

01;02;10

©1994 г.

НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЛОВУШКИ С ВЫНУЖДЕННО ИЗЛУЧАЮЩИМИ ЗАРЯДАМИ

А. Ф. Курин

Воронежский государственный университет, 394693

Поступило в Редакцию 28 июля 1993 г.

В окончательной редакции 16 декабря 1993 г.)

В рамках метода усреднения рассмотрено вынужденное излучение зарядов в электромагнитной ловушке, созданной двумя встречными циркулярно поляризованными волнами с произвольными амплитудами и начальными фазами. Исследован несинхронный режим излучения. Описан новый высокоэффективный синхронный режим, возникающий в результате биений двух колебаний зарядов, возбуждаемых полем.

Введение

В работе [1] описано вынужденное излучение зарядов при их отражении и удержании стоячим циркулярно поляризованным электромагнитным полем. Аналитическое исследование эффектов оказалось возможным в результате аппроксимаций, сделанных на основе качественных физических рассуждений. Аппроксимации упростили задачу, сведя ее к линейной.

В настоящей работе в рамках метода усреднения [2] рассматривается нелинейная задача о взаимодействии поля и зарядов. Такой подход позволяет обосновать справедливость результатов в [1] (они соответствуют первому приближению метода усреднения) и учесть влияние нелинейностей. Далее, в настоящей работе существенно ослаблено требование к структуре высокочастотного поля, в котором проявляются эффекты: взаимодействие рассматривается в полях двух встречных волн с произвольными амплитудами и начальными фазами в отличие от [1], где использовалось стоячее поле. Наконец, анализируется новый высокоэффективный (КПД ~ 1) синхронный режим вынужденного излучения в ловушке. Энергообмен происходит в результате биений двух колебаний зарядов. Биения здесь возможны, поскольку известно [1], что в ловушке полем возбуждается характерное двухчастотное

движение и выбором параметров можно сделать близкими частоты колебаний.

Как и в [1], взаимодействие рассматривается в приближении заданных амплитуд волн, пространственный заряд не учитывается.

1. Рассмотрим нерелятивистское движение заряда e в магнитоэлектрическом поле $B_0 = (0, 0, B_0)$ и в полях двух бегущих навстречу друг другу вдоль z циркулярно поляризованных волн с вращением их в направлении, противоположном циклотронному движению заряда в B_0 (обыкновенные волны)

$$\mathbf{E} = 0.5(E_1 \cos \Phi_1 - E_2 \cos \Phi_2, -E_1 \sin \Phi_1 + E_2 \sin \Phi_2, 0),$$

$$\mathbf{B} = 0.5n(E_1 \sin \Phi_1 + E_2 \sin \Phi_2, E_1 \cos \Phi_1 + E_2 \cos \Phi_2, 0),$$

$$\Phi_1 = \omega t - nkz + \xi_1, \quad \Phi_2 = \omega t + nkz + \xi_2, \quad k = \omega/c. \quad (1)$$

Здесь E_1, E_2 — постоянные амплитуды волн; ξ_1, ξ_2 — начальные фазы; n — показатель преломления немагнитной среды. При $E_1 = E_2, \xi_1 = \xi_2$ имеем стоячее поле. Если на плоскости составляющих $\beta_x = v_x/c, \beta_y = v_y/c$ скорости, поперечной к B_0 , перейти к системе координат, вращающейся с частотой поля ω , по формулам

$$\begin{aligned} \beta'_x &= \beta_x \sin \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2} + \beta_y \cos \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}, \\ \beta'_y &= -\beta_x \cos \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2} + \beta_y \sin \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}, \end{aligned} \quad (2)$$

то приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\beta'_x}{dT} &= -g'\beta'_y - \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} n\beta_z \right) \sin \psi, \\ \frac{d\beta'_y}{dT} &= g'\beta'_x + \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} n\beta_z \right) \cos \psi, \\ \frac{d\beta_z}{dT} &= -n \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \beta'_x \sin \psi - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \beta'_y \cos \psi \right), \\ \frac{d\psi}{dT} &= n\beta_z, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\beta_z = v_z/c, g' = 1 + g$ ($g = \omega_0/\omega, \omega_0 \doteq eB_0/(m_0c)$ — циклотронная частота), $\varepsilon_{1,2} = eE_{1,2}/(m_0\omega c)$ — параметры электрического поля волн, $\psi = (\Phi_2 - \Phi_1)/2 = nkz + (\xi_2 - \xi_1)/2, T = \omega t$.

