,\theta(x') + G_{n4}\theta(-x')\right\} + \\ + \theta(-x)\left\{G_{s1}\theta(x') + G_{s2}\theta(-x')\right\} + \theta(-x)G_0\theta(-x'). \qquad (29)$$

При $t < 0$ $G_1 = G_0$, так как ядра операторов в (18) равны нулю при $t < 0$. В выражении (29) введены следующие обозначения:

$$G_{nl}(x-x') = \hat{L}\frac{\nu_1}{\varphi_1 p^2}\left(\nu_1^2\bar{Y}_1 + p^2 I\right)e^{-\frac{\varphi_1}{\nu_1}(x-x')},$$

$$G_{n2}(x-x') = \hat{L}\frac{\nu_1}{\varphi_1 p^2}\left(\nu_1^2 Y_1 + p^2 I\right)e^{\frac{\varphi_1}{\nu_1}(x-x')},$$

$$G_{n3}(x+x') = \hat{L}\frac{\nu_1}{\varphi_1 p^2}X e^{-\frac{\varphi_1}{\nu_1}(x+x')},$$

$$G_{n4}(x,x') = \hat{L}\frac{\nu}{\varphi p^2}\left[\nu\nu_1 T_m\begin{pmatrix} -k_\perp^2 & i\frac{\varphi}{\nu}\mathbf{k}_\perp \\ i\frac{\varphi_1}{\nu_1}\mathbf{k}_\perp^* & \mathbf{k}_\perp^*\mathbf{k}_\perp \end{pmatrix} + p^2 T_e I_\perp\right]e^{-\frac{\varphi_1}{\nu_1}x + \frac{\varphi}{\nu}x'},$$

$$G_{s1}(x,x') = \hat{L}\frac{\nu}{\varphi p^2}\left[\nu\nu_1 T_m\begin{pmatrix} -k_\perp^2 & -i\frac{\varphi_1}{\nu_1}\mathbf{k}_\perp \\ -i\frac{\varphi}{\nu}\mathbf{k}_\perp^* & \mathbf{k}_\perp^*\mathbf{k}_\perp \end{pmatrix} + p^2 T_e I_\perp\right]e^{\frac{\varphi}{\nu}x - \frac{\varphi_1}{\nu_1}x'},$$

$$G_{s2}(x+x') = \hat{L}\frac{\nu}{\varphi p^2}X^{(ex)}e^{\frac{\varphi}{\nu}(x+x')}, \qquad (30)$$

где

$$\hat{L} = \frac{1}{2}\int d\mathbf{p}_\perp e^{p(t-t') + i\mathbf{k}_\perp(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)}.$$

Фоновая функция Грина также может быть представлена в виде двух слагаемых

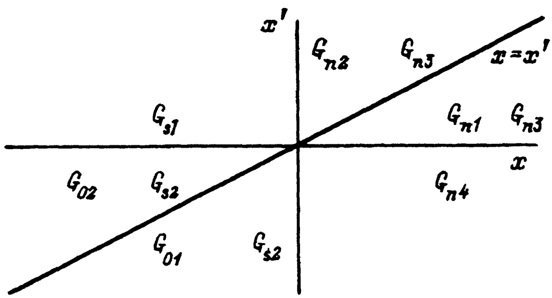
$$G_0 = G_{01}\theta(x-x') + G_{02}\theta(x'-x),$$

$$G_{01}(x-x') = \hat{L}\frac{\nu}{\varphi p^2}\left(\nu^2\bar{Y} + p^2 I\right)e^{-\frac{\varphi}{\nu}(x-x')},$$

$$G_{02}(x-x') = \hat{L}\frac{\nu}{\varphi p^2}\left(\nu^2 Y + p^2 I\right)e^{\frac{\varphi}{\nu}(x-x')}, \qquad (31)$$

в которой матрица Y получается из матрицы Y_1 заменой φ_1 на φ.

Расположение отдельных слагаемых функции Грина G_1 на плоскости (x, x') показано на рисунке.



