

01;03

©1994 г.

ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СЛОЯХ МАГНИТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

В.М.Коровин

Выписаны уравнения осесимметричного потенциального движения двух находящихся в состоянии гидроневесомости несмешивающихся магнитных жидкостей, заполняющих в виде концентрических слоев длинный канал, образованный трубкой и соосно расположенным внутри нее проводником, по которому проходит электрический ток. Рассматривается случай, когда магнитное поле, индуцированное током, обеспечивает устойчивость цилиндрической формы поверхности раздела жидкостей. В линейной постановке получено дисперсионное соотношение для волн на поверхности раздела и исследовано влияние поля на эволюцию начального длинноволнового возмущения цилиндрической поверхности раздела. Получены уравнения Кортевега-де-Фриза с квадратичной и кубической нелинейностями и проведен анализ влияния поля на внутренние уединенные волны.

Введение

Известно [1], что внешняя граница слоя магнитной жидкости, покрывающей проводник круглого сечения, по которому проходит достаточно сильный электрический ток, в отсутствие силы тяжести имеет цилиндрическую форму. В лабораторных условиях при исследовании устойчивости такой конфигурации [2] действие силы тяжести устранялось созданием гидроневесомости путем помещения проводника с окружающей его магнитной жидкостью в кювету с немагнитной жидкостью, имеющей одинаковую плотность с магнитной жидкостью, но не смешивающейся с ней.

В отсутствие силы тяжести эволюция возмущения поверхности раздела жидкостей определяется конкуренцией двух факторов: направленных к оси проводника переменных по толщинам слоев объемных магнитных сил, оказывающих стабилизирующее влияние, и поверхностных капиллярных сил, вызывающих в случае слабых токов распад слоев на капли. Применительно к цилиндрическим слоям, покрывающим проводник с током, в имеющихся работах [2,3] теоретическое исследование волновых движений проводилось лишь в случае, когда жидкость граничит с газом, имеющим постоянное давление и не оказывающим влияние на волны. В [2] изучались осесимметричные линейные волны на свободной поверхности тонкого слоя, а в [3] предпринята попытка исследования в упрощенной постановке осесимметричных

солитонов на свободной поверхности слоя вокруг бесконечно тонкого проводника.

В данной работе исследуется распространение волн по поверхности раздела двух concentрических слоев магнитных жидкостей, плотности которых одинаковы, а магнитные восприимчивости различны. Найдено дисперсионное соотношение, соответствующее линеаризованной системе уравнений исходной нелинейной задачи, и рассмотрен его длинноволновый предел. В линейной постановке с учетом эффекта дисперсии изучено влияние магнитного поля на эволюцию пакета длинных волн. Выведены уравнения Кортевега-де-Фриза с квадратичной и кубической нелинейностями и исследовано влияние поля на солитоны.

1. В цилиндрической системе координат r, φ, z (ось z является осью проводника, по которому проходит электрический ток J) рассматривается осесимметричное потенциальное движение неэлектропроводной слоисто-неоднородной магнитной жидкости. Жидкость, заполняющая длинный кольцевой канал $r_1 \leq r \leq r_2$, состоит из двух несмешивающихся слоев с плотностями $\rho_1 = \rho_2$ и постоянными магнитными восприимчивостями $\chi_1 \neq \chi_2$. Индексами 1 и 2 отмечаются параметры, относящиеся соответственно к слоям, соприкасающимся с поверхностью проводника $r = r_1$ и с наружной стенкой канала $r = r_2$. Предполагается, что в состоянии гидростатического равновесия с цилиндрической поверхностью раздела $r = r_0$ толщины слоев $h_1 = r_0 - r_1, h_2 = r_2 - r_0$ и величина r_0 имеют одинаковый порядок.

В рассматриваемом случае магнитное поле имеет лишь азимутальную составляющую $H_\varphi = J(2\pi r)^{-1}$, создающую в жидкостях направленные к оси проводника объемные магнитные силы с плотностями $F_k = (F_{kr}, 0, 0), F_{kr} = -\mu_0 \chi_k J^2 (4\pi^2 r^3)^{-1}, k = 1, 2$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная. При этом жидкость с большей магнитной восприимчивостью соприкасается с проводником, т.е. $\chi_1 > \chi_2$.

Система уравнений, описывающих динамику жидкостей в магнитном поле проводника с током, сводится к уравнениям Лапласа для потенциалов скоростей φ_k

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z^2} = 0; \quad k = 1, 2 \quad (1)$$

и интегралам Коши-Лагранжа. При горизонтальном положении канала, отсчитывая азимутальный угол φ от направления силы тяжести, имеем

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p_k}{\rho_k} - gr \cos \varphi - \frac{\mu_0 \chi_k}{2\rho_k} H_\varphi^2 = C_k(t); \quad k = 1, 2. \quad (2)$$

Здесь t — время, p_k — давление, g — ускорение силы тяжести. На стенках канала ставятся условия непроницаемости

$$r = r_k: \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} = 0; \quad k = 1, 2. \quad (3)$$

На поверхности раздела жидкостей $r = r_0 + \eta(z, t)$ должны выполняться кинематические и динамические условия

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial r}; \quad k = 1, 2,$$

$$p_1 - p_2 = 2\alpha\mathcal{H}, \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2} \left\{ (r_0 + \eta)^{-1} \left[1 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial z} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} - \frac{\partial^2\eta}{\partial z^2} \left[1 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial z} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \right\}, \quad (4)$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения.