При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (стоячее поле) из (3) получается система (4) работы [1]. Для оценок амплитуд и рабочей длины волны $\lambda = 2\pi c/\omega$ удобно пользоваться выражением $\varepsilon_{1,2} = 3.1 \cdot 10^{-2} \lambda(M) E_{1,2}$ (кВ/см), справедливым для электрона.

Будем считать, что частица инжектируется в поле в минимуме его электрической составляющей. Можно убедиться с помощью (1), что этот минимум приходится на значение $\psi = 0$ и равен $|\mathbf{E}| = 0.5|E_1 - E_2|$.

Магнитная составляющая при $\psi = 0$ имеет максимум, равный $|\mathbf{B}| = 0.5n(E_1 + E_2)$. Тогда начальными условиями для системы (3) будут значения $T = T_0$, $\beta'_x = \beta'_{x0}$, $\beta'_y = \beta'_{y0}$, $\beta_z = \beta_{z0}$, $\psi = 0$. Причем β'_{x0} , β'_{y0} вычисляются по формулам (2) через начальные значения составляющих скорости β_{x0} , β_{y0} в лабораторной системе при аргументе в (2) $0.5(\Phi_1 + \Phi_2) = T_0 + 0.5(\xi_1 + \xi_2)$.

Преобразуем систему (3) к виду, удобному для использования метода усреднения [2]. С помощью разложений $\sin \psi = \psi - \psi^3/6 + \dots$, $\cos \psi = 1 - \psi^2/2 + \dots$, выделяя в (3) линейные слагаемые, получим систему

$$\begin{aligned} \frac{d\beta'_x}{dT} &= -g'\beta'_y - p_h\psi + f_1(\beta_z, \psi), \\ \frac{d\beta'_y}{dT} &= g'\beta'_x - np_h\beta_z + p_e + f_2(\beta_z, \psi), \\ \frac{d\beta_z}{dT} &= np_h\beta'_y + f_3(\beta'_x, \beta'_y, \psi), \\ \frac{d\psi}{dT} &= n\beta_z, \end{aligned} \quad (4)$$

в которой через f_i обозначены нелинейные слагаемые

$$\begin{aligned} f_1 &= np_e\beta_z\psi + p_h\psi^3/6 - np_e\beta_z\psi^3/6 - p_h\psi^5/120 + \dots, \\ f_2 &= -p_e\psi^2/2 + np_h\beta_z\psi^2/2 + p_e\psi^4/24 - np_h\beta_z\psi^4/24 + \dots, \\ f_3 &= -np_e\beta'_x\psi - np_h\beta'_y\psi^2/2 + np_e\beta'_x\psi^3/6 + np_h\beta'_y\psi^4/24 + \dots, \\ p_e &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/2, \quad p_h = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2. \end{aligned} \quad (5)$$

Решим сначала порождающую линейную систему ($f_i = 0$ в (5)). Ее характеристическое уравнение является биквадратным и имеет корни $k_{1,2} = \pm i\lambda_1$, $k_{3,4} = \pm i\lambda_2$, где

$$\lambda_{1,2} = \left(\frac{\mu^2 + g'^2}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2} \right)^{1/2}. \quad (6)$$

