1994 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 64, в. 4
1994 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 64, N 4

01

ТЕПЛОВОЙ АНАЛОГ ЛАЗЕРА

И.А.Новиков

Предложен принцип действия нового устройства — теплового аналога лазера (теплового резонансного генератора). Сформулирована математическая модель его работы. Получены условия генерации гармонических тепловых волн. Показана принципиальная возможность устойчивой работы теплового генератора в средах с тепловой памятью.

Введение

В настоящее время проявлен большой интерес к исследованиям процессов переноса в средах с тепловой памятью (наследственных средах). Этот интерес связан с существованием предсказанных новых эффектов в процессах наследственного теплопереноса, а также с возможностью постановки принципиально новых задач, присущих только этим средам. Так, принципиальная возможность существования слабопоглощающей и усиливающей тепловой среды с памятью [1] и волновые эффекты распространения тепла в наследственных средах [2] приводят к возможности многих оптических волновых явлений и приборов. Кроме того, в рамках наследственного теплопереноса можно описать разнообразные физические явления [3], не описывающиеся классической теорией теплопереноса. Среди них теплоперенос при низких температурах в чистых кристаллах и диэлектриках (баллистическое распространение и второй звук), теплоперенос при воздействии ультракоротких импульсов лазерного излучения на металлы, перенос тепла в области перехода в стеклообразное состояние для органических жидкостей и полимеров, теплоперенос в дисперсных средах [3–5].

Ниже показано, что в тепловых средах с памятью возможна резонансная генерация гармонических тепловых волн (ТВ) с фиксированными частотами (модами) аналогично резонансной генерации электромагнитных волн в оптическом квантовом генераторе (ОКГ); при этом аналогия распространяется и на элементы ОКГ, необходимые для генерации. Возбуждаемые частоты в тепловом резонансном генераторе (ТРГ) зависят от свойств памяти теплофизической среды, геометрии и условий теплообмена тела, а также от интенсивности приложенных внешних полей, создающих усиливающую тепловую среду.

1. Принцип действия и математическая модель ТРГ

Известно [6], что для работы ОКГ необходимо иметь активную оптическую среду, а также открытый оптический резонатор Фабри–Перро, обеспечивающий положительную обратную связь и позволяющий выделить некоторые моды из общего контура возбуждения излучения линии. В ТРГ активной рабочей средой является специальным образом подобранная тепловая среда с памятью с распределенными объемными источниками в ней, пропорциональными температуре или ее производной по времени. В [1,2] показано, что при прохождении ТВ через такую среду коэффициент усиления ТВ $\exp(-(\xi(\omega))x)$ может быть больше единицы (что соответствует $\xi(\omega) < 0$). Области усиления ТВ $\omega \in (0, \omega_{\text{кр}})$ являются тепловым аналогом контура возбуждения оптической линии. Об их построении будет сказано ниже.

Тепловым аналогом оптического резонатора является стержень с теплоизолированным торцем $x = 0$. Боковая поверхность стержня находится в условиях теплообмена $\alpha_{\text{п}}$ со средой, имеющей постоянную температуру u_0. На втором торце стержня $x = l$ задано граничное условие третьего рода, моделирующее отток энергии во внешнюю среду. Материал для стержня — активная усиливающая тепловая среда с памятью, описанная в [1,2]. Практически для ее реализации создается мощное внешнее поле (электрическое, электромагнитное и т.д.), с помощью которого осуществляется накачка энергии в каждую точку стержня в соответствии с выбранным механизмом накачки. В качестве них можно использовать джоулев нагрев, нагрев в высокочастотном электромагнитном поле за счет диэлектрических потерь материала, выделение энергии при переполяризации диэлектрика в постоянном электрическом поле и т.д.

При некоторых условиях, описанных ниже, такая тепловая система обладает положительной обратной тепловой связью и является аналогом оптического резонатора с инверсно нанесенной средой. В ней возможна генерация мод в каком-то частотном диапазоне ТВ. При этом случайные флуктуации температуры на границе $x = l$ стержня задают начальное широкополостное по спектру распределение ТВ $\omega \in (0, \infty)$, а в процессе эволюции выживают моды, являющиеся собственными модами теплового резонатора (стержня). В отличие от ОКГ резонансная генерация в ТРГ может сопровождаться асимптотически растущим (при $t \to \infty$) температурным полем — тепловым взрывом. Поэтому при анализе работы ТРГ необходимо учитывать условие устойчивости резонансной генерации гармонических ТВ.

