

01;03

©1995 г.

УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ТОНКОГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

А.В.Порубов, А.М.Самсонов

Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе РАН,
194021, Санкт-Петербург, Россия
(Поступило в Редакцию 20 апреля 1994 г.)

Показано, что широко применяемое приближение Обербека–Буссинеска непригодно для исследования эволюции нелинейных поверхностных волн в слое вязкой неоднородно прогретой жидкости. Для описания возмущений свободной поверхности слоя из исходной системы уравнений Навье–Стокса получено гиперболическое нелинейное уравнение с дисперсией и диссипацией. Найдены аналитические зависимости величины теплового потока через свободную поверхность от толщины невозмущенного слоя, при которых могут существовать поверхностные уединенные бегущие волны различной формы.

Введение

Мы рассмотрим задачу об аналитическом описании распространения длинных нелинейных волн, возникающих на свободной поверхности тонкого горизонтального слоя вязкой жидкости, при помощи гиперболического уравнения с дисперсией и диссипацией. Плотность жидкости ρ полагается зависящей от изменения температуры T внутри слоя по линейному закону. Для простоты изложения мы не будем учитывать влияние сил поверхностного натяжения.

Нелинейность поверхностной волны обусловлена нелинейностью исходной системы уравнений Навье–Стокса, дисперсия волны возникает вследствие конечных поперечных размеров слоя, а диссипация из-за вязкости исследуемой жидкости. Кроме того, на процесс распространения волны влияет подъемная сила, вызванная неоднородностью плотности $\rho(T)$ жидкости поперек слоя. Действие этой силы, как известно [1–3], может компенсировать действие сил внутреннего трения и даже приводить к притоку энергии в исследуемую систему.

Практический интерес к решению задач о нелинейных волнах в вязких неоднородных жидкостях связан, в частности, с возможностями экспериментального определения параметров жидкости посредством измерения амплитуды и скорости нелинейной поверхностной волны [4], создания изображений на жидких пленках [5], разработкой новых технологий получения материалов на Земле и в космосе [6] и др.

Теория нелинейных волн на тонком слое идеальной жидкости ("на мелкой воде") хорошо разработана (см., например, [7]). Однако переход от модели идеальной жидкости к модели вязкой жидкости приводит к увеличению порядка исходной системы уравнений гидродинамики и, следовательно, к увеличению числа граничных условий. Последнее обстоятельство не позволяет распространить процедуру вывода нелинейных уравнений для мелкой воды непосредственно на случай тонких слоев вязкой жидкости. Часто для описания процессов (например, волновых) в вязкой неравномерно прогретой жидкости используется приближение Обербека-Буссинеска, представляющее собой физически разумное, но не строго обоснованное упрощение исходных уравнений Навье-Стокса [1-3]. В последнее время опубликован ряд работ, указывающих на необходимость отказа от использования этого приближения [8,9]. Известна по крайней мере одна работа, посвященная обоснованию приближения Обербека-Буссинеска для описания движений жидкости в тонком горизонтальном слое [10], но, как будет показано ниже, приведенное там обоснование является недостаточным. Поэтому в качестве исходной целесообразно выбрать полную систему уравнений Навье-Стокса [3].

Отметим, наконец, что возможность существования поверхностных волн в вязкой жидкости существенно зависит от типа граничных условий на нижней поверхности слоя. Если нижняя граница твердая, то волны не затухают только при наличии потока в слое, например развитого течения Пуазейля [11] или при стекании жидкости по наклонной плоскости [12]. Мы будем рассматривать случай свободной нижней границы, когда поверхностные волны могут существовать и без наличия потока. Как было экспериментально установлено [13], приближение свободной нижней границы слоя может соответствовать границе двух несмешивающихся жидкостей, из которых верхняя настолько более вязкая, нежели нижняя, что на этой границе реализуется условие отсутствия касательных напряжений. Недавно в [14] была описана новая колебательная конвективная неустойчивость, возникающая прежде монотонной неустойчивости и только в слоях со свободной нижней границей, при этом на верхней границе слоя образовывались длинные волны. Эти волны в рамках приближения Обербека-Буссинеска были аналитически исследованы при помощи различных эволюционных уравнений [15-18] и гиперболического уравнения [19], учитывающих влияние нелинейности, дисперсии и диссипации на эволюцию поверхностной волны.