В выражении (6) $D = (\mu^2 + g'^2)^2 - 4\mu^2g'$, $\mu = np_h$. При $g' > 0$ и $D > 0$ все корни мнимые различные и порождающая система описывает гармонические двухчастотные колебания с характерными частотами $\lambda_{1,2}$. Этому случаю ограниченного решения на рис. 1 соответствует заштрихованная область I значений параметров μ , g . Отметим, что точки, расположенные в I вблизи замкнутой кривой, соответствуют близким частотам $\lambda_1 \simeq \lambda_2$. В области II внутри замкнутой кривой на рис. 1 $g' > 0$, $D < 0$ и имеем две пары комплексно сопряженных корней характеристического уравнения. В области III $g' < 0$, $D > 0$ и получаем два вещественных и два мнимых корня.

Дальнейшее изложение относится к режиму усиления поля, что обеспечивается выбором параметров g , μ в области I [1]. Укажем, что в

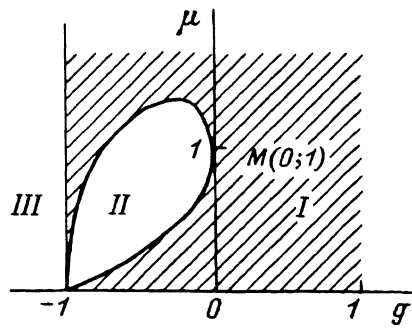


Рис. 1.

области II имеет место режим ускорения зарядов, колебательное движение которых раскачивается полем (амплитуда колебаний в решении порождающей системы растет экспоненциально).

Запишем решение порождающей системы в переменных Ван-дер-Поля x_i, y_i ($i = 1, 2$) [2]

$$\begin{aligned} \psi &= x_1 \cos y_1 + x_2 \cos y_2, & \beta_z &= a_1 x_1 \sin y_1 + a_2 x_2 \sin y_2, \\ \beta'_y &= b_1 x_1 \cos y_1 + b_2 x_2 \cos y_2, & \beta'_x &= d_0 + d_1 x_1 \sin y_1 + d_2 x_2 \sin y_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Коэффициенты в (7) равны

$$q_{1,2} = -\frac{\lambda_{1,2}}{n}, \quad b_{1,2} = -\frac{\lambda_{1,2}^2}{n\mu}, \quad d_0 = -\frac{pe}{g'}, \quad d_{1,2} = \frac{\lambda_{1,2}}{n\mu g'} (\lambda_{1,2}^2 - \mu^2). \quad (8)$$

Амплитуды колебаний $x_{1,2}$ и фазы $y_{1,2}$ в (7) выражаются через начальные значения $\beta'_{x0}, \beta'_{y0}, \beta_{z0}$ по формулам

$$x_1 = (C_1^2 + C_2^2)^{1/2}, \quad x_2 = (C_3^2 + C_4^2)^{1/2}, \quad (9)$$

$$y_{1,2} = \lambda_{1,2}(T - T_0) + \gamma_{1,2}, \quad \text{tg } \gamma_1 = -C_2/C_1, \quad \text{tg } \gamma_2 = -C_4/C_3,$$

где

$$C_{1,3} = \beta'_{y0} \frac{n\mu}{\lambda_{2,1}^2 - \lambda_{1,2}^2}, \quad C_{2,4} = \frac{n\mu g'}{\lambda_{1,2}(\lambda_{2,1}^2 - \lambda_{1,2}^2)} \left(\beta'_{x0} + \frac{pe}{g'} + \beta_{z0} \frac{\lambda_{2,1}^2 - \mu^2}{g'\mu} \right). \quad (10)$$

Заметим, что наличие при $pe \neq 0$ в проекции скорости β'_x (7) постоянной составляющей d_0 не приводит к поступательному движению (дрейфу) в лабораторной системе координат, в чем можно убедиться, если подставить (7) в (2), т.е. имеем ограниченное движение и при $pe \neq 0$.