В математическую модель входят определяющие соотношения для плотностей теплового потока q и внутренней энергии e, а также уравнение сохранения внутренней энергии для стержня $x \in [0, l\rangle$ с теплообменом на боковой поверхности [7,8] (u — температура)

$$q(x,t) = -\lambda_0\left[\lambda_1(0)\frac{\partial u}{\partial x} + \int\limits_0^t \dot{\lambda}_1(\tau)\frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial x}d\tau\right]; \qquad t \geqslant 0,$$

$$e(x,t) - e_0 = \frac{\lambda_0}{a_0}\left[c_1(0)(u(x,t) - u_{\text{н}}) + \int\limits_0^t \cdot c_1(\tau)(u(x,t-\tau) - u_{\text{н}})d\tau\right];$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\operatorname{div} q + \sigma(x,t) - \frac{\alpha_{\text{п}}}{H}(u(x,t) - u_0); \qquad H = \frac{S}{P}. \tag{1}$$

Здесь S, P — площадь сечения и периметр стержня; e_p — начальное значение e; σ — мощность источников внутренней энергии; λ_0, a_0 — равновесные теплопроводность и температуропроводность; $\lambda_1(t)$, $c_1(t)$ — релаксационные функции (РФ), которые в соответствии с термодинамическими ограничениями считаются непрерывными и выпуклыми [9], причем $0 \leqslant \lambda_1(t) \leqslant 1$, $0 < c_1(t) \leqslant 1$. Обычно РФ — это линейная комбинация экспонент.

Распределенный источник энергии имеет вид

$$\sigma(x,t) = \sigma_1 + \sigma_2(u(x,t) - u_{\text{н}}) + \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{2}$$

Описанные механизмы накачки энергии соответствуют двум случаям источника:

$$\sigma_1 > 0, \quad \sigma_2 > 0, \quad \gamma_1 = 0 \qquad \text{и} \qquad \sigma_1 = \sigma_2 = 0, \quad \gamma_1 \neq 0.$$

В условия однозначности модели входят начальное условие $u(x,0) = u_{\text{н}}$ (и $\partial u(x,0)/\partial t = 0$ для сред типа Максвелла), условие теплоизоляции $q(0,t) = 0$ на границе $x = 0$ и краевое условие при $x = l$, моделирующее отток энергии (λ — коэффициент теплообмена для торца)

$$q(l,t) = \alpha[u(l,t) - u_{\text{г}}(t)]; \qquad u_{\text{г}} = \exp(i\omega t). \tag{3}$$

Модель работы ТРГ аналогична работе ОКГ в режиме непрерывной генерации. Считается, что в момент $t = 0$ на границе $x = l$ произошла δ-образная флуктуация температуры. Учитывая разложение $\delta(t)$ в виде интеграла Фурье и линейность задачи, можно рассматривать эволюцию каждой составляющей $\exp(i\omega t)$, $\omega \in (0, \infty)$ отдельно.

Применив к (1)–(3) преобразование Лапласа, решение задачи в области изображений (обозначаются соответствующими заглавными буквами), можно записать в виде

$$U(x,p) = \left[\frac{u_{\text{н}}}{p} + \frac{r_1}{p(p^2 C_1(p) - \tilde{\gamma}_0 p - r_0}\right]\left[1 - \frac{1}{D_0(p)} \operatorname{ch} h(p)x\right] + \frac{U_{\text{г}}(p)}{D_0(p)} \operatorname{ch} h(p)x;$$

$$h(p) = \sqrt{\frac{K(p)}{a_0}}; \qquad K(p) = \frac{pC_1(p) - \tilde{\gamma}_0 - \frac{r_0}{p}}{\Lambda_1(p)};$$

