

©1995 г.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ О ПРОХОЖДЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ ЧЕРЕЗ КВАНТОВО-РАЗМЕРНЫЕ СТРУКТУРЫ В ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ПОЛЯХ

А.Б. Пашковский

Научно-исследовательский институт «Исток»,
141120, Фрязино, Россия
(Получена 10 февраля 1994 г. Принята к печати 23 февраля 1995 г.)

Разработан вариант теории возмущений, позволяющий решать широкий класс задач по прохождению электронов через квантово-размерные структуры в слабых высокочастотных полях. Найдены точные установившиеся решения нестационарного уравнения Шредингера в свободном пространстве в сильном однородном высокочастотном поле как в отсутствие, так и при наличии постоянного электрического поля. Как пример применения теории, получены аналитические выражения для высокочастотного тока и энергии, передаваемой электронами полю при прохождении электронов через периодически изменяющийся во времени скачок потенциала, тонкие барьеры и безбарьерные участки с локализованным высокочастотным полем. Обнаружена отрицательная динамическая проводимость скачка потенциала, тонких барьеров и коротких безбарьерных участков, а также локализация электронов в областях с высокочастотным полем.

В последние годы с развитием современной наноэлектронной технологии проявились новые физические объекты, позволяющие экспериментально исследовать микроскопическое проявление квантовых эффектов. В частности, появились приборы — диоды и транзисторы с резонансным туннелированием электронов, существенное влияние на характеристики которых оказывает квантово-механическое взаимодействие потока электронов с высокочастотным (ВЧ) электрическим полем при прохождении электронов через полупроводниковые структуры, состоящие из нескольких потенциальных ям и барьеров (квантово-размерные структуры). В связи с этим возник новый широкий класс задач, представляющих как чисто физический, так и значительный практический интерес и требующих нахождения установившихся решений нестационарного уравнения Шредингера. При малых амплитудах ВЧ поля все эти задачи в принципе могут быть решены в рамках стандартной нестационарной теории возмущений (описанной, например, в [1,2]). Однако по всей видимости, из-за возникающих при этом определенных технических трудностей, для анализа подобных задач стандартная нестационарная теория возмущений непосредственно

не используется, а применяются другие методы. При этом различные подходы, используемые, например, при анализе динамики резонансного туннелирования электронов и основанные на использовании приближения времени жизни [3], численного расчета прохождения гауссовых пакетов [4], кинетического уравнения Вигнера [5], неравновесных функций Грина [6], аналитических свойств коэффициента прохождения [7] или вообще не учитывают специфику взаимодействия электронов с ВЧ полем или очень сложны, дают во многом противоречивые результаты даже для двухбарьерных структур с одной квантовой ямой (ср., например, [5] и [6]) и в большинстве случаев не позволяют получать решения в аналитическом виде. Курьезность ситуации состоит в том, что до появления работ [8,9], несмотря на свою крайнюю простоту и серьезные исследования [10,11] на уровне, сравнимом по простоте с описанием прохождения электронов через статические потенциальные барьеры, не была до конца решена базовая в этой области задача о прохождении электронов через прямоугольный потенциальный барьер при наличии переменного высокочастотного поля. Поэтому представляет интерес более подробно, чем в [8], описать простой вариант нестационарной теории возмущений, который благодаря специфике упомянутых выше задач позволяет очень просто и наглядно получать их решения, а также продемонстрировать его применение на простейших примерах.

Пусть \hat{H}_0 — независящий от времени гамильтониан невозмущенной системы, а нестационарное уравнение Шредингера имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}_0 \psi + \hat{V} \psi, \quad (1)$$

где $\hat{V} = V_-(x)e^{i\omega t} + V_+(x)e^{-i\omega t}$ — зависящее от времени малое периодическое возмущение. Требуется найти установившееся решение уравнения (1), не зависящее от начальных условий и отвечающее заданным граничным условиям (например, при $x = -\infty$ задана плотность потока частиц, движущихся слева направо). Предполагается, что решение невозмущенной задачи известно. Специфика задачи состоит в том, что необходимо найти не все решения, а только установившиеся. Поэтому представляется более простым и наглядным не использовать общие формулы стандартной теории возмущений [1], а получить решение задачи непосредственно из уравнения Шредингера (подобно тому, как это делается в случае, когда потенциальная энергия рассматривается как возмущение (1)). Так как $V_{\pm}(x)$ малы, то решение (1) можно искать в виде $\psi = \psi_0(x, t) + \psi_1(x, t)$, где $\psi_0 = \psi_0(x)e^{-i\omega_0 t}$ — решение невозмущенной задачи, $|\psi_1| \ll |\psi_0|$, $\psi_0 = \varepsilon_0/\hbar$, ε_0 — энергия электронов в стационарном состоянии. Функция ψ_1 удовлетворяет уравнению

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \hat{H}_0 \psi_1 + (V_-(x)e^{i\omega t} + V_+(x)e^{-i\omega t})\psi_0. \quad (2)$$