Используя идею вариации произвольных постоянных, как в методе Ван-дер-Поля для одночастотных колебаний [2], для x_i, y_i получаем систему уравнений

$$\frac{dx_{1,2}}{dT} = \mp \left(\frac{a_{2,1}f_1 - d_{2,1}f_3}{a_1d_2 - d_1a_2} \sin y_{1,2} + \frac{f_2}{b_2 - b_1} \cos y_{1,2} \right),$$

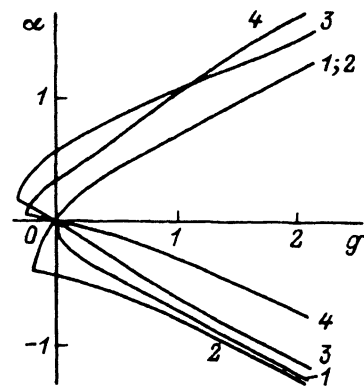


Рис. 2.

$$\frac{dy_{1,2}}{dT} = \lambda_{1,2} \mp \frac{1}{x_{1,2}} \left(\frac{a_{2,1}f_1 - d_{2,1}f_3}{a_1d_2 - d_1a_2} \cos y_{1,2} - \frac{f_2}{b_2 - b_1} \sin y_{1,2} \right). \quad (11)$$

Верхний знак относится к x_1, y_1 , нижний — к x_2, y_2 . Система (11) полностью эквивалентна системе (4). О знаке и эффективности энергообмена будем судить по КПД, вычисляемому с использованием формул (2), (7)

$$\eta = 1 - \frac{\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2}{\beta_0^2} =$$

$$= 1 - \beta_0^{-2} \left\{ 0.5 \sum_{i=1}^2 \left[x_i^2 (a_i^2 + b_i^2 + d_i^2 + (b_i^2 - a_i^2 - d_i^2) \cos 2y_i) + 4d_0d_i x_i \sin y_i \right] + \right. \\ \left. + x_1x_2 \left[(a_1a_2 + b_1b_2 + d_1d_2) \cos(y_1 - y_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + (b_1b_2 - a_1a_2 - d_1d_2) \cos(y_1 + y_2) \right] + d_0^2 \right\}, \quad (12)$$

где $\beta_0^2 = \beta_{x0}^2 + \beta_{y0}^2 + \beta_{z0}^2$.

2. Рассмотрим случай, когда частоты $\lambda_{1,2}$ не близки и отсутствуют другие возможные комбинационные синхронизмы. Тогда после подстановки выражений (7) в f_i (5) и f_i в систему (11) получим в правых частях (11) слагаемые только с быстрыми фазами. Известно [2], что так как $\lambda_{1,2}$ — частоты постоянные (не зависят от $x_{1,2}$), то правые части уравнений для усредненных значений как $\bar{x}_{1,2}$, так и $\bar{y}_{1,2}$ переменных $x_{1,2}, y_{1,2}$ получаются в первом приближении путем усреднения правых частей в (11) по быстрым фазам. Если ограничиться в f_i (5) учетом нелинейностей до кубической включительно, то получим

$$\frac{d\bar{x}_{1,2}}{dT} = 0, \quad \frac{d\bar{y}_{1,2}}{dT} = \lambda_{1,2} + \Delta\lambda_{1,2},$$

где

$$\Delta\lambda_{1,2} = \frac{\lambda_{2,1}^2 - \mu^2}{4\lambda_{1,2}(\lambda_{1,2}^2 - \lambda_{2,1}^2)} \left[2 \frac{(np_e)^2}{g'} + \bar{x}_{1,2}^2 \lambda_{1,2}^2 + \bar{x}_{2,1}^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \right] \quad (13)$$

— постоянные поправки к частотам $\lambda_{1,2}$.

Постоянные амплитуды $\bar{x}_{1,2}$ в первом приближении вычисляются по формулам (9) с учетом (10), т.е. используется решение порождающей системы.