$$D_0(p) = \operatorname{ch} h(p)l + \frac{1}{\alpha Z(p)} \operatorname{sh} h(p)l; \qquad r_1 = \frac{a_0}{\lambda_0}(\sigma_1 + \alpha_{\text{п}} u_0/H);$$

$$Z(p) = \frac{1}{\gamma_0}\left[p^3\left(C_1(p) - \frac{\tilde{\gamma}_0}{p} - \frac{r_0}{p^2}\right)\frac{\Lambda_1(p) a_0}{\lambda_0^2}\right]^{1/2}; \qquad r_0 = \frac{a_0}{\lambda_0}(\sigma_2 - \alpha_{\text{п}}/H);$$

$$\tilde{\gamma}_0 = a_0 \gamma_1/\lambda_0; \qquad \gamma_0 = \lambda_0/\sqrt{a_0}. \tag{4}$$

В формулах (4) перейдем к оригиналам, используя теорию вычетов. При этом решение поставленной задачи можно представить в виде суммы

$$u(x,t) = u_c(x) + u_2(x,t) + u_3(x,t); \tag{5}$$

$$u_0(x) = \sum_{p_{l'}} \exp(p_l t) \left[1 - \frac{1}{D_0(p_l)} \operatorname{ch} h(p_l)x\right] \operatorname*{Res}_{p_l} \left\{ \frac{u_{\text{н}}}{p} + \frac{r_1}{p(p^2 C_1(p) - \tilde{\gamma}_0 p - r_0)} \right\}; \tag{6}$$

$$u_2(x,t) = \sum_{p_n} \exp(p_n t) \left[U_{\text{г}}(p_n) - \frac{u_{\text{н}}}{p_n} - \frac{r_1}{p_n(p_n^2 C_1(p_n) - \tilde{\gamma}_0 p_n - r_0)}\right] \times$$

$$\times \operatorname*{Res}_{p_n} \left\{ \frac{1}{D_0} \operatorname{ch} h(p)x \right\}; \tag{7}$$

$$u_3(x,t) = \sum_{p_m} \exp(p_m t) \left[\frac{1}{D_0(p_m)} \operatorname{ch} h(p_m)x\right] \operatorname*{Res}_{p_m} \{U_{\text{г}}(p)\}. \tag{8}$$

В (6)–(8) символ $\operatorname{Res}\{\cdot\}$ означает, что участвуют только особые точки (полюса) выражения, стоящего в $\{\cdot\}$. Первое слагаемое описывает стационарное температурное поле, возникающее из-за начальной температуры и постоянно действующих источников. Учитывая, что при $p \to 0$, $\Lambda_1(p) = C_1(p) = p^{-1}$ [1,2], стационарную часть решения можно записать в виде

$$u_c(x) = \left(u_{\text{н}} - \frac{r_1}{r_0}\right) \left[1 - \frac{1}{D_0(0)} \cos\sqrt{\frac{r_0}{a_0}}x\right];$$

$$D_0(0) = \cos\sqrt{\frac{r_0}{a_0}}l - \sqrt{\frac{r_0}{a_0}}\frac{l}{Bi}\sin\sqrt{\frac{r_0}{a_0}}l; \qquad Bi = \frac{\alpha l}{\lambda_0}. \tag{9}$$

Память среды не дает вклада в $u_c(x)$. При $r_0 \to 0$ ($\sigma_2 \to \alpha_{\text{п}}/H$) формула (9) переходит в известное стационарное распределение температуры [8]. Второе слагаемое $u_2(x,t)$ отвечает за устойчивость (при $t \to \infty$) работы ТРГ, поэтому его анализ дает нам условие асимптотически устойчивого режима ТРГ. Третье слагаемое $u_3(x,t)$ описывает нестационарное температурное поле из-за влияния внешнего воздействия $U_{\text{г}}(p)$. Его анализ дает интересующие нас условия резонансной генерации ТВ. Их совместимость с условиями устойчивости ТРГ определяет возможность принципиальной реализации ТРГ.