Постановка задачи

Рассмотрим слой сильновязкой жидкости постоянной толщины H , расположенной на слое гораздо менее вязкой жидкости. Предполагая при этом, что отношение динамических коэффициентов вязкости этих жидкостей есть малая величина $\delta \ll 1$, будем считать нижнюю границу верхнего слоя свободной от касательных напряжений. Полагая толщину нижнего слоя меньше толщины верхнего, будем пренебрегать деформациями границы раздела и градиентом температуры поперек нижнего слоя. В итоге нижнюю границу верхнего слоя можно считать плоской и изотермической, если нижний слой находится на твердом теплопроводящем основании, а задачу для верхнего слоя рассматривать отдельно.

Расположим декартову систему координат x, z так, чтобы плоскость $z = 0$ совпала с невозмущенной верхней свободной поверхностью слоя. Будем считать, что жидкость является неоднородной, причем ее плотность ρ зависит от температуры T по линейному закону $\rho = \rho^*(T^*)(1 - \beta(T - T^*))$, где T^* есть некоторая постоянная начальная температура, β — коэффициент теплового расширения. Пусть коэффициенты теплопроводности λ , температуропроводности χ , динамический коэффициент вязкости μ и коэффициент второй вязкости ζ суть постоянные величины. Предположим, что атмосферное давление над свободной поверхностью $z = \eta(x, t)$ есть постоянная величина p^* , через верхнюю границу слоя течет постоянный тепловой поток Q ($Q > 0$ при нагреве снизу), а нижняя граница $z = -h$ поддерживается при постоянной температуре T^* .

В рамках этих предположений система уравнений Навье–Стокса имеет вид [3]

$$-\beta T_t + ((1 - \beta T)w)_z + ((1 - \beta T)u)_x = 0, \quad (1)$$

$$\rho^*(1 - \beta T)(u_t + uu_x + wu_z) = -p_x + \mu(u_{zz} + u_{xx}) + \left(\zeta + \frac{\mu}{3}\right)(u_{xx} + w_{zz}), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \rho^*(1 - \beta T)(w_t + uw_x + ww_z) = \\ & = -p_z + \mu(w_{zz} + w_{xx}) - \rho^*g(1 - \beta T) + \left(\zeta + \frac{\mu}{3}\right)(u_{xz} + w_{zz}), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \rho^*c_p(1 - \beta T)(T_t + uT_x + wT_z) = \\ & = \lambda(T_{zz} + T_{xx}) + \mu \left((u_z + w_x)^2 + \frac{4}{3}(u_x^2 - u_x w_z + w_z^2) \right) + \zeta(u_x + w_z)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

На нижней поверхности $z = -1$ поставлены условия непроницаемости, отсутствия касательных напряжений и изотермичности

$$w = 0, \quad u_z + w_x = 0, \quad T = T^*, \quad (5)-(7)$$

в то время как на свободной поверхности $z = \eta(x, t)$ заданы условие непротекания через деформируемую поверхность

$$\eta_t + u\eta_x = w, \quad (8)$$

условия, выражающие баланс сил на верхней границе слоя вязкой жидкости,

$$p - p^* = \frac{2\mu}{1 + \eta_x^2}(w_z + u_x\eta_x^2) - \eta_x(u_z + w_x) + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu\right)(u_x + w_z), \quad (9)$$

$$(1 - \eta_x^2)(u_z + w_x) + 2\eta_x(w_z - u_x) = 0 \quad (10)$$

и условие протекания постоянного потока тепла Q

$$\lambda(T_z - \eta_x T_x) = -Q. \quad (11)$$

Мы будем исследовать отклонения от состояния гидродинамического равновесия $u' = u - u^0$, $w' = w - w^0$, $p' = p - p^0$, $T' = T - T^0$, где равновесные значения определяются как [1-3]

$$u^0 = 0, \quad w^0 = 0, \quad p^0 = p^* - \rho^* g z - \frac{\rho^* g \beta Q}{2\lambda} \left((z + H)^2 - H^2 \right),$$

$$T^0 = T^* - \frac{Q(z + H)}{\lambda}.$$

Ограничимся также рассмотрением эволюции длинных волн на тонком слое жидкости, т.е. будем считать, что поверхностные волны имеют такие амплитуду Ξ и длину L , что $\Xi/H = \nu \ll 1$, $H/L = \varepsilon \ll 1$. Мы будем интересоваться уединенными волнами, возникающими в результате баланса нелинейности, дисперсии и диссипации. Для этого положим $\nu = \varepsilon^2$, что позволяет, как известно из теории нелинейных волн в идеальной жидкости [7], уравновесить влияние нелинейности и дисперсии. Условия, при которых возможен баланс этих факторов с диссипацией будут определены ниже.