Заметим, что при $p_e = 0$ (стоячее поле) имеем нелинейности только нечетных порядков. Их можно учесть также на основе системы (4) с использованием методики в [3, §95], примененной при исследовании устойчивости. В частности, получаем формулы (13) с $p_e = 0$.

Остановимся на энергообмене, рассматривая два случая.

а) Пусть $\beta_{x0} = \beta_{y0} = 0$, $\beta_{z0} = \beta_0$, т.е. частица влетает в направлении магнитостатического поля. Усредняя в (12) по фазам, используя формулы (8)–(10), после простых вычислений получаем выражение

$$\bar{\eta} = (2D)^{-1} \left\{ g \left[\mu^2 (g' + 2) + g'^3 \right] + 2(\alpha/g') \left[\mu^3 (g' + 1) + \mu g'^2 (g' - 3) \right] - \right. \\ \left. - (\alpha/g')^2 \left[3\mu^4 + \mu^2 g' (7g' - 10) + 4g'^4 \right] \right\}. \quad (14)$$

Смысл параметра $\alpha = p_e/\beta_0$ виден из выражения $|\alpha| = (2\pi)^{-1}(v/v_0)$, где

$$v = \frac{e}{m_0} \left| \frac{E_1 - E_2}{2} \right| \frac{2\pi}{\omega},$$

т.е. по модулю он равен деленному на 2π отношению скорости, которую приобретет частица в однородном статическом поле с напряженностью $0.5(E_1 - E_2)$ за время, равное периоду $2\pi/\omega$ колебаний поля, к начальной скорости v_0 заряда.

На рис. 2 построены кривые $\alpha = \alpha(g)$, на которых $\bar{\eta} = 0$, для значений $\mu = 0.1, 0.5, 2.0, 4.0$ (кривые 1–4 соответственно). Значения α , g в области $\Delta\alpha$, заключенной между двумя ветвями каждой кривой, дают $\bar{\eta} > 0$, т.е. усиление поля, вне этой области $\bar{\eta} < 0$ (поглощение). Если в стоячем поле ($\alpha = 0$), согласно (14), усиление возможно только при $g > 0$ (обыкновенные волны) (см. также [1]), то в поле двух волн с $\alpha \neq 0$, как видно из рис. 2, появляется возможность усиления и при $g < 0$ (необыкновенные волны). Аналогичная особенность имеет место также и в режиме транспортировки зарядов в рассматриваемых полях [4]. Из рис. 2 следует также, что область $\Delta\alpha$ значений α , при которых $\bar{\eta} > 0$, расширяется с ростом g . Из выражения (14) следует, что $\Delta\alpha \sim g$ при $g \gg \mu$. Прямые $\alpha = \pm g/2$ являются асимптотами всех кривых на рис. 2. Численное значение $\bar{\eta}$ можно оценить по формуле (14). В частности, при $\alpha = 0$ (стоячее поле) и $g \gg \mu$, $g \gg 1$ имеем из (14) $\bar{\eta} \sim 0.5$. Полученные в пункте а результаты справедливы также и для потока зарядов, что отмечалось в [1].

б) Рассмотрим случай инжекции частиц со скоростью β_0 и равномерным распределением по всем возможным углам влета. При этом считаем $p_e \neq 0$. Усредним в (12) по фазам, а затем, используя, как в [1], сферическую систему координат в пространстве начальных скоростей, усредним полученное выражение по сфере радиуса β_0 . В результате приходим к формуле

$$\bar{\eta}_{\text{ср}} = \frac{1}{6D} \left[\mu^4 \frac{g' - 1}{g'} + 2\mu^2 (g'^2 - 4g' - 1) + g'^3 (g' - 1) - \right. \\ \left. - 3\alpha^2 \left(\mu^4 \frac{4g' + 1}{g'^3} + \mu^2 \frac{8g' - 13}{g'} + 4g'^2 \right) \right]. \quad (15)$$

Для $\alpha = 0$ из (15) получаем выражение (11) в [1]. На рис. 3 построены кривые $\mu = \mu(g)$, на которых $\bar{\eta}_{\text{ср}} = 0$, для значений $\alpha^2 = 0, 0.2, 1, 2, 4$,