С учетом (2) и равенства $\rho_1 = \rho_2$ динамическое условие записывается следующим образом:

$$r = r_0 + \eta(z, t): \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{\mu_0\chi}{8\pi^2\rho_1} \frac{J^2}{(r_0 + \eta)^2} + \frac{2\bar{\alpha}}{\rho_1} \mathcal{H} = C(t), \quad \chi = \chi_1 - \chi_2 > 0. \quad (5)$$

Помимо (3)–(5) необходимы также краевые условия по z . При исследовании нестационарных движений требуется задать в начальный момент времени форму поверхности раздела жидкостей и поля скоростей, связанные условиями согласования (4).

Система уравнений (1), (3)–(5) используется далее для исследования влияния магнитного поля на внутренние волны, распространяющиеся по поверхности раздела жидкостей. Анализ возможных нелинейных волновых движений проводится в рамках более простых моделей, при конкретизации которых используется безразмерная форма уравнений и краевых условий.

Пусть a и l представляют соответственно характерные амплитуду и длину волны, a_0 — предельная скорость распространения линейных длинных волн в двухслойной магнитной жидкости (см. формулу (17)). Вводя обозначения

$$\varepsilon = \frac{q}{r_0}, \quad \delta = \frac{r_0}{l}, \quad A = \frac{4\pi^2\alpha r_0}{\mu_0\chi J^2}, \quad r_{0k} = \frac{r_k}{r_0}, \quad h_{0k} = \frac{h_k}{r_0}, \quad k = 1, 2$$

и переходя в (1), (3)–(5) к безразмерным переменным

$$r' = \frac{r}{r_0}, \quad z' = \frac{z}{l}, \quad t' = \frac{c_0 t}{l}, \quad \eta' = \frac{\eta}{a}, \quad \varphi'_k = \frac{\varphi_k}{\varepsilon c_0 l}, \quad k = 1, 2,$$

получаем (штрихи далее опускаются):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi_k}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi_k}{\partial r^2} + \delta^2 \frac{\partial^2\varphi_k}{\partial z^2} = 0, \quad r = r_k: \quad \frac{\partial\varphi_k}{\partial r} = 0, \quad k = 1, 2, \quad (6)$$

$$r = 1 + \varepsilon\eta: \quad \frac{\partial\eta}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial\eta}{\partial z} \frac{\partial\varphi_k}{\partial z} = \delta^{-2} \frac{\partial\varphi_k}{\partial r}, \quad k = 1, 2, \quad (7)$$

$$r = 1 + \varepsilon\eta: \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial r} + \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \delta^{-2} \left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \right)^2 \right\} + \frac{A}{\varepsilon b(1-A)} \left\{ (1 + \varepsilon\eta)^{-1} \left[1 + (\varepsilon\delta)^2 \left(\frac{\partial\eta}{\partial z} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} - \varepsilon\delta^2 \frac{\partial^2\eta}{\partial z^2} \left[1 + (\varepsilon\delta)^2 \left(\frac{\partial\eta}{\partial z} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \right\} -$$

$$-\frac{1}{2\epsilon b(1-A)(1+\epsilon\eta)^2} = c(t). \quad (8)$$

Величина b , фигурирующая в динамическом условии на поверхности раздела (8), определяется выражением (15).

2. Рассмотрим волны малой амплитуды на поверхности раздела жидкостей, первоначально находившихся в состоянии гидростатического равновесия. В результате линеаризации кинематических и динамического условий (4), (5) для малых возмущений φ_k, η получаем

$$r = r_0 : \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial z}; \quad k = 1, 2, \quad (9)$$

$$r = r_0 : \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{\alpha}{\rho_1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \frac{\mu_0 \chi}{\rho_1 r_0} H^2 (1-A) \eta = 0, \quad H = \frac{1}{2\pi r_0} J. \quad (10)$$

Предполагается, что в начальный момент времени поверхность раздела жидкостей неподвижна, а ее форма известна

$$\frac{\partial \eta(z, 0)}{\partial t} = 0, \quad \eta(z, 0) = \eta_0(z), \quad (11)$$

причем функция $\eta_0(z)$ достаточно быстро убывает при $|z| \rightarrow \infty$.

Решение задачи (1), (3), (9)–(11) нетрудно построить с помощью метода преобразования Фурье. Полагаем

$$\varphi_m(r, z, t) = \Phi_m(x) e^{i(kz - \omega t)}, \quad \eta = a e^{i(kz - \omega t)}, \quad x = kr, \quad m = 1, 2. \quad (12)$$

Подставляя первое выражение (12) в (1), приходим к уравнению

$$\Phi_m'' + \frac{1}{x} \Phi_m' - \Phi_m = 0; \quad m = 1, 2,$$

общее решение которого при $x \geq 0$ выражается через модифицированные функции Бесселя [4]

$$\Phi_m = B_m I_0(x) + C_m K_0(x); \quad m = 1, 2. \quad (13)$$

Определив с помощью (3), (9) константы B_m, C_m и подставив далее (13) в динамическое условие (10), получаем дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \frac{\mu_0 \chi}{\rho_1 r_0 \zeta} H^2 k^2 \left\{ 1 + A [(kr_0)^2 - 1] \right\}, \quad (14)$$

где

$$\zeta = P_1 Q_1^{-1} - P_2 Q_2^{-1}, \quad P_m = I_0'(kr_m) K_0(kr_0) - I_0(kr_0) K_0'(kr_m),$$

$$Q_m = I_0'(kr_m) K_0'(kr_0) - I_0'(kr_0) K_0'(kr_m); \quad m = 1, 2.$$

При $k > 0, r_1 < r_0 < r_2$ имеем $\zeta > 0$. Поскольку $\chi > 0$, то знак правой части (14) определяется знаком выражения в фигурных скобках. Ввиду этого при выполнении условия $0 < A \leq 1$ цилиндрическая

форма поверхности раздела жидкостей устойчива по отношению к синусоидальным возмущениям с любыми волновыми числами. Если же доминирующую роль играют силы поверхностного натяжения ($A > 1$), то сплошные цилиндрические слои магнитных жидкостей в экспериментах не реализуются [2] ввиду неустойчивости по отношению к возмущениям с волновыми числами $k < r_0^{-1} \sqrt{(A-1)/A}$.