Выберем L в качестве масштаба для x , H — для z , $(\Xi\chi)/H^2$ — для компонент вектора скорости u' и w' , $(LH)/\chi$ — для времени t , $(\mu\chi\Xi L^2)/H^5$ — для давления p' , Ξ — для возмущения свободной поверхности η и $(QH)/\lambda$ — для температуры T' . Образует из параметров задачи следующие числа: Прандтля $\text{Pr} = \mu/(\rho^*\chi)$, Рэлея $R = (\rho^*g\beta Q H^4)/(\mu\chi\lambda)$, Галилея $G = (\rho^*gH^3)/\mu^2$, числа $E = (\beta Q H)/\lambda$ и $D = (\mu\chi\lambda)/(\rho^*QH^3)$. Введем обозначение $s = \zeta/\mu$, а безразмерные переменные \bar{x} , \bar{z} , \bar{t} , $\bar{\eta}$, \bar{u}' , \bar{w}' , \bar{p}' , \bar{T}' для простоты будем обозначать в дальнейшем как x , z , t , η , u , w , p , T соответственно. Тогда в безразмерном виде система уравнений Навье-Стокса (1)-(4) примет вид

$$ET_t - \varepsilon([1 - ET + E(1+z)]w)_z - \varepsilon^2([1 - ET + E(1+z)]u)_x = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Pr}}[1 - ET + E(1+z)](\varepsilon^2 u_t + \varepsilon^4 u u_x + \varepsilon^3 w u_z) = \\ & = -p_x + \varepsilon u_{zz} + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{3} + s \right) w_{xz} + \varepsilon^3 \left(\frac{4}{3} + s \right) u_{xx}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Pr}}[1 - ET + E(1+z)](\varepsilon^3 w_t + \varepsilon^5 u w_x + \varepsilon^4 w w_z) = \\ & = -p_z + RT + \varepsilon^2 \left(\frac{4}{3} + s \right) w_{zz} + \varepsilon^3 \left(\frac{1}{3} + s \right) u_{xz} + \varepsilon^4 w_{xx}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$[1 - ET + E(1+z)](\varepsilon T_t + \varepsilon^3 u T_x - \varepsilon^2 w + \varepsilon^2 w T_z) =$$

$$= T_{zz} + \varepsilon^2 T_{xx} + \varepsilon^4 D \left((u_z + \varepsilon w_x)^2 + s(w_z + \varepsilon u_x)^2 \frac{4}{3} (w_z^2 - \varepsilon u_x w_z + \varepsilon^2 u_x^2) \right). \quad (15)$$

Из (6) получаются граничные условия при $z = -1$

$$w = 0, \quad u_z + \varepsilon w_x = 0, \quad T = 0. \quad (16)$$

В безразмерном виде верхняя граница слоя задается в виде $z = \varepsilon^2 \eta$, поэтому граничные условия (8)–(11), записанные в безразмерном виде, следует разложить в окрестности $z = 0$ в ряд по степеням малого параметра ε . В результате получим

$$-w + \varepsilon \eta_t - \varepsilon^2 \eta w_z + \varepsilon^3 u \eta_x = 0(\varepsilon^4), \quad (17)$$

$$p + \varepsilon^2 \left(p_z \eta - \text{Pr}G(1 + E)\eta - \left(\frac{4}{3} + s \right) w_z \right) + \varepsilon^3 \left(\frac{2}{3} - s \right) u_x - \varepsilon^4 \left(2\eta w_{zz} - \frac{1}{2} \eta^2 \right) = 0(\varepsilon^5), \quad (18)$$

$$u_x + \varepsilon w_x + \varepsilon^2 \eta u_{zz} + \varepsilon^3 (2\eta_x w_z + \eta w_{xz}) = 0(\varepsilon^4), \quad (19)$$

$$T_z + \varepsilon^2 \eta T_{zz} + \varepsilon^4 \left(\frac{\eta^2}{2} T_{zzz} - \eta_x T_x \right) = 0(\varepsilon^5). \quad (20)$$