Будем искать ψ_1 в виде [8]

$$\psi_1(x, t) = \psi_+(x)e^{-i(\omega_0+\omega)t} + \psi_-(x)e^{-i(\omega_0-\omega)t}.$$

$$\hbar(\omega_0 \pm \omega)\psi_{\pm}(x) = \hat{H}_0\psi_{\pm} + V_{\pm}(x)\psi_0(x). \quad (3)$$

Так как решение невозмущенной задачи известно, известны и общие решения уравнения (3). Частное решение уравнения (3) можно найти методом «вариации постоянных» [12], а во многих важных для практики случаях (например, для задач о прохождении электронов через системы прямоугольных или треугольных барьеров в ВЧ поле, координатная зависимость которого описывается полиномом конечной степени, такие решения могут быть найдены аналитически, в ряде случаев в виде соответствующих специальных функций (см. Приложение) или в виде степенных рядов [13]. Из условия непрерывности волновой функции и ее производной в каждый момент времени следует, что функции ψ_+ и ψ_- независимы. Это позволяет найти их при заданных граничных условиях, а значит, найти и волновую функцию всей системы.

Решения (3) можно также получить, используя функции Грина, что в ряде случаев, например для машинных расчетов, может оказаться более удобным.

Сделаем оценку применимости данной методики. Пусть $|V_{\pm}^{\max}|$ — максимальное значение $|V_{\pm}(x)|$. Рассмотрим уравнение (3) в узкой области, где $V_{\pm}(x) \simeq V_{\pm}^{\max}$. В этой области естественно искать частное решение (3) в классе функций, близких к ψ_0 , отсюда сразу получаем $\psi_{\pm} \sim \pm(V_{\pm}^{\max}/\hbar\omega)\psi_0$; а необходимое условие применимости теории возмущений имеет вид $|V_{\pm}^{\max}/\hbar\omega| \ll 1$.

Рассмотрим важный для практики случай, когда потенциальная энергия $U(x)$ в невозмущенном гамильтониане и возмущение $V_{\pm}(x)$ существенно изменяются в области $0 < x < a$, а при $x < 0$, $U(x) = V_{\pm}(x) = 0$ (такая ситуация типична для большинства упомянутых выше электронных приборов). Волновая функция стационарного состояния, нормированная на один электрон (для определенности считаем, что электроны движутся слева направо), имеет вид

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \exp(ikx) + D_0 \exp(-ikx), & x < 0, \\ A_0 f(x, \omega_0) + B_0 g(x, \omega_0), & 0 < x < a, \\ C_0 \exp[i\tilde{k}(x - a)], & x > a. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $f(x, \omega)$, $g(x, \omega)$ — линейно независимые решения уравнения $\hat{H}_0\psi = \varepsilon\psi$, $k = (2m^*\varepsilon_0/\hbar^2)^{1/2}$, $\tilde{k} = \{2m^*[\varepsilon_0 - U(a)]/\hbar^2\}^{1/2}$, m^* — эффективная масса электрона. Тогда функции ψ_{\pm} имеют вид

$$\psi_{\pm}(x) = \begin{cases} D_{\pm} \exp(-ik_{\pm}x), & x < 0, \\ A_{\pm} f(x, \omega_0 \pm \omega) + B_{\pm} g(x, \omega_0 \pm \omega) + \varphi_{\pm}(x), & 0 < x < a, \\ C_{\pm} \exp[i\tilde{k}_{\pm}(x - a)] \pm \frac{V_{\pm}(a)}{\hbar\omega} C_0 \exp[i\tilde{k}(x - a)], & x > a, \end{cases} \quad (5)$$

где $k_{\pm} = [2m^*(\omega_0 \pm \omega)/\hbar]^1/2$, $\tilde{k}_{\pm} = \{2m^*[\varepsilon_0 - U(a) \pm \hbar\omega]/\hbar^2\}^1/2$, $\varphi_{\pm}(x)$ — частные решения уравнения (3) при $0 < x < a$, $\pm[V_{\pm}(a)/\hbar\omega]C_0 \exp[i\tilde{k}(x - a)]$ — частные решения (3) при $x > a$, а коэффициенты A_{\pm} , B_{\pm} , C_{\pm} , D_{\pm}

находятся из условий шивания волновой функции и ее производных на границах области в каждый момент времени:

$$D_{\pm} = A_{\pm}f(0, \omega_0 \pm \omega) + B_{\pm}g(0, \omega_0 \pm \omega) + \varphi_{\pm}(0),$$

$$-ik_{\pm}D_{\pm} = A_{\pm}f'(0, \omega_0 \pm \omega) + B_{\pm}g'(0, \omega_0 \pm \omega) + \varphi'_{\pm}(0),$$

$$A_{\pm}f(a, \omega_0 \pm \omega) + B_{\pm}g(a, \omega_0 \pm \omega) + \varphi_{\pm}(a) = C_{\pm} \pm \frac{V_{\pm}(a)}{\hbar\omega} C_0,$$

$$A_{\pm}f'(a, \omega_0 \pm \omega) + B_{\pm}g'(a, \omega_0 \pm \omega) + \varphi'_{\pm}(a) = i\bar{k}_{\pm}C_{\pm} \pm i\bar{k} \frac{V_{\pm}(a)}{\hbar\omega} C_0. \quad (6)$$

Аналогичным образом могут быть получены выражения и для более высоких порядков теории возмущений. Кроме того, теория может быть естественным образом обобщена как на случай многочастотных полей, так и на случай, когда потенциальная энергия в невозмущенном гамильтониане имеет сложный вид и общие решения уравнения (3) могут быть найдены аналитически только при разбиении области от 0 до a на несколько характерных областей.