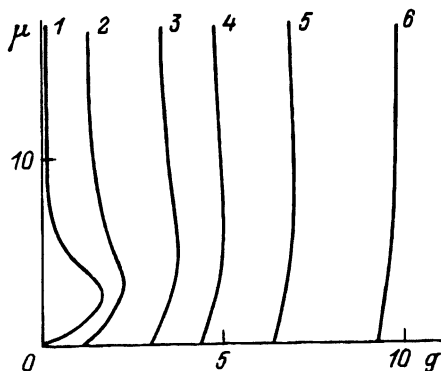


Рис. 3.

8 (кривые 1-6 соответственно). Усиление поля ($\bar{\eta}_{\text{ср}} > 0$) для фиксированного α имеет место при значениях μ, g , лежащих в области правее кривой, соответствующей этому значению α (см. также [1]). Как видно из рис. 3, с ростом α увеличивается требуемое для усиления значение магнитостатического поля. Об эффективности энергообмена можно судить по следующей оценке. Если $g \gg \mu$, то, согласно (15), для $\alpha = 0$ имеем $\bar{\eta}_{\text{ср}} \sim 1/6$. Отметим, что $\bar{\eta}_{\text{ср}}$ (15) не зависит от момента влета зарядов T_0 .

3. Рассмотрим, наконец, случай близких частот $\lambda_1 \simeq \lambda_2$. Пусть частица влетает в направлении z ($\beta_{x0} = \beta_{y0} = 0, \beta_{z0} = \beta_0$). Ограничимся здесь взаимодействием со стоящим полем ($p_e = 0$). Интерес к этому режиму обусловлен существованием медленно меняющегося энергообмена с высоким КПД. Действительно, оценим КПД, используя решение порождающей системы. Для этого, считая фазу $y_1 - y_2$ медленной, усредним в (12) по быстрым фазам $y_{1,2}$. Используя в полученном выражении формулы (8)-(10), после простых вычислений приходим к результату

$$\bar{\eta} = g \left[\mu^2 (g' + 2) + g'^3 - 2\mu (\mu + g'^{\frac{3}{2}}) \cos(y_1 - y_2) \right] / (2D). \quad (16)$$

Видно, что $\bar{\eta}$ меняется с частотой биений $\lambda_1 - \lambda_2$. В формуле (16) необходимо использовать значения μ, g' , являющиеся координатами точек, лежащих в заштрихованной области вблизи замкнутой кривой на рис. 1, поскольку на этой кривой $y_1 = y_2$ ($\lambda_1 = \lambda_2$). Анализ (16) показывает, что неравенство $\bar{\eta} > 0$ (усиление) имеет место при $g > 0$ (обыкновенные волны). Из рис. 1 следует, что требования $y_1 \simeq y_2$ и $g > 0$ одновременно выполняются только для точек, лежащих в окрестности точки $M(0; 1)$. Поэтому для оценки $\bar{\eta}$ положим в (16) $\mu = 1, g' = 1 + g$, где $g \ll 1$. Ограничиваясь в разложении коэффициентов в (16) по g линейными членами и оставляя в разложении $\lambda_1 - \lambda_2$ в фазе $y_1 - y_2$ первое слагаемое, имеющее наименьшую степень g , получаем

$$\bar{\eta} = \frac{1}{2} \left[1 - g - \left(1 - \frac{5}{4}g \right) \cos(\sqrt{g}T) \right]. \quad (17)$$

Из формулы (17) следует, что максимальное значение $\bar{\eta}$ равно $1 - 9g/8$, т.е. близко к 1, поскольку $g \ll 1$. Заметим, что в реальном времени t медленное изменение $\bar{\eta}$ происходит с частотой $\sqrt{\omega\omega_0}$.