Применимость приближения Обербека–Буссинеска

Широко применяемое приближение Обербека–Буссинеска может быть получено из (12)–(20), если формально положить E , D и s равными нулю. Для обоснования этой аппроксимации в [10] было предложено считать E и D малыми параметрами, а приближение Обербека–Буссинеска рассматривать в качестве нулевого приближения при построении асимптотического решения путем разложения в ряд по целым степеням этих параметров. Однако в [10] не было учтено то обстоятельство, что число Рэлея R и E связаны между собой соотношением $R = \text{Pr}G \cdot E$. Поскольку числа Прандтля Pr и Галилея G считаются величинами порядка единицы, то $R = 0(E)$. Поэтому в качестве нулевого по E приближения вместо аппроксимации Обербека–Буссинеска возникает система уравнений для вязкой несжимаемой жидкости постоянной плотности, а вклад архимедовой силы в волновое движение будет малым возмущением. Таким образом, приближение Обербека–Буссинеска неприменимо для решения поставленной задачи, следовательно, нельзя пренебречь сжимаемостью жидкости. Мы также не будем рассматривать упрощенную постановку задачи, когда E наряду с ε является малым параметром, поскольку при этом оказывается невозможным баланс между архимедовой силой и силой внутреннего трения. В результате неоднородность температуры внутри слоя будет вызывать только малые изменения параметров волны, существующей за счет баланса нелинейности и диссипации, в то время как волны, возникающие в результате баланса нелинейности и дисперсии либо нелинейности, дисперсии и диссипации, не будут описываться в рамках упрощенной постановки задачи. Поэтому мы будем искать формальное решение полной системы уравнений (12)–(20), считая ε единственным малым параметром задачи. С другой стороны, следует помнить, что $|E| < 1$, иначе плотность жидкости уже не будет зависеть от температуры T по линейному закону. В результате мы имеем следующее соотношение для величин E и ε , $\varepsilon \ll |E| < 1$. Как будет показано ниже, влиянием слагаемых, пропорциональных величинам D и s в (12)–(20), можно пренебречь.

Вывод уравнения для нелинейных поверхностных волн

Решение задачи (12)–(20) для неизвестных u , w , p , T будем искать в виде ряда по целым степеням ε

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \\ w &= w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots, \\ p &= p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots, \\ T &= T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \dots \end{aligned}$$

Алгоритм построения решения k -го по ε приближения ($k \geq 0$) заключается в следующем. Вначале из уравнения (15) находится T_k с учетом граничных условий (16), (20). Подставляя найденное выражение в уравнение (12), находим w_k с учетом (16). Выражение для p_k получаем из уравнения (14) и граничного условия (18) после подстановки T_k в (14). Наконец, u_k определяется из уравнения (13) и граничных условий (16) и (19). Отметим, что выражение для u_k содержит произвольную функцию от x и t , поскольку (16) и (19) суть граничные условия второго рода. Однако при решении задачи следующего, $(k+1)$ -го приближения возникает условие разрешимости системы (13), (16) и (19), которое представляет собой уравнение для этой произвольной функции. Подробное решение задачи связано с громоздкими выкладками, и поэтому мы упомянем лишь наиболее важные для дальнейшего результаты. В частности, оказалось, что в главном порядке скорость u не зависит от z , $u_0 = U(x, t)$, а при решении задачи следующего приближения для удовлетворения граничного условия $u_{1,z} = 0$, следующего из (19), необходимо выполнить условие разрешимости вида

$$U_t + \frac{2(1+E)\text{Pr}^2 G}{2+E} \eta_x = 0. \quad (21)$$

Выражение для скорости u_1 содержит произвольную функцию $V(x, t)$, которая определяется через $U(x, t)$ из условия разрешимости $u_{2,z} + w_{1,x} = 0$ при $z = 0$, следующего из (19) в приближении $0(\varepsilon^2)$

$$V_t = \frac{2\text{Pr}}{2+E} \left(\left(3 + \frac{1}{1+E} - \frac{2\text{Pr}GE}{15} - \frac{7\text{Pr}GE^2}{144} \right) U_{xx} + \frac{E(10+7E)}{240\text{Pr}^2} U_{tt} \right). \quad (22)$$

Второе в дополнение к (21) уравнение для нахождения неизвестных функций $U(x, t)$ и $\eta(x, t)$ мы получаем после подстановки выражений для u_0 , w_k , $k = 0-3$ в не использованное ранее граничное условие (17)

$$\begin{aligned} \eta_t + a_1 U_x + \varepsilon \left[a_2 U_{xt} + a_3 \int U_{xxx} dt \right] + \varepsilon^2 \left[(\eta U)_x - a_4 \eta U_x - a_5 \int (\eta^2)_{xx} dt - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} a_1 \int (U^2)_{xx} dt + a_6 U_{xxx} + a_7 U_{xtt} + a_2 V_{xt} + a_3 \int V_{xxx} dt \right] = 0(\varepsilon^3). \quad (23) \end{aligned}$$

Выражения для коэффициентов уравнения (23) $a_1 - a_7$ приведены в Приложении.