Необходимо отметить одну важную особенность задачи: если переписать систему уравнений (5) в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 1 & -f(0, \omega_0 \pm \omega) & -g(0, \omega_0 \pm \omega) & 0 \\ -ik_{\pm} & -f'(0, \omega_0 \pm \omega) & -g'(0, \omega_0 \pm \omega) & 0 \\ 0 & f(a, \omega_0 \pm \omega) & g(a, \omega_0 \pm \omega) & -1 \\ 0 & f'(a, \omega_0 \pm \omega) & g'(a, \omega_0 \pm \omega) & -i\bar{k}_{\pm} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} D_{\pm} \\ A_{\pm} \\ B_{\pm} \\ C_{\pm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{\pm}(0) \\ \varphi'_{\pm}(0) \\ -\varphi_{\pm}(a) \pm \frac{V_{\pm}(a)}{\hbar\omega} C_0 \\ -\varphi'_{\pm}(a) \pm i\bar{k} \frac{V_{\pm}(a)}{\hbar\omega} C_0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

то видно, что матрица системы уравнений имеет тот же вид, что и аналогичная матрица, описывающая в данной задаче статическое прохождение электронов. Поэтому можно ожидать, что в определенных условиях будет наблюдаться связь между особенностями статического прохождения электронов через систему и динамическими свойствами этой системы.

Пренебрегая членами 2-го порядка малости, с учетом вида волновой функции стационарного состояния и эрмитовости оператора возмущения для плотности тока за область взаимодействия ($j = j_0 + j_{\omega} = j_0 + j_{+\omega} + j_{-\omega}$) можно получить

$$j = \frac{q\hbar}{2m^*} \left\{ 2\bar{k}|C_0|^2 + \left[(\bar{k} + \bar{k}_+)C_0C_+^* \exp(i(\bar{k} - \bar{k}_+)(x-a)) + (\bar{k} + \bar{k}_-)C_0^*C_- \exp(i(\bar{k}_- - \bar{k})(x-a)) \right] e^{i\omega t} + \text{к.с.} \right\} \quad (8)$$

здесь к.с. — комплексно-сопряженные члены), а энергию, получаемую электронами от ВЧ поля (или отдаваемую электронами полю) за период колебаний $T = \omega/2\pi$, рассчитать по формуле

$$W = \frac{\hbar^2 \omega T}{m^*} \left[\tilde{k}_+ |C_+|^2 + k_+ |D_+|^2 - \tilde{k}_- |C_-|^2 - k_- |D_-|^2 \right]. \quad (9)$$

Однако в ряде случаев, например при расчете электронных приборов, энергообмен между полем и электронами удобно описывать при помощи так называемого наведенного тока [14]

$$j_i(t) = \frac{1}{a} \int_0^a j(x, t) dx.$$

При этом в квазистатическом приближении

$$W = \left\langle \int_0^a j(x, t) E(x, t) dx \right\rangle T = \langle j_i(t) E(t) \rangle a T = T |j_i| E a \cos(\Delta\varphi_i), \quad (10)$$

где

$$E(t) = \frac{1}{a} \int_0^a E(x, t) dx$$

— напряженность усредненного электрического поля, $\Delta\varphi_i$ — сдвиг фазы между наведенным током и полем на частоте ω , а скобками $\langle \rangle$ обозначено усреднение по периоду колебаний. Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести комплексную проводимость структуры σ , равную отношению комплексных амплитуд тока на выходе из структуры и напряженности электрического поля. Аналогичную величину для наведенного тока обозначим σ_i . Тогда выражение для передаваемой энергии (энергии взаимодействия) принимает вид

$$W = 2TaE^2 |\sigma_i| \cos(\Delta\varphi_i) = 2TaE^2 \operatorname{Re} \sigma_i. \quad (11)$$

Откуда из (9) с учетом вида волновой функции можно получить

$$\operatorname{Re} \sigma_i = \frac{\hbar^2 \omega}{2aE^2 m^*} \left(\tilde{k}_+ |C_+|^2 + k_+ |D_+|^2 - \tilde{k}_- |C_-|^2 - k_- |D_-|^2 \right). \quad (12)$$

Последний подход позволяет получить только реальную часть проводимости. Зато при этом можно проследить за потоками энергии, связанными с взаимодействием электронов с высокочастотным полем, а прошедшей $W(a)$ и отраженной $W(0)$ волнах в отдельности. Для простоты описания это можно сделать, введя формально проводимости в прошедшей и отраженной волнах

$$\operatorname{Re} \sigma_i(a) = \frac{W(a)}{2TaE^2} = \frac{\hbar^2 \omega}{2aE^2 m^*} \left(\tilde{k}_+ |C_+|^2 - \tilde{k}_- |C_-|^2 \right), \quad (13)$$

$$\operatorname{Re} \sigma_i(0) = \frac{W(0)}{2TaE^2} = \frac{\hbar^2 \omega}{2aE^2 m^*} \left(k_+ |C_+|^2 - k_- |C_-|^2 \right). \quad (14)$$