Далее рассматриваются длинные ($kr_2 \ll 1$) волны при $0 < A < 1$. Воспользовавшись известными разложениями [4] модифицированных функций Бесселя целых порядков, в этом случае имеем

$$\zeta^{-1} = bkr_0 \left[1 - \tau(kr_0)^2 + \frac{1}{8}(kr_0)^4 \ln(kr_0) \right],$$

$$b(h_{01}, h_{02}) = \frac{1}{2} (1 - r_{01}^2) (1 - r_{02}^2) (r_{01}^2 - r_{02}^2)^{-1}, \quad r_{01} = 1 - h_{01}, \quad r_{02} = 1 + h_{02},$$

$$\tau(h_{01}, h_{02}) = \frac{1}{2(r_{02}^2 - r_{01}^2)} \left[\frac{r_{01}^4 (1 - r_{02}^2)}{1 - r_{01}^2} \ln r_{01} - \frac{r_{02}^4 (1 - r_{01}^2)}{1 - r_{02}^2} \ln r_{02} \right] - \frac{1}{4}. \quad (15)$$

Таким образом, для длинных волн дисперсионное соотношение (14) с точностью до малых $O[(kr_0)^4 \ln(kr_0)]$ принимает вид

$$\omega^2 = \frac{\mu_0 \chi b}{\rho_1} H^2 k^2 \left\{ 1 - A - (kr_0)^2 [\tau(1 - A) - A] - \frac{1}{8}(1 - A)(kr_0)^4 \ln(kr_0) \right\}.$$

Пренебрегая последним членом в этом выражении по сравнению с $1 - A$, находим

$$\omega = \pm c_0 k \mp \beta k^3, \quad (16)$$

где предельная (при $k \rightarrow 0$) фазовая скорость c_0 длинных волн и параметр дисперсии β вычисляются по формулам

$$c_0 = H \left[\frac{\mu_0 \chi b}{\rho_1} (1 - A) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \beta = \frac{\kappa}{2} c_0 r_0^2, \quad \kappa = \tau - A(1 - A)^{-1}. \quad (17)$$

Численное исследование показывает, что при $0 < h_{0k} \leq 1$, $k = 1, 2$ функция $\tau(h_{01}, h_{02}) > 0$. Ввиду этого при любых заданных $h_{0k} \leq 1$ существует критическое значение параметра A , равное $A_* = \tau(1 + \tau)^{-1}$, такое, что $\beta < 0$, если $A_* < A < 1$, и $\beta > 0$, если $A < A_*$.

Ввиду линейности задачи (1), (3), (9)–(11) ее решение строится на базе частных решений вида (12). При этом эволюция во времени начального возмущения (11) цилиндрической поверхности раздела, пространственный спектр которого заметно отличен от нуля лишь для $|k| \ll r_0^{-1}$, описывается выражением

$$\eta(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(k) \left\{ \exp[ik(z - c_0 t) + i\beta k^3 t] + \exp[ik(z + c_0 t) - i\beta k^3 t] \right\} dk,$$

$$B(k) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_0(\xi) \exp(-ik\xi) d\xi. \quad (18)$$

Первое слагаемое в (18) представляет волновой пакет, распространяющийся вдоль оси z , а второе — волновой пакет, распространяющийся в противоположную сторону.

Рассмотрим волновой пакет, движущийся вдоль оси z . Согласно [5], при законе дисперсии (16) асимптотическое (при $t \rightarrow \infty$) поведение волнового пакета существенным образом зависит от знака параметра дисперсии. В случае $\beta < 0$ при любом большом t затухание возмущения поверхности раздела в области $z > c_0 t$ с ростом z носит осциллирующий характер, а в области $z < c_0 t$ возмущение затухает экспоненциально с убыванием z . Если же $\beta > 0$, то структура волнового пакета в областях $z > c_0 t$ и $z < c_0 t$ имеет, напротив, экспоненциально убывающий и соответственно осциллирующий вид. Аналогичным образом ведет себя волновой пакет, распространяющийся в отрицательном направлении оси z .

Таким образом, электрический ток, превышающий вычисляемое из условия $A = A_*$ критическое значение

$$J_* = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha r_0}{\mu_0 \chi A_*}} \quad (19)$$

вызывает кардинальное (по сравнению со случаем $J < J_*$) изменение асимптотической формы волновых пакетов. Если же $A > A_*$, то в рассматриваемом приближении волны являются гиперболическими, так что $\eta(z, t) = 1/2[\eta_0(z - c_0 t) + \eta_0(z + c_0 t)]$.

В качестве примера приведем оценочное значение критического тока применительно к экспериментам [2] с тонким цилиндрическим слоем магнитной жидкости на основе парафинового масла, контактирующей с водным раствором глицерина той же плотности, для которых $\alpha = 0.11$ Н/м, $\chi = 2.5$. Полагая $r_0 = 0.008$ м, $h_{01} = 0.75$, $h_{02} = 1$, находим $A_* = 0.16$ и далее по формуле (19) получаем $J_* = 82.8$ А. В этом примере значение $A = 1$ реализуется при $J = 33.25$ А, так что для обеспечения устойчивости цилиндрической поверхности раздела требуется ток, больший 33.25 А.