Путем несложных преобразований из (21)–(23) можно получить следующее нелинейное гиперболическое уравнение с дисперсией и диссипацией:

$$\eta_{tt} - A\eta_{xx} - \varepsilon(B\eta_{xxt} + C\eta_{xtt}) - \varepsilon^2(2D(\eta \int \eta_t dx)_{xt} + F(\eta^2)_{tt} + D((\int \eta_t dx)^2)_{xx} + G(\eta^2)_{xx} + M\eta_{xxxx}) = 0, \quad (24)$$

пренебрегая слагаемыми порядка $0(\varepsilon^3)$. Выражение для коэффициентов уравнения (24), зависящие от E , Pr , G , также приведены в Приложении.

Уединенные поверхностные бегущие волны

Ограничимся рассмотрением точных решений уравнения (24), имеющих вид бегущей волны. Введем новую фазовую переменную $\theta = x - vt$ и предположим, что неизвестная функция η зависит только от θ . В этом случае уравнение (24) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, которое можно дважды проинтегрировать по θ . В результате имеем

$$\varepsilon^2 M \eta_{\theta\theta} + \varepsilon(Bv^2 + C)v\eta_{\theta} + \varepsilon^2[G + (3D + F)v^2]\eta^2 + (v^2 - A)\eta = N, \quad (25)$$

где $N = \text{const}$.

Используя метод построения точных решений нелинейных диссипативных уравнений при помощи эллиптической функции Вейерштрасса \wp [20], можно получить следующее решение уравнения (25)

$$\eta = b_1 \wp(\theta) + \frac{b_2 \wp_{\theta}}{\wp + b_3} + b_4, \quad (26)$$

где $b_1 \div b_4$ определяются путем решения системы алгебраических уравнений, возникающих после подстановки (26) в уравнение (25) и приравняв к нулю коэффициентов при одинаковых степенях функции \wp и \wp_{θ} .

В частном случае (26) представляет собой ограниченное решение в виде уединенной волны

$$\eta = \frac{6k^2 M}{G + (3D + F)v^2} \text{ch}^{-2}(k\theta) + \frac{6k(Bv^2 + C)v}{5\varepsilon[G + (3D + F)v^2]} \text{th}(k\theta) + \tilde{\eta}, \quad (27)$$

где $\tilde{\eta}$ — свободный параметр.

Для фазовой скорости волны v и числа k справедливы соотношения

$$v^2 = \frac{A - 2\varepsilon^2 \tilde{\eta} G}{1 + 2\varepsilon^2(3D + F)}, \quad k = \frac{(Bv^2 + C)v}{10\varepsilon M}$$

при условии что $AB + C \neq 0$ (запись этого выражения в физических переменных приведена в Приложении). При $AB + C = 0$ параметр k произволен, а скорость определяется равенством

$$v^2 = \frac{A - 2\varepsilon^2 \tilde{\eta} G - 4\varepsilon^2 k M}{1 + 2\varepsilon^2(3D + F)}.$$

В последнем случае двухпараметрическое решение (27) есть уединенная волна колоколообразной формы, возникающая в результате баланса нелинейности и дисперсии, в то время как при $AB + C \neq 0$ мы имеем однопараметрическое решение, представляющее собой уединенную волну в форме кинка. Этот кинк возникает в результате баланса трех факторов: нелинейности, дисперсии и диссипации. Однако это формально найденное точное решение будет пригодно для решения рассматриваемой физической задачи при дополнительном ограничении на коэффициенты уравнения, а именно $AB + C = \varepsilon q$, где q есть величина порядка единицы. В противном случае решение (27) будет стремиться к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Очевидно, что при $AB + C = 0(1)$ диссипативное слагаемое в уравнении (24) оказывается больше нелинейного и дисперсионного слагаемых по порядку величины. Поэтому в зависимости от знака выражения $AB + C$ будет наблюдаться затухание (при $AB + C > 0$) или усиление (при $AB + C < 0$) с течением времени исходной поверхностной волны. Следовательно, в первом случае возмущение поверхности успеет затухнуть раньше, чем проявятся нелинейность и дисперсия, а во втором случае увеличение амплитуды начального импульса приведет к изменению характерных амплитуд возмущения свободной поверхности η по порядку величины. При $\eta \simeq \varepsilon^{-1}$ нелинейное слагаемое станет того же порядка, что и диссипативное, и дальнейшая эволюция поверхностной волны уже не будет описываться в рамках рассматриваемой постановки задачи.