Приведенные формулы верны только при $\hbar\omega < \varepsilon_0$ и $\hbar\omega < \varepsilon_0 - U(a)$, когда общими решениями (3) для ψ_- при $x < 0$ и $x > a$ являются плоские волны. При $\hbar\omega > \varepsilon_0$ и $\hbar\omega > \varepsilon_0 - U(a)$ функции ψ_- принимают вид: $\psi_-(x) = C_- \exp[-\kappa(x-a)] - [V_{\pm}(a)/\hbar\omega]C_0 \exp[i\tilde{k}(x-a)]$ при $x > a$ и $\psi_-(x) = D_- \exp(\kappa x)$ при $x < 0$, здесь $\tilde{\kappa} = \left\{ 2m^*[\hbar\omega - \varepsilon_0 + U(a)]/\hbar^2 \right\}^{1/2}$, $\kappa = [2m^*(\hbar\omega - \varepsilon_0)/\hbar^2]^{1/2}$. Это приводит к появлению тока

$$j_{-\omega} = \frac{q\hbar}{2m^*}(\tilde{k} + i\tilde{\kappa})C_0^*C_- \exp[-(i\tilde{k} + \tilde{\kappa})(x-a) + i\omega t] + \text{к.с.}, \quad (15)$$

экспоненциально затухающего с расстоянием. При этом решение ψ_- можно интерпретировать как появление в области с ВЧ полем особого состояния (назовем его динамически связанным), на котором локализованы электроны.

Как пример применения теории, рассмотрим прохождение электронов через периодически изменяющийся скачок потенциала, тонкие барьеры, безбарьерные участки с локализованным однородным электрическим полем и прямоугольные барьеры $V_{\pm}(x) = -qEx$, где $2E$ — напряженность поля, q — заряд электрона. Для простоты считаем, что область локализации ВЧ поля совпадает с границами барьера.

1. Периодически изменяющийся скачок потенциала

Предположим, что взаимодействие электронов с ВЧ полем происходит на участке пренебрежимо малой длины a . Тогда возмущение принимает вид $V_{\pm}(x) = qEa\eta(x)$, где $\eta(x)$ — единичная функция. В этом случае возмущенная часть волновой функции имеет вид

$$\psi_{\pm}(x) = \begin{cases} D_{\pm} \exp(-ik_{\pm}x), & x < 0, \\ C_{\pm} \exp(ik_{\pm}x) \mp \frac{qEa}{\hbar\omega} \exp(ikx), & x > 0. \end{cases} \quad (16)$$

Условия сшивания волновой функции и ее производных дают

$$C_{\pm} = \pm \frac{qEa}{\hbar\omega} \frac{(k + k_{\pm})}{2k_{\pm}}, \quad D_{\pm} = \pm \frac{qEa}{\hbar\omega} \frac{(k - k_{\pm})}{2k_{\pm}},$$

$$W = \frac{(qEa)^2}{2m^*\omega k_+ k_-} (k_- - k_+)(k^2 - k_+ k_-)T, \quad (17)$$

$$\text{Re } \sigma_i = \frac{q^2 a}{4m^*\omega k_+ k_-} (k_- - k_+)(k^2 - k_+ k_-), \quad (18)$$

$$j_{\omega} = \frac{q^2 E a}{4m^*\omega k_+ k_-} (k_- - k_+)(k^2 - k_+ k_-) e^{i\omega t} + \text{к.с.} \quad (19)$$

Видно, что при взаимодействии с периодически изменяющимся скачком потенциала электроны отдают энергию полю, а сдвиг тока относительно поля составляет π . При этом надо отметить, что так как взаимодействие носит точечный характер, то проводимости по электронному и введенному току (см. формулы (18) и (19)) равны, а энергии, передаваемые электронами полю в прошедшей и отраженной волнах, одинаковы ($W(x < 0) = W(x > 0)$).

2. Высокий тонкий барьер с приложенным к нему ВЧ полем

Для аналитических исследований высокий тонкий барьер удобно заменить δ -барьером с той же эффективной площадью $\alpha = \int_0^a U(x) dx$. Приближение δ -барьера применимо для тонких и высоких барьеров, когда $2m^* \alpha a / \hbar^2 \ll 1$, $\varepsilon \ll U$ или $k \hbar^2 / a \gg U$, см, [15]). Тогда уравнение (2) переходит в уравнение

$$i \hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \alpha \delta(x) \psi_1 - (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) [\beta \delta(x) + \gamma \eta(x)] \psi_0, \quad (20)$$