2. Анализ условий устойчивой резонансной генерации в ТРГ

Так как внешняя функция $U_{\text{г}}(p) = (p - i\omega)^{-1}$, то при вычислении функции $u_3(x,t)$ в правую часть формулы (8) дает вклад только один простой полюс в точке $p = i\omega$. Гиперболические функции в (8) удобно представить в виде разложений по экспонентам, что приводит к оригиналу $u_3(x,t)$ в виде

$$u_3(x,t) = \frac{\alpha Z(i\omega)}{1 + \alpha Z(i\omega)} \sum_{n=0}^{n_0} R_0^n(i\omega) \exp(-2nlh(i\omega)) \Big[\exp(-(l-x)h(i\omega) + i\omega t) +$$

$$+\exp(-(l+x)h(i\omega)+i\omega t)\Big]; \qquad R_0(p)=\frac{1-\alpha Z(p)}{1+\alpha Z(p)}. \tag{10}$$

Оно соответствует представлению о проходящих и отраженных тепловых волнах, причем в каждом члене разложения (10) содержится парциальная прямая волна, распространяющаяся от границы $x=l$ к границе $x=0$, и парциальная отраженная волна, распространяющаяся от $x=0$ к $x=l$. В (10) $R_0(i\omega)$ — суммарный коэффициент отражения от первой и второй границ пластины для гармонической ТВ. Зависящая от времени величина n_0 — это целая часть числа

$$(2n+1)\frac{l}{w}\mp\frac{x}{w},$$

где w — скорость распространения ТВ, а знаки $\mp$ соответствуют прямой и отраженной парциальным волнам.

На границе пластины $x=l$ $u_3(x,t)$ удобно представить в виде

$$u_3(l,t)=\frac{\alpha Z(i\omega)\exp(i\omega t)}{1+\alpha Z(i\omega)}\sum_{n=0}^{n_0}\Big[|R_0(i\omega)|\exp(-2l\xi(\omega))\Big]^n\exp(in\Phi_0)\times$$

$$\times\left\{1+\exp\left[-2l\xi(\omega)-\frac{2il\omega}{w(\omega)}\right]\right\}; \qquad \Phi_0(\omega)=\arg R_0(i\omega)-\frac{2l\omega}{w(\omega)};$$

$$\xi=\frac{\pm 1}{\sqrt{2a_0}}\Big[\operatorname{Re}K(i\omega)+|K(i\omega)|\Big]^{1/2}; \qquad w=\frac{\sqrt{2a_0}\omega}{\Big[|K(i\omega)|-\operatorname{Re}K(i\omega)\Big]^{1/2}}. \tag{11}$$

Здесь $\Phi_0(\omega)$ — полное изменение фазы гармонической ТВ при прохождении пластины в прямом и обратном направлениях и отражении на ее границах; $\xi(\omega)$, $w(\omega)$ — коэффициент ослабления и скорость распространения гармонических ТВ; $n_0=2nl/w(\omega)$.

Разложение (11) позволяет сформулировать амплитудное и фазовое условия генерации гармонических ТВ, аналогичные условиям генерации для продольных мод в ОКГ в подходе Бойда и Гордона [6]. Условие

$$\xi<\frac{1}{l}\ln|R_0(i\omega)| \tag{12}$$

позволяет увеличить амплитуду ТВ после ее прохождения внутри пластины и отражения на границах. Условие повторяемости по фазе

$$\Phi_0(\omega)=2\pi m, \quad m=1,2,\ldots \tag{13}$$

позволяет синхронизовать падающую и отраженные гармонические ТВ. Условия генерации (12) и (13) зависят от размеров стержня, равновесных и релаксационных теплофизических свойств тепловой среды, от внешней накачки энергии и от условий теплообмена на торце и боковой поверхности. Условие (12) жестче аналогичного условия $\xi(\omega)<0$, полученного в [1] для полуограниченного стержня, и совпадает с ним в случае идеального теплового контакта на торце стержня. Контур возбуждения линии ограничен осью 0ω и кривой $\xi(\omega)$, где $\xi(\omega) < 0$, $\omega \in (0, \omega_{\text{кр}})$. Совместное выполнение условий (12), (13) приводит к генерированию одной или нескольких мод ТВ, возбуждаемых в ТРГ. При этом может генерироваться конечное или бесконечное число мод. Проанализируем более подробно случай идеального теплового контакта, когда $R_0(i\omega) = 1$, а фазовое условие (13) принимает вид (при этом положим $\tilde{\gamma}_0 = 0$)

$$\omega_m = \frac{\pi(2m-1)w(\omega_m)}{2l}; \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{14}$$

Тепловая среда обладает большой дисперсией.