Если при обезразмеривании в исходной постановке задачи (1)–(11) изменить масштаб Ξ для возмущений свободной поверхности η , положив $\Xi/H = \varepsilon$, а остальные масштабы оставить прежними, то описанная выше процедура вывода уравнения (24) приведет с точностью до членов порядка ε к нелинейному уравнению с диссипацией, но без дисперсии

$$\eta_{tt} - A\eta_{xx} - \varepsilon(B\eta_{xxt} + C\eta_{xtt} + 2D(\int \eta_t dx)_{xt}) - F(\eta^2)_{tt} + D[(\int \eta_t dx)^2]_{xx} + G(\eta^2)_{xx} = 0. \quad (28)$$

Его ограниченное точное решение в виде бегущей уединенной волны имеет форму кинка

$$\eta = \frac{(Bv^2 + C)vk}{G + (3D + F)v^2} \operatorname{th}(k\theta) + \tilde{\eta}, \quad (29)$$

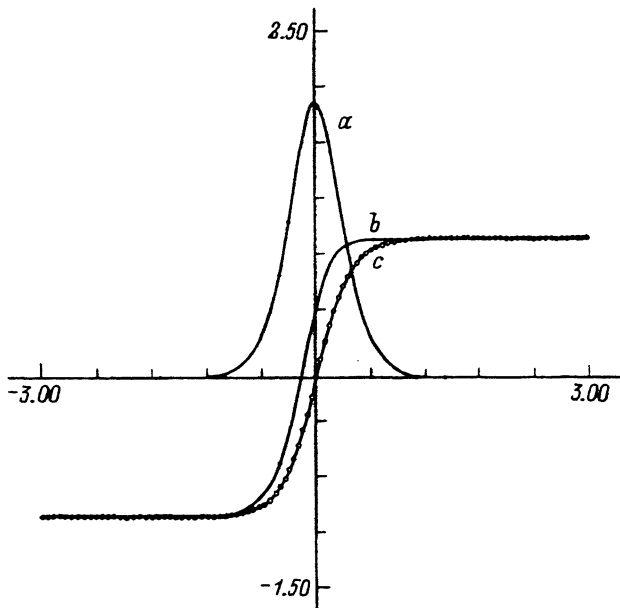
где $\theta = k(x - vt)$,

$$v^2 = \frac{A - 2\varepsilon\eta G}{1 + 2\varepsilon\eta(3D + F)},$$

k и $\tilde{\eta}$ — свободные параметры.

Таким образом, при $AB + C < 0$ также может существовать уединенная волна, возникающая в результате баланса нелинейности и диссипации. Дисперсия в ее формировании не играет роли.

В отличие от кинкового решения (27) кинк (29) есть двухпараметрическое решение уравнения (25). В то же время, записав решение (27)



Сравнение формы уединенной волны в разных областях существования решения. a — солитон (4.3), b — кинк (4.3), c — кинк (4.5).

через экспоненты

$$\eta = - \left(\frac{24k^2 M}{G + (3D + F)v^2} \right) \frac{\exp(-4k\theta)}{(1 + \exp(-2k\theta))^2} + \tilde{\eta} + \frac{12k^2 M}{G + (3D + F)v^2},$$

нетрудно убедиться в том, что в окрестности $\theta \rightarrow 0$ кинковое решение (27) ведет себя аналогично кинку (29) даже при очень малых значениях $(AB + C) \rightarrow 0$. На рисунке представлены все уединенные волны (27), (29).

Обсуждение результатов

В предыдущем разделе мы показали, что уравнение (24) обладает при определенных условиях точными квазистационарными решениями в виде уединенных волн различной формы. Рассмотрим физические условия для толщины слоя и величины теплового потока Q , при которых могут существовать рассмотренные в предыдущем разделе уединенные волны (27), (29). Условие $AB + C = 0$ существования уединенной волны колоколообразной формы сводится к соотношению

$$R = - \frac{720(4 + 3E)}{(1 + E)(54 + 19E)} = - \frac{160}{3} + \frac{2600E}{81} + o(E^2) \quad (30)$$

и выполняется только при отрицательных допустимых значениях E , $\varepsilon \ll -E < 1$. Рассмотрим в качестве примера слой глицерина и трансформаторного масла. Выберем E , исходя из того, что характерный перепад температур поперек слоя QH/λ должен быть порядка