где $\beta = qEa^2/2$, $\gamma = qEa$. Возмущенная часть волновой функции имеет тот же вид, что и в предыдущем случае, а условия непрерывности на δ -барьере (см. [15]) приводит к системе

$$D_{\pm} = C_{\pm} \mp \frac{qEa}{\hbar \omega} C_0, \\ -\frac{i \hbar^2}{2m^*} \left[k_{\pm} (C_{\pm} + D_{\pm}) \mp k \frac{qEa}{\hbar \omega} C_0 \right] + \alpha D_{\pm} - \beta C_0 = 0, \quad (21)$$

откуда находим

$$C_{\pm} = C_0 \frac{m^* \beta \pm \frac{m^* \gamma}{\hbar \omega} \left[\alpha - \frac{i \hbar^2}{2m^*} (k_{\pm} + k) \right]}{\alpha m^* - i \hbar^2 k_{\pm}}. \quad (22)$$

Подставив (22) в (8), с учетом вида C_0 можно получить

$$j_{\omega} = \frac{q^2 Ea}{2m^*} \frac{k^2 \hbar^5}{(m^* \alpha)^2 + k^2 \hbar^4} \left\{ \frac{k_+ - k_-}{\hbar \omega} + \frac{m^*}{2} \left[\frac{(k + k_+) a - 2i}{\alpha m^* + i \hbar^2 k_+} + \frac{(k + k_-) a + 2i}{\alpha m^* - i \hbar^2 k_-} \right] \right\} e^{i\omega t} + \text{к.с.} \quad (23)$$

Анализ формулы (23) показывает качественное отличие от предыдущего случая: при ω , стремящемся к 0, сдвиг фазы между полем и током $\Delta \varphi$ тоже стремится к 0 (заметим, что здесь и далее во всех случаях предполагается, что $|qEa| \ll \hbar \omega$). С ростом частоты $\Delta \varphi$ возрастает, а при $\alpha \gg \hbar^2 k / m^*$ сдвиг фазы мал, причем он тем меньше, чем выше и толще барьер. Последний результат качественно согласуется с выражением для времени пролета электронов через барьер, полученным в [11]. В то же время при малой толщине барьера $m^* \alpha \ll \hbar^2 k_{\pm}$ выражение (23) приводится к виду

$$j_{\omega} \simeq \frac{q^2 Eka}{2m^* \omega_0} \left\{ \frac{\alpha m^* a}{\hbar^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right\}, \quad (24)$$

откуда следует, что при $\omega / \omega_0 > (4\alpha m^* a / \hbar^2)^{1/2}$ тонкий потенциальный барьер, как и периодически изменяющийся скачок потенциала, обладает отрицательной динамической проводимостью.

3. Безбарьерный пролетный участок с локализованным однородным ВЧ полем

В этом случае, как и в случае скачка потенциала, можно непосредственно использовать систему (6), из которой, с учетом того, что частное решение уравнения (3) имеет вид

$$\varphi_{\pm} = \mp \frac{qEx}{\hbar\omega} \psi_0 + \frac{qE}{m^*\omega^2} \psi'_0, \quad (25)$$

получаем

$$C_{\pm} = \frac{qE}{\hbar\omega} \left[\frac{k\hbar}{m^*\omega} (k_{\pm} + k) \pm 1 \right] \frac{e^{ik_{\pm}a} - e^{ika}}{2ik_{\pm}}, \quad (26)$$

$$D_{\pm} = \frac{qE}{\hbar\omega} \left[\frac{k\hbar}{m^*\omega} (k_{\pm} - k) \mp 1 \right] \frac{e^{i(k_{\pm}+k)a} - 1}{2ik_{\pm}}. \quad (27)$$

Далее, подставляя C_{\pm} в (8), на границе пролетного участка находим

$$j_{\omega} = \frac{q^2 E}{2m^*\omega} \left\{ \left[\frac{\hbar k}{m^*\omega} (k_- + k)^2 - k_- - k \right] \frac{e^{i(k_- - k)a} - 1}{2ik_-} - \right. \\ \left. - \left[\frac{\hbar k}{m^*\omega} (k_+ + k)^2 + k_+ + k \right] \frac{e^{-i(k_+ - k)a} - 1}{2ik_+} \right\} e^{i\omega t} + \text{к.с.} \quad (28)$$

При $\omega \ll \omega_0$ формулу (28) можно заметно упростить, разложив экспоненты в ряд, с точностью до членов 3-го порядка

$$j_{\omega} \simeq \frac{q^2 Ea}{4\hbar k} \left[ika \frac{\omega}{\omega_0} - \left(1 - \frac{k^2 a^2}{3} \right) \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] e^{i\omega t} + \text{к.с.}, \quad (29)$$

откуда видно, что на низкой частоте при пролете безбарьерного участка с локализованным ВЧ полем сдвиг фазы между током и полем равен $\pi/2$. Это принципиально отличает пролет безбарьерных участков от прохождения частиц через барьер: там при $\omega \rightarrow 0$ $\Delta\varphi \rightarrow 0$. Объясняется это тем, что при свободном пролете коэффициент прохождения равен 1, поэтому любое изменение дна зоны проводимости ведет к появлению отраженной волны, в то время как уменьшение высоты тонкого барьера ведет к росту коэффициента прохождения.