3. Из выражения (16) следует, что при $O(\kappa) = 1$ для длинных волн дисперсионные эффекты имеют относительный порядок $\delta^2 \ll 1$. Рассмотрим длинные волны на временном масштабе, значительно превышающем характерное время l/c_0 волнового процесса в случае гиперболических волн. При этом наряду с дисперсией существенное влияние на волновое движение оказывают также нелинейные эффекты. Полагая $\varepsilon = O(\delta^2)$, преобразуем систему уравнений (6)–(8) к упрощенной модели, позволяющей одновременно учесть как дисперсию, так и нелинейность.

Разложим скорости в ряды по степеням $r - 1$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial r} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(r-1)^m}{m!} \frac{\partial^{m+1} \varphi_k^0}{\partial r^{m+1}}, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(r-1)^m}{m!} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^m \varphi_k^0}{\partial r^m}, \quad k = 1, 2. \quad (20)$$

Верхний индекс "нуль" означает, что производные вычисляются при $r = 1$.

Из уравнений неразрывности (6) следует

$$\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial r^2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} - \delta^2 \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z^2}; \quad k = 1, 2. \quad (21)$$

Далее путем последовательного дифференцирования находим

$$\frac{\partial^n \varphi_k}{\partial r^n} = (-1)^{n-1} \left\{ \frac{(n-1)!}{r^{n-1}} \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} + \delta^2 \left[\frac{(n-1)!}{2r^{n-2}} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z^2} - \frac{a_n}{r^{n-3}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} \right] \right\} +$$

$$+ (-1)^n \delta^4 \left[\frac{b_n}{r^{n-4}} \frac{\partial^4 \varphi_k}{\partial z^4} - \frac{c_n}{r^{n-5}} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} \right] + O(\delta^6) d_n, \quad n = 3, 4, 5, \dots,$$

$$a_n = \frac{1}{2} \left[(n-3)! + \frac{(n-1)!}{2} \right],$$

$$n = 3, 4, 5, \dots; \quad d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = 0, \quad d_n = 1, \quad n = 6, 7, 8, \dots,$$

$$b_2 = b_3 = 0, \quad b_4 = 1, \quad b_n = \frac{1}{4} \left[(n-3)! + \frac{(n-1)!}{4} \right], \quad n = 5, 6, 7, \dots,$$

$$c_2 = c_3 = c_4 = 0, \quad c_5 = 1, \quad c_n = \frac{(n-5)!}{8} \left[5 + (n-2)(n-5) \right] + \frac{(n-1)!}{64},$$

$$n = 6, 7, 8, \dots, \quad (22)$$

Подставляя производные (21), (22) в первое разложение (20) и обозначив $r - 1 = \xi$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} &= \sigma_1(\xi) \frac{\partial \varphi_k^0}{\partial r} + \delta^2 \left[\sigma_2(\xi) \frac{\partial^2 \varphi_k^0}{\partial z^2} + \sigma_3(\xi) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial \varphi_k^0}{\partial r} \right] + \\ &+ \delta^4 \left[\sigma_4(\xi) \frac{\partial^4 \varphi_k^0}{\partial z^4} + \sigma_5(\xi) \frac{\partial^4}{\partial z^4} \frac{\partial \varphi_k^0}{\partial r} \right] + O(\delta^6), \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\sigma_1(\xi) = \frac{1}{1+\xi}, \quad \sigma_2(\xi) = -\frac{\xi}{2} \frac{2+\xi}{1+\xi}, \quad \sigma_3(\xi) = \frac{\xi \sigma_2}{2} + \vartheta_1(\xi),$$

$$\sigma_4(\xi) = -\frac{\xi^2 \sigma_2}{8} + \frac{1}{2} \vartheta_1(\xi), \quad \vartheta_1(\xi) = \frac{\xi^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)(k+2)} \xi^k,$$

$$\sigma_5(\xi) = \frac{\xi^4}{192} \frac{8+5\xi}{1+\xi} - \frac{\xi^5}{8} \left[9\vartheta_2(\xi) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k(1+k)!}{(4+k)!} \xi^k \right],$$

$$\vartheta_2(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (1+k)!}{(5+k)!} \xi^k.$$

Интегрируя почленно ряд

$$\ln(1 + \xi) = \xi - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^4}{4} + \dots, \quad -1 < \xi \leq 1, \quad (24)$$

находим

$$\vartheta_1(\xi) = \frac{1}{2} \left[\xi + \frac{\xi^2}{2} - (1 + \xi) \ln(1 + \xi) \right].$$

В результате получаем

$$\sigma_3(\xi) = -\frac{1}{2} \left[\sigma_2 + (1 + \xi) \ln(1 + \xi) \right],$$

$$\sigma_4(\xi) = \frac{\xi^4 + 6\xi + 4\xi^2 + \xi^3}{16(1 + \xi)} - \frac{1 + \xi}{4} \ln(1 + \xi).$$

Что же касается правой части $\vartheta_2(\xi)$, то, согласно формуле 5.2.11 (2) в [6, с. 709], имеем

$$\vartheta_2(\xi) = -\frac{(1 + \xi)^3}{6\xi^5} \ln(1 + \xi) - \frac{1}{6\xi} \sum_{m=1}^4 \binom{3}{m-1} \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^k}{k} \xi^{k-1},$$