10–20 °С. При больших градиентах температуры следует учитывать температурные зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности. В результате подходящим значением E для обеих жидкостей будет $E = -0.01$. Тогда для глицерина условие (30) реализуется при толщине слоя $H = 3.94$ мм, при этом величина теплового потока $Q = -1.42$ кДж/(м² · с), для трансформаторного масла имеем $H = 1$ мм при потоке $Q = -1.63$ кДж/(м² · с); оба значения Q обеспечивают небольшой перепад температуры. Таким образом, существование уединенной волны колоколообразной формы на поверхностях ряда вязких жидкостей возможно лишь при малых толщинах слоев. Очевидно, что и условие существования кинка $AB + C = \varepsilon q$ также может быть реализовано для тонких слоев рассматриваемых жидкостей. Заметим, что выведенное в рамках приближения Обербека–Буссинеска [15] условие существования уединенной волны колоколообразной формы $R = 30$ также может быть выполнено при малых значениях толщины слоя вязких жидкостей. Например, при $E = 0.01$ (т.е., только при нагреве снизу) с учетом соотношения $R = \text{Pr}GE$ мы получаем для глицерина $H = 3.25$ мм, для трансформаторного масла $H = 0.82$ мм.

Уединенная волна в форме кинка (29) может распространяться при

$$R < \frac{720(4 + 3E)}{(1 + E)(54 + 19E)}. \quad (31)$$

Условие (31) также выполняется только для отрицательных значений E (нагрев сверху), однако допускает и не слишком малые значения толщины невозмущенного слоя H . При нагреве снизу длинные поверхностные волны будут затухать вследствие вязкости жидкости. Поскольку условия (30) и (31) для заданной жидкости суть аналитические соотношения между величинами теплового потока Q и толщиной невозмущенного слоя H , то, подобрав Q и H соответствующим образом, можно получать на поверхности слоя произвольной сильновязкой жидкости уединенную волну либо колоколообразной формы, либо в форме кинка (27) или (29).

Обсудим изменения в решении поставленной задачи, вызванные отказом от применения приближения Обербека–Буссинеска. В частных случаях уравнение (24) может быть сведено в одноволновом приближении к уравнениям Кортевега-де-Вриза, Бюргерса и Кортевега-де-Вриза–Бюргерса, предлагавшимся ранее в качестве модельных в рамках этого приближения [15, 17–19]. Однако отличие в коэффициентах в (24) приводит к качественно другим результатам. В частности, из условий существования уединенных волн следует, что они могут распространяться при нагреве слоя сверху, в то время как в рамках приближения Обербека–Буссинеска предсказывалось существование волны только при нагреве снизу [14, 15]. Причина этого расхождения заключается в изменении коэффициентов при диссипативных слагаемых в уравнении (24). Оно вызвано влиянием слагаемого ET_t в уравнении неразрывности (12), обусловленного сжимаемостью жидкости. Учет этого слагаемого приводит к существенному изменению условия существования уединенной волны $R = 30$, найденного в рамках приближения Обербека–Буссинеска [14, 15], так как числа E и R являются величинами одного порядка. Таким образом, сжимаемостью жидкости

нельзя пренебрегать при описании длинных поверхностных волн на тонких слоях вязких неоднородных жидкостей. Известно, что сильные качественные отличия в поведении поверхностных волн, обусловленные учетом сжимаемости, были ранее установлены при аналитическом исследовании внутренних волн в стратифицированной идеальной жидкости [21].

Параметры D и s не вошли в выражения для коэффициентов уравнения (24). Следовательно, влиянием второй вязкости можно пренебречь, а уравнение энергии (4) при постановке задачи записывать так же, как и в приближении Обербека-Буссинеска. Ранее такое же уравнение энергии использовалось в [9] для моделирования конвективного движения жидкости при пониженной гравитации, основанного на отказе от приближения Обербека-Буссинеска.

Анализ условия существования уединенных волн (27) показал, что для ряда сжимаемых вязких жидкостей оно выполняется только для очень тонких слоев. Следовательно, для более точного описания процесса распространения уединенных волн, возникающих за счет баланса нелинейности и дисперсии или за счет баланса нелинейности, дисперсии и диссипации, необходим учет сил поверхностного натяжения.