Отметим, что когда справедливо сделанное выше разложение и $k^2 a^2 < 3$, $\text{Re } j_{\omega}(a, \omega) < 0$. Это означает, что при малых углах пролета электронов $\vartheta = (1/2)(\omega/\omega_0)ka \ll \pi$, сдвиг фаз между ВЧ током на выходе пролетного участка и приложенным напряжением превышает $\pi/2$. Учитывая то, что этот вывод противоречит классической теории, рассмотрим этот вопрос подробнее.

В отличие от двух предыдущих, в данном случае взаимодействие электронов и ВЧ поля носит распределенный характер. Поэтому для описания энергообмена между электронами и полем надо использовать

формулы (9), (12). Подставляя в (12) выражения для C_{\pm} и D_{\pm} , находим выражение для активной проводимости пролетного участка

$$\operatorname{Re} \sigma_i = \frac{q^2}{4am^*\omega k_+ k_-} \left\{ k_- \left[\left(\frac{k\hbar}{m^*\omega} (k_+ + k) + 1 \right)^2 (1 - \cos(k_+ - k)a) + \left(\frac{k\hbar}{m^*\omega} (k_+ - k) - 1 \right)^2 (1 - \cos(k_+ + k)a) \right] - k_+ \left[\left(\frac{k\hbar}{m^*\omega} (k_- + k) - 1 \right)^2 \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (1 - \cos(k_- - k)a) + \left(\frac{k\hbar}{m^*\omega} (k_- - k) + 1 \right)^2 (1 - \cos(k_- + k)a) \right] \right\}. \quad (30)$$

При малых ω это выражение можно заметно упростить, разложив k_{\pm} в ряд по малому параметру ω/ω_0 :

$$\operatorname{Re} \sigma_i \simeq \frac{q^2 a}{8\hbar k} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \left[\frac{k^2 a^2}{6} - 1 + \frac{ka \sin 2ka + 3(\cos 2ka - 1)}{4k^2 a^2} \right]. \quad (31)$$

Выражение в квадратных скобках отрицательно при $ka \leq 2.614$. Следовательно, активная проводимость пролетного участка действительно отрицательна, если ka меньше некоторой критической величины. Интересно отметить, что эта величина несколько больше получаемой из формулы (29).

Первые два слагаемых в квадратных скобках (31) относятся к прошедшим, а последнее — к отраженным электронным волнам. При $ka \gg 1$ (что соответствует классическому пределу) последнее слагаемое исчезает. При $ka \ll 1$ слагаемое $[ka \sin 2ka + 3(\cos 2ka - 1)]/4k^2 a^2 \simeq -1$, так что электроны, отраженные от пролетного участка, отдают ВЧ полю столько же энергии сколько и прошедшие. В этом случае при $ka \rightarrow 0$ $\operatorname{Re} \sigma_i \rightarrow -q^2 \omega^2 a / 4\hbar k \omega_0^2$. Это выражение, естественно, совпадает с (18) и с выражением для проводимости, получаемым из (29) в низкочастотном пределе.

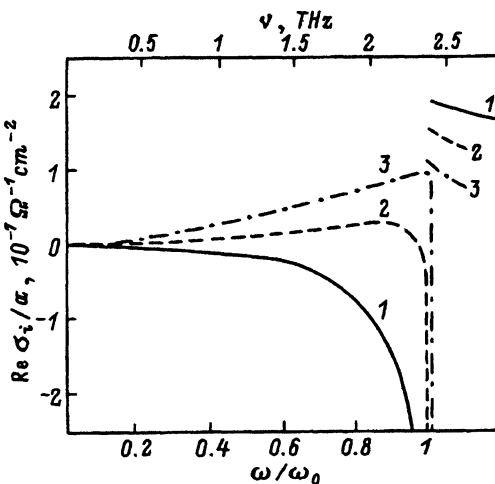


Рис. 1. Зависимость от нормированной частоты ω/ω_0 ($\omega_0 = \epsilon_0/\hbar$) реальной части проводимости по наведенному току пролетного участка с локализованным высокочастотным электрическим полем, приведенной к длине участка. Энергия электронов $\epsilon = 10$ мэВ, концентрация электронов $n = 10^{17} \text{ см}^{-3}$. Длина пролетного участка, a , Å: 1 — 50, 2 — 300, 3 — 500.

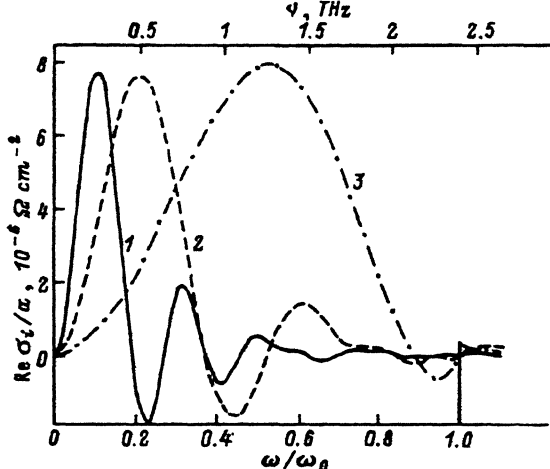


Рис. 2. То же, что и на рис. 1 для пролетного участка длиной a , Å: 1 — 1000, 2 — 2500, 3 — 5000.