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Подставим выражение (23) в краевые условия для радиальных скоростей на стенках канала (6)

$$\sigma_1(\xi_k) \frac{\partial \varphi_k^0}{\partial r} + \delta^2 \left[\sigma_2(\xi_k) \frac{\partial^2 \varphi_k^0}{\partial z^2} + \sigma_3(\xi_k) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial \varphi_k^0}{\partial r} \right] +$$

$$+ \delta^4 \left[\sigma_4(\xi_k) \frac{\partial^4 \varphi_k^0}{\partial z^4} + \sigma_5(\xi_k) \frac{\partial^4}{\partial z^4} \frac{\partial \varphi_k^0}{\partial r} \right] = O(\delta^6), \quad \xi_k = r_{0k} - 1, \quad k = 1, 2.$$

Методом последовательных приближений по малому параметру δ^2 отсюда с точностью до членов $O(\delta^4)$ находим

$$\frac{\partial \varphi_k^0}{\partial r} = -\delta^2 s_{1k} \frac{\partial^2 \varphi_k^0}{\partial z^2} + \delta^4 s_{2k} \frac{\partial^4 \varphi_k^0}{\partial z^4}; \quad k = 1, 2,$$

$$s_{1k} = \frac{1}{2} (1 - r_{0k}^2), \quad s_{2k} = \frac{1}{4} \left[r_{0k}^4 \ln r_{0k} + \frac{1}{4} (1 - r_{0k}^2) (3r_{0k}^2 - 1) \right]. \quad (25)$$

Обращаясь ко второму выражению (15), нетрудно показать

$$s_{11}^{-1} + s_{12}^{-1} = b^{-1}. \quad (26)$$

Принимая во внимание (20) и учитывая (25), получаем связь скоростей жидких частиц на поверхности раздела с формой поверхности

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} \Big|_{r=1+\varepsilon\eta} &= -\delta^2 \frac{\partial^2 \varphi_k^0}{\partial z^2} \left[s_{1k} + \varepsilon(1 - s_{1k})\eta \right] + \delta^4 s_{2k} \frac{\partial^4 \varphi_k^0}{\partial z^4} + O(\varepsilon\delta^4, \varepsilon^2\delta^2), \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \Big|_{r=1+\varepsilon\eta} &= \frac{\partial \varphi_k^0}{\partial z} - \varepsilon\delta^2 s_{1k}\eta \frac{\partial^3 \varphi_k^0}{\partial z^3} + O(\varepsilon\delta^4, \varepsilon^2\delta^2). \end{aligned} \quad (27)$$

Продифференцировав по z динамическое условие (8), имеем

$$\begin{aligned} r = 1 + \varepsilon\eta: \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right) + \frac{1}{b} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \varepsilon \left[\delta^{-2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial z} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial z} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - \frac{3 - 2A}{2b(1 - A)} \frac{\partial \eta^2}{\partial z} \right] \frac{\delta^2}{b} \frac{A}{1 - A} \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^3} = O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2). \end{aligned} \quad (28)$$

Далее, после подстановки выражений для скоростей (27) в кинематические (7) и динамическое (28) условия, получаем следующую систему уравнений относительно η , $\partial \varphi_1^0 / \partial z$, $\partial \varphi_2^0 / \partial z$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + s_{1k} \frac{\partial^2 \varphi_k^0}{\partial z^2} + \varepsilon \left[\frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \varphi_k^0}{\partial z} + (1 - s_{1k})\eta \frac{\partial^2 \varphi_k^0}{\partial z^2} \right] - \\ - \delta^2 s_{2k} \frac{\partial^4 \varphi_k^0}{\partial z^4} = O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2); \quad k = 1, 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi_1^0}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_2^0}{\partial z} \right) + \frac{1}{b} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \varepsilon \left[\frac{\partial \varphi_1^0}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi_1^0}{\partial z^2} - \frac{\partial \varphi_2^0}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi_2^0}{\partial z^2} - \frac{3 - 2A}{2b(1 - A)} \frac{\partial \eta^2}{\partial z} \right] - \\ - \frac{\delta^2}{b} \frac{A}{1 - A} \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^3} = O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2). \end{aligned} \quad (29)$$

В низшем приближении (при $\varepsilon = 0$, $\delta = 0$) эта система линейна

$$\frac{\partial^2 \varphi_{k0}^0}{\partial z^2} = -\frac{1}{s_{1k}} \frac{\partial \eta_0}{\partial t}; \quad k = 1, 2; \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi_{10}^0}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_{20}^0}{\partial z} \right) + \frac{1}{b} \frac{\partial \eta_0}{\partial z} = 0. \quad (30)$$

С учетом (26) отсюда следует

$$\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial z^2} = 0. \quad (31)$$

В рамках линейной модели волнового движения жидкостей, описываемой уравнением (31), имеем $\partial/\partial t = \mp \partial/\partial z$. Применительно же к системе (29), учитывающей нелинейные поправки порядков ε и δ^2 к волновому уравнению (31), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} + O(\varepsilon, \delta^2); \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} + O(\varepsilon, \delta^2). \quad (32)$$

Далее будем рассматривать волны, распространяющиеся в положительном направлении оси z . В линейном случае из первого уравнения (30) следует

$$\frac{\partial \varphi_k^0}{\partial z} = \frac{\eta_0}{s_{1k}} + c_k; \quad k = 1, 2,$$

где c — константы.

Обращаясь к нелинейной системе (29), аналогично [7] полагаем

$$\frac{\partial \varphi_k^0}{\partial z} = \frac{1}{s_{1k}} (\eta + \varepsilon A_k + \delta^2 B_k); \quad k = 1, 2, \quad (33)$$

где A_k, B_k — функции от η и производных η по z .