В силу своих аналитических свойств все функции G_{ai} обращаются в нуль при $t-t' < 0$. Несложно также показать, что при $v1 \to v$ функция G_1 переходит в G_0, так как в результате такого предельного перехода имеем $G_{n3} = G_{s2} = 0$, $G_{n1} = G_{n4} = G_{01}$, $G_{n2} = G_{s1} = G_{o2}$.

Рассмотрим теперь свойства полученной функции Грина на линиях разрыва. Совершая предельные переходы, найдем, что на линии $x = x'$ скачок функции G_1 равен

$$\{G_1\} = G_{n1} - G_{n2} = G_{01} - G_{02} = \hat{L}\frac{2i}{p^2}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{k}_\perp \\ \mathbf{k}_\perp^* & \hat{0} \end{pmatrix}. \tag{32}$$

На линии $x' = 0$ скачок функции G_1 при $x > 0$ равен

$$\{G_1\} = (G_{n1} + G_{n3}) - G_{n4} = \hat{L}\frac{(\nu^2 - \nu_1^2)\nu_1}{\varphi p^2}T_m\begin{pmatrix} k_\perp^2 & 0 \\ -i\frac{\varphi_1}{\nu_1}\mathbf{k}_\perp^* & \hat{0} \end{pmatrix}, \tag{33}$$

при $x < 0$

$$\{G_1\} = G_{s1} - (G_{02} + G_{s2}) = \hat{L}\frac{(\nu^2 - \nu_1^2)\nu^2}{\varphi p^2 \nu_1}T_m\begin{pmatrix} k_\perp^2 & 0 \\ i\frac{\varphi}{\nu}\mathbf{k}_\perp^* & \hat{0} \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Отсюда следует, что применение функции Грина к любому вектору дает вектор, имеющий разрыв на линии $x' = 0$, однако этот разрыв обусловлен только нормальной к плоскости раздела составляющей исходного вектора и в случае его поперечности разрыва нет.

На линии $x = 0$ скачок функции G_1 при $x > 0$ равен

$$\{G_1\} = (G_{n2} = G_{n3}) - G_{s1} = \hat{L}\frac{(\nu^2 - \nu_1^2)\nu_1}{\varphi p^2}T_m\begin{pmatrix} k_\perp^2 & i\frac{\varphi_1}{\nu_1}\mathbf{k}_\perp \\ 0 & \hat{0} \end{pmatrix}, \tag{35}$$

при $x < 0$

$$\{G_1\} = G_{n4} - (G_{01} + G_{s2}) = \hat{L}\frac{(\nu^2 - \nu_1^2)\nu^2}{\varphi p^2 \nu_1}T_m\begin{pmatrix} k_\perp^2 & -i\frac{\varphi}{\nu}\mathbf{k}_\perp \\ 0 & \hat{0} \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Следовательно, на этой линии разрыв имеет только нормальная к плоскости раздела составляющая результирующего вектора, независимо от ориентации исходного вектора.

Интегральное уравнение в случае неоднородности, расположенной в кусочно-однородной среде

Как следует из (4) и (5), электрическое поле в случае диэлектрической неоднородности $V_2(t)$, расположенной в кусочно-однородной диэлектрической среде, удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{4\pi}{c^2}G_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\chi_2(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1), \tag{37}$$

где

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0' - \frac{4\pi}{c^2}G_1\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}_{extr},$$

$\mathbf{E}_0'$ — поле в кусочно-однородной среде без неоднородности V_2.