Надо отметить, что в первом и третьем примерах при $\omega \rightarrow \omega_0$ величины $|C_-|$ и $|D_-|$, а следовательно, и $\text{Re } \sigma_i$ стремятся к ∞ . Подобные особенности, возникающие в линейном приближении, обычно снимаются при учете нелинейных эффектов и поля пространственного заряда.

Представляется интересным проследить как ведет себя активная проводимость пролетного участка при увеличении его длины (рис. 1, 2) не только на низких частотах (здесь и далее для использования одного масштаба при разных величинах a и большей наглядности рисунков приведены графики активной проводимости, приведенной к длине участка $\text{Re } Y = \text{Re } \sigma_i/a$). Видно, что при малых длинах пролетного участка ($ka \leq 2.614$) $\text{Re } \sigma_i < 0$ при всех $\omega < \omega_0$, при $\omega \rightarrow \omega_0$ $\text{Re } \sigma_i \rightarrow -\infty$, при $\omega = \omega_0$ зависимость претерпевает разрыв, а при $\omega > \omega_0$ $\text{Re } \sigma_i > 0$ для всех частот. Последнее, по-видимому, связано с образованием динамически связанного состояния (электроны с отрицательной энергией не могут уходить из области взаимодействия). При увеличении длины пролетного участка на низких частотах активная проводимость принимает положительные значения, однако она опять становится отрицательной при приближении ω к ω_0 . При дальнейшем увеличении длины пролетного участка интервал частот в окрестности ω_0 , при которых $\text{Re } \sigma_i$ начинает резко убывать, становится пренебрежимо мал. Интересно отметить, что при больших a ($ka \gg 2.614$) зависимость $\text{Re } \sigma_i(\omega)$ начинает носить осциллирующий характер и при $\omega \ll \omega_0$ совпадает с соответствующей зависимостью, рассчитанной с использованием классической механики [14,16].

4. Прохождение электронов через прямоугольный потенциальный барьер

В этом случае, как и в случаях периодически изменяющегося скачка потенциала и безбарьерного пролетного участка, следует непосредственно использовать систему (6), из которой (с учетом того что частное решение уравнения (3), как и в случае безбарьерного участка, описывается формулой (25)) сразу можно получить выражения для C_{\pm} и

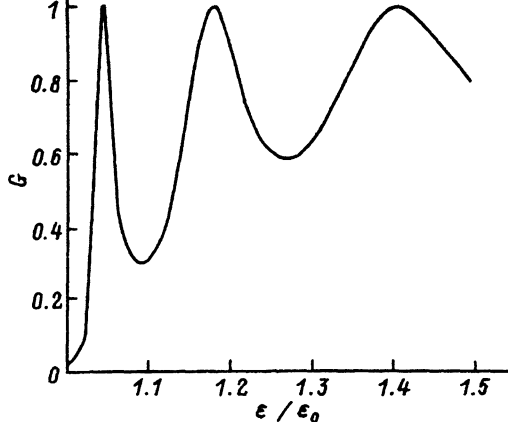


Рис. 3. Зависимость коэффициента прохождения электронов через прямоугольный потенциальный барьер толщиной $a = 250 \text{ \AA}$ и высотой $U = 200 \text{ мэВ}$ от нормированной энергии электронов ϵ/ϵ_0 ($\epsilon = 200 \text{ мэВ}$).

D_{\pm} . Однако эти величины в данном случае имеют хотя и простой, но довольно громоздкий вид, и поэтому выражения для токов и проводимости неудобны для аналитических исследований. Вообще говоря, прохождение электронов через потенциальные барьеры в ВЧ полях представляет самостоятельный интерес и выходит за рамки данной работы (эта задача довольно подробно рассматривалась в [17]). Поэтому ограничимся рассмотрением не вошедшего в [17] примера резонансного прохождения электронов над прямоугольным барьером из AlGaAs. Как отмечалось ранее, в том случае, когда коэффициент прохождения G мал, сдвиг фазы между током и полем при $\omega < \omega_0$ также мал. Вблизи резонансного прохождения электронов над барьером (рис. 3) характер рассматриваемых зависимостей заметно изменяется — в области резонансом на низких частотах появляется отрицательная дифференциальная проводимость (ОДП) (рис. 4). При этом на высоких частотах ОДП может наблюдаться даже при тех энергиях электронов, при которых с ростом ϵ коэффициент прохождения возрастает (т.е. низкочастотная ОДП отсутствует), а кроме того, при определенных условиях функция $\text{Re } \sigma_i(\omega)$ может принимать отрицательное значение в несколь-