Подставив (33) в (29), с учетом первого выражения (32) получаем

$$\begin{aligned} f_i + \varepsilon u_i + \delta^2 v_i &= O(\varepsilon^2, \varepsilon \delta^2), & f_i &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial z}; & i &= 1, 2, 3, \\ u_k &= \frac{\partial A_k}{\partial z} + \frac{2 - s_{1k}}{2s_{1k}} \frac{\partial \eta^2}{\partial z}, & v_k &= \frac{\partial B_k}{\partial z} - \frac{s_{2k}}{s_{1k}} \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^3}; & k &= 1, 2, \\ u_3 &= b \left(\frac{1}{s_{12}} \frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{1}{s_{11}} \frac{\partial A_1}{\partial z} \right) + \eta \frac{\partial \eta}{\partial z} \left(\frac{1}{s_{11}} + \frac{1}{s_{12}} - \frac{3 - 2A}{1 - A} \right), \\ v_3 &= b \left(\frac{1}{s_{12}} \frac{\partial B_2}{\partial z} - \frac{1}{s_{11}} \frac{\partial B_1}{\partial z} \right) - \frac{A}{1 - A} \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^3}. \end{aligned} \quad (34)$$

Из условий совместной системы (34) из уравнений $u_1 = u_2, u_2 = u_3, v_1 = v_2, v_2 = v_3$ находим

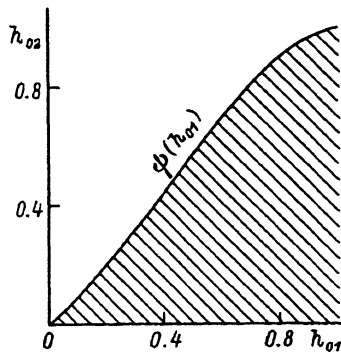
$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial z} &= \frac{\eta}{2} \frac{\partial \eta}{\partial z} \left(\frac{3}{s_{12}} - \frac{1}{s_{11}} - \frac{2 - A}{1 - A} \right), & \frac{\partial A_2}{\partial z} &= \frac{\eta}{2} \frac{\partial \eta}{\partial z} \left(\frac{3}{s_{11}} - \frac{1}{s_{12}} - \frac{2 - A}{1 - A} \right), \\ \frac{\partial B_1}{\partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^3} \left[\frac{s_{21}}{s_{11}} + \frac{b}{s_{12}} \left(\frac{s_{22}}{s_{12}} - \frac{s_{21}}{s_{11}} \right) - \frac{A}{1 - A} \right], \\ \frac{\partial B_2}{\partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^3} \left[\frac{s_{22}}{s_{12}} + \frac{b}{s_{11}} \left(\frac{s_{22}}{s_{12}} - \frac{s_{21}}{s_{11}} \right) - \frac{A}{1 - A} \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

При подстановке производных (35) в систему (34) каждое из трех уравнений, записанное с точностью $O(\varepsilon, \delta^2)$, принимает форму уравнения Кортевега-де-Фриза. Возвращаясь к размерным переменным, имеем

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \left(1 + \frac{3q}{2r_0} \eta \right) \frac{\partial \eta}{\partial z} + \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^3} = 0, \quad q = \frac{2}{\lambda} + \frac{2}{\nu} - \frac{4 - 3A}{3(1 - A)},$$

$$\lambda = h_{01}(2 - h_{01}), \quad \nu = -h_{02}(2 + h_{02}), \quad 0 < \lambda < 1, \quad -3 \leq \nu < 0. \quad (36)$$

Следует подчеркнуть, что уравнение (36) получено в предположении $O(h_{0k}) = 1; k = 1, 2$, причем ввиду (24) должно выполняться условие $h_{02} \leq 1$. Нетрудно видеть, что коэффициент q обращается в нуль при



$A = A_0(h_{01}, h_{02})$, где $A_0(h_{01}, h_{02}) = 2/3(3\lambda + 3\nu - 2\lambda\nu)(2\lambda + 2\nu - \lambda\nu)^{-1}$. Следует подчеркнуть, что выполнение условия $0 < A_0 < 1$ обеспечивает лишь такие пары h_{01}, h_{02} , для которых $\Psi(h_{01}) = h_{02} \leq 1$, где $\Psi(h_{01}) = (3 + 2h_{01} - h_{01}^2)^{\frac{1}{2}} (3 - 4h_{01} + 2h_{01}^2)^{-\frac{1}{2}} - 1$.

Анализ показывает, что если точка (h_{01}, h_{02}) находится в квадрате $0 \leq h_{01} \leq 1, 0 \leq h_{02} \leq 1$ выше кривой $h_{02} = \Psi(h_{01})$ (см. рисунок), то $q < 0$ при $A_0 < A < 1$ и $q > 0$ при $0 < A < A_0$. На самой же кривой $h_{02} = \Psi(h_{01})$ и ниже нее (заштрихованная область на рисунке) при любом $0 < A < 1$ имеем $q < 0$. В этой области лежат, в частности, точки прямой $h_{02} = h_{01}$.