Авторы выражают благодарность профессору В.В.Пухначеву за информацию о работе [9]. Работа частично поддержана грантом РФФИ № 94-01-00601-а.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выражения для коэффициентов $a_1 - a_7$ в уравнении (23)

$$a_1 = \frac{2 + E}{2(1 + E)}, \quad a_2 = \frac{E}{(1 + E)} \left(\frac{5}{24} + \frac{3E}{40} \right),$$

$$a_3 = \frac{\text{Pr}}{(1 + E)} \left(\frac{4 + 3E}{1 + E} - \frac{(96 + 35E)E\text{Pr}G}{720} \right),$$

$$a_4 = \frac{Ea_1}{1 + E}, \quad a_5 = \frac{\text{Pr}^2GE}{2(1 + E)(2 + E)},$$

$$a_6 = \frac{\text{Pr}}{(1 + E)} \left(\frac{1}{3\text{Pr}} + \left(\frac{17\text{Pr}G}{315} + \frac{5}{12(1 + E)} - \frac{1}{12\text{Pr}(1 + E)} \right) E + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{13\text{Pr}G}{360} + \frac{67G}{40320} + \frac{3}{20(1 + E)} + \frac{7}{120\text{Pr}(1 + E)} \right) E^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{19\text{Pr}G}{6048} + \frac{311G}{145152} \right) E^3 \right), \quad a_7 = -\frac{E}{(1 + E)} \times$$

$$\times \left(\frac{61}{720} + \left(\frac{71}{1260} + \frac{29}{5040\text{Pr}} \right) E^2 + \left(\frac{11}{1120} + \frac{1}{360\text{Pr}} \right) E^3 \right).$$

$$A = \text{Pr}^2 G, \quad B = \frac{a_2}{a_1}, \quad C = \frac{a_3}{a_1}, \quad D = \frac{1}{2a_1}, \quad F = -\frac{E}{2}, \quad G = \frac{a_5}{a_1},$$

$$M = \left(\frac{a_2 a_3}{a_1^2} + \frac{a_3 a_8}{a_1^2} + \frac{a_6}{a_1} \right) \text{Pr}^2 G - \left(\frac{a_2^2}{a_1^2} - \frac{a_2 a_3}{a_1^2} - \frac{a_7}{a_1} \right) \text{Pr}^4 G^2,$$

$$a_8 = \frac{E}{12(2+E)\text{Pr}} \left(1 + \frac{7E}{10} \right),$$

$$AB + C = \text{Pr}^2 G \frac{2E}{(2+E)} \left(\frac{5}{24} + \frac{3E}{40} \right) + \frac{2\text{Pr}}{(2+E)} \left(\frac{4+3E}{1+E} - \frac{(96+35E)E\text{Pr}G}{720} \right).$$

Список литературы

- [1] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 389 с.
- [2] Джозеф Д.Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.
- [3] Ландау Л.Д., Лифшиц В.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
- [4] Порубов А.В., Самсонов А.М. // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19. Вып. 1. С. 15.
- [5] Безуглый Б.А., Майоров В.А. // Журн. науч. прикл. фото- и кинематографии. 1981. Т. 26. Вып. 6. С. 422-429.
- [6] Авдучевский В.С. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье-Стокса. М.: Наука, 1987. 271 с.
- [7] Абловиц М., Сегюр Х. Солитоны и метод обратный задачи. М.: Мир, 1987. 479 с.
- [8] Fröhlich J., Laure P., Peyret R. // Phys. Fluids A. 1992. Vol. 4. P. 1355.
- [9] Pukhnachov V.V. // Microgravity Q. 1992. Vol. 2. N 4. P. 251.
- [10] Mihaljan J.M. // Astrophys. J. 1962. Vol. 136. P. 1126.
- [11] Johnson R.S. // Phys. Fluids. 1972. Vol. 15. N 10. P. 1693.
- [12] Topper J., Kawahara T. // J. Phys. Soc. Jap. 1976. Vol. 44. P. 663.
- [13] Goldstein R.J., Graham D.J. // Phys. Fluids. 1969. Vol. 12. P. 1133-1137.
- [14] Benguria R., Depassier M.C. // Phys. Fluids A. 1989. Vol. 1. P. 1123-1127.
- [15] Aspe H., Depassier M.C. // Phys. Rev. A. 1990. Vol. 41. P. 3125.
- [16] Garazo A., Velarde M.G. // Phys. Fluids A. 1991. Vol. 3. P. 2295.
- [17] Kraenkel R.A., Kurcbart S.M., Pereira J.G., Manna M.A. // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 47. N 5. P. 3303.
- [18] Kraenkel R.A., Pereira J.G., Manna M.A. // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 45. P. 838.
- [19] Порубов А.В. Препринт ФТИ. № 1502. Л., 1991. 28 с.
- [20] Samsonov A.M. // Nonlinear Waves and Dissipative Effects / Ed. D.Fusco, A.Jeffrey. Longman, 1991. P. 123-132.
- [21] Miesen R.H.M., Kamp L.P.J., Sluijter F.W. // Phys. Fluids. A. 1990. Vol. 2. N 3. P. 359.