Полученная функция Грина позволяет выписать соотношения, которым удовлетворяет электрическое поле в случае неоднородности $V_2(t)$, расположенной в среде, представляющей собой два диэлектрических полупространства, разделенных плоской границей, причем в одном из них диэлектрическая проницаемость может испытывать скачкообразные изменения во времени. Если до нулевого момента времени диэлектрическая проницаемость в обоих полупространствах была одинаковой и равна ε, а в нулевой момент времени в полупространстве $x > 0$ она скачком изменилась до величины ε_1, то соотношение для поля примет вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \theta(-t)\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 G_0}{\partial t^2}\chi_2\left(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_{ex}\right) - \theta(t)\frac{4\pi\partial^2 G_1}{c^2\partial t^2}\theta(-t)\chi_2\left(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_{ex}\right) -$$

$$- \theta(t)\frac{4\pi\partial^2 G_1}{c^2\partial t^2}\theta(t)\chi_2\left(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1\right). \tag{38}$$

Второе и третье слагаемые в этом выражении определяются значениями вектора $(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_{ex})$ при $t < 0$. Как следует из этого же выражения, при $t < 0$ поле $\mathbf{E}$ удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \theta(-t)\frac{4\pi\partial^2 G_0}{c^2\partial t^2}\chi_2\left(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_{ex}\right). \tag{39}$$

Найденное отсюда поле будет определять третье слагаемое в (38). Это слагаемое описывает остаточные явления, причиной которых является “память” среды, обусловленная конечностью скорости распространения возмущения и определяющая взаимодействие поля, существовавшего до появления среды с проницаемостью ε_1 в полупространстве $x > 0$, с этим полупространством. Таким образом, это слагаемое можно включить в свободный член соотношения (38), которое теперь при $t > 0$ приметь вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{F} - \frac{4\pi\partial^2 G_1}{c^2\partial t^2}\theta(t)\chi_2\left(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1\right), \tag{40}$$

где

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}_0 - \frac{4\pi\partial^2 G_1}{c^2\partial t^2}\theta(-t)\chi_2\left(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_{ex}\right).$$

Если неоднородность V_2 образовалась после нулевого момента времени, т.е. $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_{ex}$ при $t < 0$, то свободный член в (40) равен невозмущенному полю в фоновой среде $\mathbf{F} = \mathbf{E}_0$.

Дифференцирование по времени в (29) приведет к умножению на p^2 в подынтегральных выражениях для функций G_{ai}. Обозначая полученные таким образом новые функции штрихом, из (40) будем иметь развернутое выражение для поля во всем пространстве

$$\mathbf{E} = \mathbf{F} - \frac{4\pi}{c^2}\theta(-x)\int d\mathbf{x}'\left\{\left[G'_{01}\theta(x-x') + G'_{02}\theta(x'-x) + G'_{s2}\right]\theta(-x') + G'_{s1}\theta(x')\right\}\times$$

$$\times\chi_2(\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1)-\frac{4\pi}{c^2}\theta(x)\int d\mathbf{x}'\Biggl\{\Bigl[G'_{n1}\theta(x-x')+G'_{n2}\theta(x'-x)+G'_{n3}\Bigr]\theta(x')+$$

$$+G'_{n4}\theta(-x')\Biggr\}\chi_2(\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1). \tag{41}$$

Дальнейшая конкретизация этого соотношения зависит от расположения неоднородности V_2. Если она расположена в полупространстве $x>0$, то в этом полупространстве поле будет описываться соотношением

$$\mathbf{E}=\mathbf{F}-\frac{4\pi}{c^2}\int d\mathbf{x}'\hat{L}\Biggl\{\frac{\nu_1}{\varphi_1}(\nu_1^2\bar{Y}_1+p^2I)e^{-\frac{\varphi_1}{\nu_1}(x-x')}\theta(x-x')+$$

$$+\frac{\nu_1}{\varphi_1}(\nu_1^2Y_1+p^2I)e^{\frac{\varphi_1}{\nu_1}(x'-x)}\theta(x-x')-\frac{\nu_1}{\varphi_1}Xe^{-\frac{\varphi_1}{\nu_1}(x+x')}\Biggr\}\chi_2(\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1), \tag{42}$$

причем внутри области V_2 это соотношение представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода.