При $q \neq 0, \beta \neq 0$ нетрудно построить, следуя, например [7], стационарные решения уравнения (36), представляющие собой либо кноидальные волны, либо солитоны. Ограничимся рассмотрением солитонов. Учитывая, что знаки q и κ могут быть различны, имеем

$$\eta(z, t) = a \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3a|\sigma|}{4r_0^3}} (z - Ut) \right], \quad \sigma = \frac{q}{\kappa},$$

$$U = c_0 \left(1 + \frac{aq}{2r_0} \operatorname{sgn} \sigma \right), \quad (37)$$

т.е. скорость солитона U зависит как от его амплитуды a , так и от толщин слоев, физических свойств жидкостей и тока в проводнике. Следуя [5], солитон, имеющий вид возвышения (случай $\sigma > 0$), будем называть положительным, а солитон, имеющий вид впадины (случай $\sigma < 0$), — отрицательным.

Исследуем влияние магнитного поля на солитон в случае, когда точка (h_{01}, h_{02}) лежит выше кривой $h_{02} = \Psi(h_{01})$. Применительно, например, к рассмотренному в предыдущем разделе случаю при $h_{01} = 3/4, h_{02} = 1$ имеем $A_* = 0,16, A_0 = 2/7$, причем значению $A_0 = 2/7$ соответствует ток 62.2 А. Пусть $A_0 < A < 1$, при этом $q < 0, \kappa < 0$. Согласно (37), имеем положительный солитон, скорость которого U_+ меньше предельной фазовой скорости c_0 линейных волн. С увеличением тока в проводнике приходим к случаю $A_* < A < A_0$. При этом $q > 0, \kappa < 0$, так что солитон оказывается отрицательным, его скорость $U_- < c_0$. При дальнейшем увеличении тока реализуется случай

$0 < A < A_*$, когда $q > 0$, $\kappa > 0$, и вновь имеем положительный солитон, причем в отличие от первого случая скорость солитона $U_+ > c_0$.

Если же точка (h_{01}, h_{02}) находится в заштрихованной области на рисунке, то $q < 0$ при всех $0 < A < 1$. Согласно (37), в этом случае изменение типа солитона с увеличением тока в проводнике происходит лишь один раз в связи с изменением знака параметра дисперсии β . При $A_* < A < 1$ имеем $\kappa < 0$, так что солитон положителен, а его скорость $U_+ < c_0$. Если же ток превышает критическое значение (19) (случай $A < A_*$), то коэффициент дисперсии становится положительным и имеем отрицательный солитон, причем его скорость $U_- > c_0$.

4. При $A = A_0$ уравнение (36) превращается в линейное и эволюция пакета длинных диспергирующих волн описывается выражением (18). Асимптотической же моделью задачи (1), (3)–(5), учитывающей как дисперсионные, так и нелинейные эффекты, при $A = A_0$ является модифицированное уравнение Кортевега-де-Фриза, описывающее [8] такие волновые процессы, для которых $\varepsilon = O(\delta)$.

Полагая $\varepsilon = O(\delta)$ и следуя изложенной в предыдущем разделе схеме упрощения задачи (1), (3)–(5), вместо (29) приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + s_{1k} \frac{\partial^2 \varphi_k^0}{\partial z^2} + \varepsilon \left[\frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \varphi_k^0}{\partial z} + (1 - s_{1k}) \eta \frac{\partial^2 \varphi_k^0}{\partial z^2} \right] - \delta^2 s_{2k} \frac{\partial^4 \varphi_k^0}{\partial z^4} + \\ + \varepsilon^2 s_{3k} \eta^2 \frac{\partial^2 \varphi_k^0}{\partial z^2} = O(\varepsilon \delta^2), \quad s_{3k} = \frac{1}{2} - \tau_{0k}^2; \quad k = 1, 2, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi_1^0}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_2^0}{\partial z} \right) + \frac{1}{b} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \varepsilon \left[\frac{\partial \varphi_1^0}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi_1^0}{\partial z^2} - \frac{\partial \varphi_2^0}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi_2^0}{\partial z^2} - \frac{3 - 2A}{2b(1 - A)} \frac{\partial \eta^2}{\partial z} \right] + \\ + \frac{\varepsilon^2}{b} \frac{2 - A}{1 - A} \frac{\partial \eta^3}{\partial z} - \frac{\delta^2}{b} \frac{A}{1 - A} \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^3} = O(\varepsilon^3, \varepsilon \delta^2). \end{aligned} \quad (38)$$

Вместо же выражений (32) для бегущих вдоль оси z волн при $A = A_0$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} + O(\varepsilon^2, \varepsilon \delta, \delta^2). \quad (39)$$

При выводе модифицированного уравнения Кортевега-де-Фриза требуется учесть поправки второго порядка к линейной модели. Полагаем

$$\frac{\partial \varphi_k^0}{\partial z} = \frac{1}{s_{1k}} (\eta + \varepsilon A_k + \delta C_k + \varepsilon^2 D_k + \varepsilon \delta E_k + \delta^2 B_k); \quad k = 1, 2,$$

где A_k, B_k, C_k, D_k, E_k — функции η и производных η по z .

После подстановки этих выражений в (38) с учетом (39) имеем

$$f_i + \varepsilon u_i + \delta v_i + \varepsilon^2 w_i + \varepsilon \delta x_i + \delta^2 y_i = O(\varepsilon^3, \varepsilon^2 \delta, \varepsilon \delta^2, \delta^3); \quad i = 1, 2, 3,$$

$$f_i = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad u_k = \frac{\partial A_k}{\partial z} + \frac{2 - s_{1k}}{2s_{1k}} \frac{\partial \eta^2}{\partial z}, \quad v_k = \frac{\partial C_k}{\partial z},$$

$$w_k = \frac{\partial D_k}{\partial z} + \frac{1}{s_{1k}} \frac{\partial}{\partial z} (\eta A_k) - \eta \frac{\partial A_k}{\partial z} + \frac{s_{3k}}{3s_{1k}} \frac{\partial \eta^3}{\partial z}; \quad k = 1, 2,$$