Перейдем к усредненной системе уравнений в первом приближении метода усреднения. Если из уравнений для быстрых фаз $y_{1,2}$ (11) образовать уравнение для медленной фазы $y' = y_1 - y_2$, то вместо (11) будем иметь систему пять уравнений с двумя вращающимися фазами y_1, y_2 [2]. Эту систему дополним уравнением для η

$$\frac{d\eta}{dT} = \frac{2\mu}{n\beta_0^2} \beta'_x \sin y'.$$

Таким образом, приходим к системе с малым параметром ε вида

$$\frac{dx}{dT} = \varepsilon X(x, y), \quad \frac{dy}{dT} = \lambda + \varepsilon Y(x, y), \quad (18)$$

где $x = (x_1, x_2, y', \eta)$, $y = (y_1, y_2)$ — соответственно векторы медленных и быстрых переменных; $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$.

Существование малого параметра в правых частях рассматриваемой системы обусловлено малостью расстройки $\lambda_1 - \lambda_2$, а также тем, что нелинейные слагаемые в f_i (5) малы на траектории заряда при малом значении $n\beta_0$. Нелинейность растет с увеличением n , т.е. с возрастанием продольной неоднородности поля.

Как известно [2], решение системы (18) следует искать в виде

$$x = \bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{y}) + \dots, \quad y = \bar{y} + \varepsilon v_1(\bar{x}, \bar{y}) + \dots, \quad (19)$$

причем средние значения \bar{x}, \bar{y} переменных x, y находятся из системы

$$\frac{d\bar{x}}{dT} = \varepsilon A_1(\bar{x}) + \dots, \quad \frac{d\bar{y}}{dT} = \lambda + \varepsilon B_1(\bar{x}) + \dots, \quad (20)$$

а функции u_1, v_1 при постоянных $\lambda_{1,2}$ — из системы

$$\frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}} \lambda = X - A_1(\bar{x}), \quad \frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}} \lambda = Y - B_1(\bar{x}). \quad (21)$$

Функции A_1 получаются усреднением правых частей X по быстрым фазам, в результате чего для средних значений $\bar{x}_{1,2}, \bar{y}', \bar{\eta}$ медленных переменных с учетом в уравнениях для $x_{1,2}, y'$ только кубической нелинейности имеем систему

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}_{1,2}}{dT} &= \frac{\bar{x}_{2,1}}{16\sqrt{D}} \left[\left(P_{1,2} \bar{x}_{1,2}^2 + Q_{1,2} \bar{x}_{2,1}^2 \right) \sin \bar{y}' + R_{1,2} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \sin 2\bar{y}' \right], \\ \frac{d\bar{y}'}{dT} &= \lambda_1 - \lambda_2 + \frac{1}{16\sqrt{D}} \left\{ S_1 \bar{x}_1^2 + S_2 \bar{x}_2^2 + \left[3(P_1 + P_2) \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + Q_1 \frac{\bar{x}_2^3}{\bar{x}_1} + Q_2 \frac{\bar{x}_1^3}{\bar{x}_2} \right] \cos \bar{y}' + (R_1 \bar{x}_2^2 + R_2 \bar{x}_1^2) \cos 2\bar{y}' \right\}, \end{aligned}$$

$$\frac{d\bar{\eta}}{dT} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1\lambda_2 + g'^2)}{(n\beta_0)^2 g'} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \sin \bar{y}', \quad (22)$$

где $P_{1,2} = (2g'\mu^2 + g'^2\lambda_{2,1}^2 - 3\mu^2\lambda_1\lambda_2)\lambda_{1,2}^{-1}$; $Q_{1,2} = (-2g'\mu^2 + 3g'^2\lambda_{2,1}^2 - \mu^2\lambda_1\lambda_2)\lambda_{1,2}^{-1}$; $R_{1,2} = 2(g'^2\lambda_{2,1}^2 - \mu^2\lambda_1\lambda_2)\lambda_{1,2}^{-1}$; $S_{1,2} = 4[\lambda_{1,2}\lambda_{2,1}^3 - \mu^2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_{2,1}^2) + g'^2\lambda_{1,2}^2]\lambda_{2,1}^{-1}$.