Рассеяное поле в полупространстве $x<0$ будет определяться формулой

$$\mathbf{E}=\mathbf{F}-\frac{4\pi}{c^2}\int dx'\hat{L}\frac{\nu}{\varphi}\left[\nu\nu_1T_m\begin{pmatrix}-k_\perp^2 & -i\frac{\varphi_1}{\nu_1}\mathbf{k}_\perp\\ -i\frac{\varphi}{\nu}\mathbf{k}_\perp^* & \mathbf{k}_\perp^*\mathbf{k}_\perp\end{pmatrix}+p^2T_eI_\perp\right]\times$$

$$\times e^{\frac{\varphi}{\nu}x-\frac{\varphi_1}{\nu_1}x'}\chi_2(\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1). \tag{43}$$

Как следует из (42) и (43), сбор информации о взаимодействии поля со средой, определяемый интегрированием по переменной x', происходит с весовыми множителями $\exp(\pm x'\varphi_1/\nu_1)$. Вывод информации (зависимость от переменной x) происходит с теми же весовыми множителями в полупространстве $x>0$ (формула (42)) и с множителем $\exp(x\varphi/\nu)$ в полупространстве $x<0$, (формула (43)).

Если область V_2 расположена вне ($x<0$) нестационарного полупространства, то поле в полупространстве ($x>0$) будет определяться формулой

$$\mathbf{E}=\mathbf{F}-\frac{4\pi}{c^2}\int d\mathbf{x}'\hat{L}\frac{\nu}{\varphi}\left[\nu\nu_1T_m\begin{pmatrix}-k_\perp^2 & i\frac{\varphi}{\nu}\mathbf{k}_\perp\\ i\frac{\varphi_1}{\nu_1}\mathbf{k}_\perp^* & \mathbf{k}_\perp^*\mathbf{k}_\perp\end{pmatrix}+p^2T_eI_\perp\right]\times$$

$$\times e^{-\frac{\varphi_1}{\nu_1}x+\frac{\varphi}{\nu}x'}\chi_2(\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1). \tag{44}$$

В полупространстве $x<0$ поле удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{E}=\mathbf{F}-\frac{4\pi}{c^2}\int d\mathbf{x}'\hat{L}\Biggl\{\frac{\nu}{\varphi}(\nu^2\bar{Y}+p^2I)e^{-\frac{\varphi}{\nu}(x-x')}\theta(x-x')+$$

$$+\frac{\nu}{\varphi}(\nu^2Y+p^2I)e^{\frac{\varphi}{\nu}(x-x')}\theta(x'-x)+\frac{\nu}{\varphi}X^{(ex)}e^{\frac{\varphi}{\nu}(x+x')}\Biggr\}\chi_2(\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1), \tag{45}$$

которое также в области V_2 является интегральным уравнением Вольтерра второго рода. В отличие от предыдущего случая эти соотношения описывают сбор информации с весовыми множителями $\exp(\pm x'\varphi/v)$, тогда как вывод с теми же множителями в полупространстве $x < 0$ и с мнжителем $\exp(-x\varphi_1/v1)$ в полупространстве $x > 0$.

Следует отметить симметрию выражений (42), (45) и (43), (44). Первая пара соотношений описывает поле в том из полупространств, в котором расположена область V_2, тогда как вторая — в противоположном полупространстве, причем не имеет значения, в каком из полупространств произошел скачок диэлектрической проницаемости. Следовательно, скачок диэлектрической проницаемости вызывает возмущение поля, которое обладает асимметрией, определяемой расположением неоднородности V_2, а не нестационарного полупространства.

Список литературы

[1] *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. М.: Мир, 1978. Т. 1,2.
[2] *Жук Н.П., Третьяков О.А.* // РиЭ. 1985. Т. 30. № 5. С. 869–875.
[3] *Krueger R.J., Ochs R.L.* // Wave Motion. 1989. Vol. 11. P. 525–543.
[4] *Хижняк Н.А.* Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: Наукова думка, 1986. 280 с.
[5] *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1970. 856 с.
[6] *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.
[7] *Нерух А.Г., Хижняк Н.А.* Современные проблемы нестационарной макроскопической электродинамики. Харьков: НПО "Тест-радио", 1991. 280 с.
[8] *Нерух А.Г.* // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18. Вып. 12. С. 47–50.