В обычной среде Фурье (без памяти) генерация ТВ невозможна [1]. В любой среде типа Фурье может генерироваться только конечное число мод ТВ, так как контур возбуждения ТВ ограничен по частоте $\omega \in (0, \omega_{\text{кр}})$ [1]. В средах типа Максвелла, может генерироваться как ограниченное число мод, так и неограниченное [1]. В эталонной среде Максвелла, соответствующей гиперболическому уравнению, возможна генерация только бесконечного числа мод. В более сложных средах типа Максвелла возможно генерация конечного числа мод ТВ. Амплитуда генерируемых волн быстро растет во времени до бесконечности (а реально ограничивается нелинейными эффектами в ТРГ, которые не рассматриваются в данной работе).

За устойчивость работы ТРГ отвечает слагаемое $u_2(x,t)$, возникающее из-за нулей функции $D_0(p)$, т.е. p_n — это корни уравнения,

$$\operatorname{cth} h(p)l + \frac{1}{\alpha Z(p)} = 0, \tag{15}$$

которое можно привести к виду

$$K(p) = -\frac{a_0}{l^2}\mu_n^2(\tilde{B}i); \qquad \tilde{B}i = Bi/p\Lambda_1(p). \tag{16}$$

Здесь функция соответствия $K(p)$ имеет различный вид для тепловых сред типа Фурье и типа Максвелла; μ_n — это корни уравнения

$$\operatorname{ctg}\mu = \mu/\tilde{B}i. \tag{17}$$

На корни p_n влияют само уравнение (1), источник, память среды, геометрия задачи, условия теплообмена. Уравнение (15) для p_n может приводить или к вещественным, или к парам комплексно-сопряженных корней, которые в $u_2(x,t)$ тоже приводят к вещественным выражениям. При анализе уравнения (15) или (16) только случай $\operatorname{Re} p_n < 0$ для всех корней p_n соответствует устойчивому затухающему решению.

В обычной среде Фурье $\lambda_1(t) = c_1(t) = H(t)$ (H — единичная функция Хевисайда), с объемным источником тепла вида (2) $\tilde{\gamma}_0 = 0$, тепловой взрыв возможен, а генерация ТВ невозможна.

В среде типа Фурье более сложного вида

$$\lambda_1(t) = 1 - (1 - \lambda_1(0))\exp(-\beta_0 t); \qquad p_1 = \beta_0/\lambda_1(0); \qquad \eta_0 = \frac{1}{\lambda_1(0)};$$

$$c_1(t) = 1 - (1 - c_1(0))\exp(-\beta_0 t); \qquad d_1 = c_1(0)/\lambda_1(0);$$
$$d_0 = (1 - d_1)p_1; \qquad h_1 = -d_0 p_1; \qquad \eta_1 = p_1(1 - \eta_0) \tag{18}$$

каждому значку n в уравнении (16) соответствуют два корня $p_n^{[1]}$, $p_n^{[2]}$. Представив корни $p_n^{[k]}$ в виде $p_n^{[k]} = -p_1 + \delta_n^{[k]}$ и используя уравнение (16), для $\delta_n^{[k]}$ можно получить выражение

$$\delta_n^{[k]} = \frac{\beta_n}{2d_1}\left(-1 \pm \sqrt{1 - 4d_1(h_1 - \eta_1 r_0)/\beta_n^2}\right);$$
$$\beta_n = d_0 - r_0\eta_0 - d_1 p_1 + c_0\mu_n^2/l^2. \tag{19}$$

При идеальном тепловом контакте на торце

$$\mu_n^2 = \pi^2\left(n - \frac{1}{2}\right)^2; \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{20}$$

Из анализа (19), (20) видно, что область устойчивости работы ТРГ соответствует условию $\beta_n > 0$, что дает ограничение на величину r_0

$$\frac{r_0}{\beta_0} < 1 + \theta - 2d_1; \qquad \theta = \frac{a_0\pi^2}{4l^2 p_1}. \tag{21}$$

При этом принято наиболее жесткое условие $n = 1$.