В уравнениях (22) коэффициенты вычисляются в точках (g, μ) , лежащих в области I вблизи кривой на рис. 1. В качестве начальных условий $\bar{x}(0)$ для системы (22) возьмем не начальные значения x_0 не усредненной системы T_0 , $x_{1,2} = C_{2,4}$, $y' = 0$, $\eta = 0$, как это требует первое приближение, а проведем их коррекцию по методике, изложенной в [5]. Улучшенное таким путем первое приближение дает хорошее совпадение с результатами вычислений по (11) в широких интервалах изменения параметров. Коррекция состоит в использовании первой формулы (19), по которой в рамках точности первого приближения имеем $\bar{x}(0) = x_0 - \varepsilon u_1(x_0, y_0)$. Функции u_1 определяются из (21) обычным образом [2] в результате несложных вычислений, при этом возникающие произвольные аддитивные функции медленных переменных \bar{x} полагаются равными нулю. Приведем здесь $\bar{x}(0)$ для случая усиления, т.е. для параметров в окрестности точки $M(0; 1)$, ($g > 0$). Учитывая, что здесь $\mu \simeq 1$, $g \ll 1$, получаем приближенные значения начальных амплитуд, фазы и КПД

$$\begin{aligned} \bar{x}_{1,2}(0) &= C_{2,4} \mp \frac{C_{4,2}}{32\sqrt{g}} (C_{4,2}^2 + 3C_{2,4}^2 + 3C_2C_4), \\ \bar{y}'(0) &= 0, \quad \bar{\eta}(0) = \frac{g}{2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Из формул (23) следует, что роль коррекции начальных условий возрастает с уменьшением g и увеличением n, β_0 . Причем параметры n, β_0 участвуют в формулах в виде произведения $B = n\beta_0$.

На рис. 4 приведены кривые $\bar{\eta} = \bar{\eta}(B)$ при $\mu = 1$ и $g = 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$ (сплошные линии 1-3 соответственно). Значения $\bar{\eta}$ — это максимумы кривых $\bar{\eta} = \bar{\eta}(T)$, полученных при соответствующих g, B в результате решения системы (22) с начальными условиями (23) численным методом на ЭВМ. Штриховые линии получены аналогично на основе

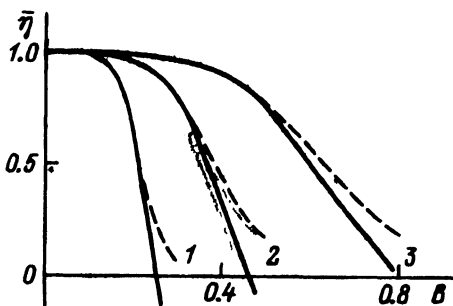


Рис. 4.

решения непреобразованной системы (3) с $p_e = 0$. Видно, что эффективность энергообмена уменьшается с увеличением B , т.е. с возрастанием влияния нелинейных членов в системе. При этом увеличивается погрешность результатов метода усреднения. Высокоэффективный энергообмен ($\bar{\eta} \sim 1$) возможен в широком интервале значений g . При фиксированных g , n энергообмен не критичен к разбросу начальных скоростей. Из формулы (17) следует, что в линейном режиме максимальное значение $\bar{\eta}$ достигается за время $T = \pi/\sqrt{g}$. В нелинейном режиме, как показывают расчеты, это время сокращается с ростом B .

Список литературы

- [1] Курин А.Ф., Курин Е.А. // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 7. С. 55–63.
 - [2] Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
 - [3] Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 532 с.
 - [4] Курин А.Ф. // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 5. С. 932–934.
 - [5] Курин А.Ф., Курина Г.А., Новиков В.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 19. № 7. С. 1047–1053.
-