$$x_k = \frac{\partial E_k}{\partial z} + \frac{1}{s_{1k}} \frac{\partial}{\partial z} (\eta C_k) - \eta \frac{\partial C_k}{\partial z}, \quad y_k = \frac{\partial B_k}{\partial z} - \frac{s_{2k}}{s_{1k}} \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^3},$$

$$u_3 = b \left(\frac{1}{s_{12}} \frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{1}{s_{11}} \frac{\partial A_1}{\partial z} \right) + \eta \frac{\partial \eta}{\partial z} \left(\frac{1}{s_{11}} + \frac{1}{s_{12}} - \frac{3-2A}{1-A} \right),$$

$$w_3 = b \left[\frac{1}{s_{12}} \frac{\partial D_2}{\partial z} - \frac{1}{s_{11}} \frac{\partial D_1}{\partial z} + \frac{1}{s_{11}^2} \frac{\partial}{\partial z} (\eta A_1) - \frac{1}{s_{12}^2} \frac{\partial}{\partial z} (\eta A_2) \right] + \frac{2-A}{1-A} \frac{\partial \eta^3}{\partial z},$$

$$x_3 = b \left[\frac{1}{s_{12}} \frac{\partial E_2}{\partial z} - \frac{1}{s_{11}} \frac{\partial D_1}{\partial z} + \frac{1}{s_{11}^2} \frac{\partial}{\partial z} (\eta C_1) - \frac{1}{s_{12}^2} \frac{\partial}{\partial z} (\eta C_2) \right],$$

$$y_3 = b \left(\frac{1}{s_{12}} \frac{\partial B_2}{\partial z} - \frac{1}{s_{11}} \frac{\partial B_1}{\partial z} \right) - \frac{A}{1-A} \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^3}, \quad v_3 = b \left(\frac{1}{s_{12}} \frac{\partial C_2}{\partial z} - \frac{1}{s_{11}} \frac{\partial C_1}{\partial z} \right). \quad (40)$$

Из условий совместимости системы трех уравнений (40) получаем прежние (35) выражения для $\partial A_k / \partial z$, $\partial B_k / \partial z$, $k = 1, 2$ и, кроме того, дополнительно

$$\frac{\partial C_k}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E_k}{\partial z} = 0; \quad k = 1, 2,$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial z} = \frac{\eta^2}{4} \frac{\partial \eta}{\partial z} \left[\frac{2-A}{1-A} \left(5 - \frac{3}{s_{12}} \right) + \frac{7}{s_{12}} - \frac{1+4s_{31}}{s_{11}} - \frac{3}{s_{12}} \left(\frac{1}{s_{11}} + \frac{1}{s_{12}} \right) + 2b \left(\frac{s_{31}}{s_{11}^2} - \frac{s_{32}}{s_{12}^2} \right) \right]$$

$$\frac{\partial D_2}{\partial z} = \frac{\eta^2}{4} \frac{\partial \eta}{\partial z} \left[\frac{2-A}{1-A} \left(5 - \frac{3}{s_{11}} \right) + \frac{7}{s_{11}} - \frac{1+4s_{32}}{s_{12}} - \frac{3}{s_{11}} \left(\frac{1}{s_{11}} + \frac{1}{s_{12}} \right) + 2b \left(\frac{s_{31}}{s_{11}^2} - \frac{s_{32}}{s_{12}^2} \right) \right]. \quad (41)$$

При подстановке выражений (35), (41) в систему (40) приходим к модифицированному уравнению Кортевега-де-Фриза. В размерных переменных получаем

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \left(1 + \frac{12w}{r_0^2} \eta^2 \right) \frac{\partial \eta}{\partial z} + \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^3} = 0, \quad w = \frac{9}{8} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\nu} \right) - \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda\nu} - \frac{1}{\nu^2} - \frac{5}{24}.$$

Уравнение такого вида имеет три типа стационарных решений: при $w/\kappa > 0$ реализуются либо солитоны [9], либо кноидальные волны [10],

а при $w/\kappa < 0$ — решения типа ударной волны [9]. Солитонное решение, реализующееся, например, при $h_{01} = 3/4$, $h_{02} = 1$, $A = 2/7$, записывается следующим образом:

$$\eta = \pm a \operatorname{sech} \left[\frac{2a}{r_0^2} \sqrt{\frac{w}{\kappa}} (z - Ut) \right], \quad U = c_0 \left[1 + 2w \left(\frac{a}{r_0} \right)^2 \right]. \quad (42)$$

Таким образом, в отличие от (37) положительный и отрицательный солитоны (42) при одинаковой амплитуде распространяются с одинаковой скоростью.

Список литературы

- [1] Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 357 с.
- [2] Berkovsky B., Bashtovoi V. IEEE Trans. Magn. 1980. Vol. MAG=16. N 2. P. 288-297.
- [3] Баштовой В.Г., Фойгель Р.А. Магнитная гидродинамика. 1983. № 2. С. 55-60.
- [4] Справочник по специальным функциям / Под ред. М.Абрамовица, И.Стиган. М.: Мир, 1979. 830 с.
- [5] Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
- [6] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.
- [7] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
- [8] Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М., 1987. 480 с.
- [9] Jeffrey A., Kakutani T. // SIAM Rev. 1972. Vol. 14. N 4. P. 582-643.
- [10] Driscoll G.F., O'Neil T.M. // J. Math. Phys. 1976. Vol. 17. N 7. P. 1196-1200.

Институт механики
Москва

Поступило в Редакцию
31 мая 1993 г.