Для частного случая среды (18) с $c_1(0) = 1$ в [1] по существу получено амплитудное условие генерации ТВ при идеальном тепловом контакте на торце. Область его совместимости с условием (21) определяется неравенствами

$$\frac{1}{1 - \lambda_1(0)} < \frac{r_0}{\beta_0} < 1 + \theta - 2d_1; \qquad \theta_{\text{кр}} = \frac{2 - \lambda_1(0)}{\lambda_1(0)(1 - \lambda_1(0))} - 1. \tag{22}$$

Устойчивая генерация ТВ возможна только в некоторой области параметра $\theta > \theta_{\text{кр}}$. Используя результаты, полученные в [1], можно получить связь между параметрами θ, $\lambda_1(0)$ и $\omega_{\text{кр}}$ — границей генерации ТВ (по амплитудному критерию)

$$\theta_{\text{кр}} < \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{\left(\frac{\omega_{\text{кр}}}{p_1}\right)^2 + 1}{1 - \lambda_1(0)} + \frac{2}{\lambda_1(0)} - 1\right] \leqslant \theta. \tag{23}$$

В области генерации должна находиться хотя бы одна собственная мода резонатора, определяемая фазовым условием (14)

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2l}w(\omega_1); \qquad \omega \in (0, \omega_{\text{кр}}). \tag{24}$$

Совместное решение (22) и (24) позволяет определить θ и r_0/β_0. Таким образом, показано, что в тепловой среде с памятью (18) типа Фурье возможна устойчивая резонансная генерация гармонических ТВ.

Можно показать, что при идеальном тепловом контакте $\alpha \to \infty$ в случае гиперболического уравнения теплопроводности (эталонной среды Максвелла) генерация ТВ по амплитудному критерию (12) и тепловой взрыв возникают одновременно. Физически это очевидно, так как частотная область генерации ТВ не ограничена $\omega \in (0, \infty)$, что вызывает генерацию бесконечного числа мод. По-видимому, в более общих тепловых средах типа Максвелла (при более быстрой релаксации внутренней энергии по сравнению с тепловым потоком) возможна устойчивая генерация ТВ.

Таким образом, доказана принципиальная возможность создания ТРГ. Анализ конкретных материалов и механизмов накачки энергии, приводящих к практической реализации ТРГ, а также разработка более точной модели работы ТРГ (учет нелинейных эффектов и т.д.) будут проведены в следующих работах. Следует отметить, что для практической реализации ТРГ требуется проведение широких экспериментальных исследований в области теплофизики в средах с памятью, особенно по созданию усиливающей тепловой среды.

Список литературы

[1] *Новиков И.А.* // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 6. С. 1061–1064.
[2] *Новиков И.А.* // ИФЖ. 1988. Т. 55. № 4. С. 643–650.
[3] *Новиков И.А., Колпащиков В.Л., Шпин А.И.* // Реофизика и теплофизика неравновесных систем. Ч. 1. Минск, 1991. С. 58–64.
[4] *Birge N.O., Nagel S.L.* // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 54. N 25. P. 2674–2677.
[5] *Birge N.O.* // Phys. Rev. 1986. Vol. 34. P. 1631–1642.
[6] *Мэйтленд А., Данн М.* Введение в физику лазеров. М., 1978. 408 с.
[7] *Nunzioto I.W.* // Quart. Appl. Math. 1971. Vol. 29. N 7. P. 187–204.
[8] *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 599 с.
[9] *Колпащиков В.Л., Новиков И.А., Шнип А.И.* // Матер. VII Всесоюз. конф. по тепломассообмену. Минск, 1984. Т. 7. С. 40–44.

Научно-производственное объединение
Научно-исследовательский институт
метрологии им. Д.И.Менделеева
Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию
19 апреля 1993 г.
В окончательной редакции
4 августа 1993 г.