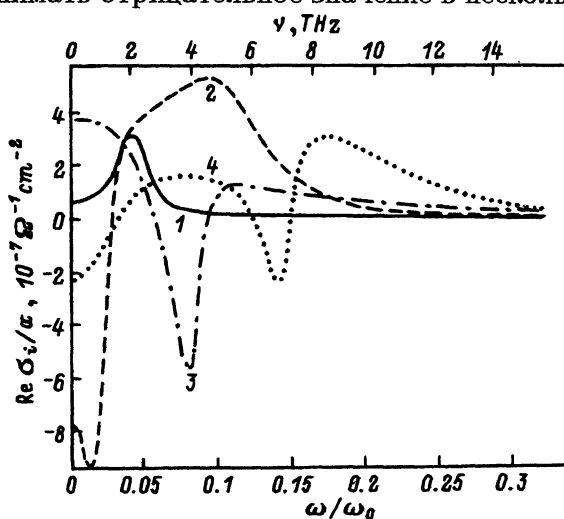
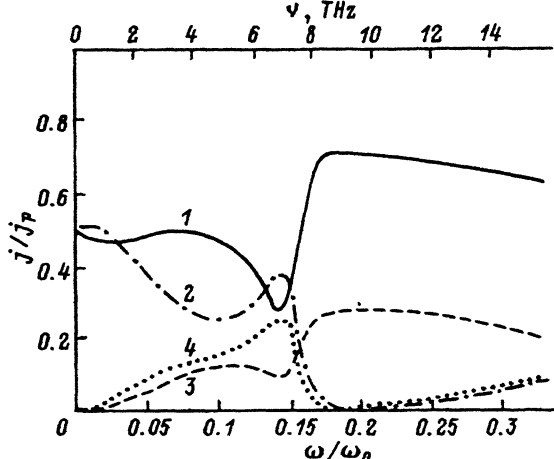


Рис. 4. Зависимость от нормированной частоты ω/ω_0 ($\omega_0 = \epsilon_0/\hbar$) реальной части проводимости по наведенному току, приведенной к толщине барьера, при прохождении электронов через прямоугольный потенциальный барьер толщиной $a = 250 \text{ \AA}$ и высотой $U = 200 \text{ мэВ}$. Энергия электронов: 1 — $\epsilon = 200 \text{ мэВ}$, 2 — $\epsilon = 1.063\epsilon_0$, 3 — $\epsilon = 1.126\epsilon_0$, 4 — $\epsilon = 1.189\epsilon_0$. Концентрация электронов $n = 10^{17} \text{ см}^{-3}$.

Рис. 5. Зависимость от нормированной частоты ω/ω_0 ($\omega_0 = \epsilon_0/\hbar$, $\epsilon_0 = 200$ мэВ) отношения потоков электронов, провазимодействовавших с ВЧ полем в прошедшей волне: 1 — $|j[\phi_+(a)]|$, 2 — $|j[\phi_-(a)]|$; в отраженной волне: 3 — $|j[\phi_+(0)]|$, 4 — $|j[\phi_-(0)]|$ к полному потоку $|j_p| = |j[\phi_+(a)]| + |j[\phi_-(a)]| + |j[\phi_+(0)]| + |j[\phi_-(0)]|$ при прохождении электронов через прямоугольный потенциальный барьер толщиной $a = 250$ Å и высотой $U = 200$ мэВ, энергия электронов $\epsilon = 237.8$ мэВ $= 1.189\epsilon_0$.



ких областях. Интересно отметить, что ОЛП исчезает на частотах, для которых приближенно выполняется равенство $G(\epsilon - \hbar\omega) \simeq G(\epsilon + \hbar\omega)$, а кроме того, $\text{Re } \sigma_i$ имеет экстремум примерно в тех точках, где функция $f(\omega) = G(\epsilon + \hbar\omega) - G(\epsilon - \hbar\omega)$ имеет соответствующий минимум или максимум. Соответствующим образом ведут себя и плотности потоков электронов, отдавших или поглотивших энергию $\hbar\omega$ (имеются в виду суммарные потоки в прошедших и отраженных волнах рис. 5), — они имеют минимумы или максимумы вблизи соответствующих экстремумов функции $G(\epsilon \pm \hbar\omega)$. Аналогичная картина наблюдается и для двухбарьерной структуры [13].

Создается впечатление, что для данных задач статический коэффициент прохождения играет роль плотности состояний: вероятность перехода электронов в диапазон энергий, где коэффициент прохождения велик, гораздо выше, чем в область, где он мал. По всей видимости эти особенности нестационарного транспорта связаны с идентичностью вида матриц, описывающих статическое и динамическое прохождение электронов через барьер. В данном случае модуль детерминанта матрицы системы (7) $|\Delta|$, соответствующий прохождению электронов через прямоугольный потенциальный барьер, имеет минимум как раз при тех энергиях электронов $\epsilon = \epsilon_0$, когда функция $G(\epsilon_0)$ максимальна. Так как модули детерминантов матриц, получаемых из матрицы системы (7) заменой соответствующего столбца на столбец, стоящий в уравнении (7) справа, $|\Delta_{C\pm}|$ и $|\Delta_{D\pm}|$ не имеют существенных особенностей при ϵ_0 , то и величины $|C_+| = |\Delta_{C+}|/|\Delta|$ и $|D_+| = |\Delta_{D+}|/|\Delta|$ (если $\epsilon + \hbar\omega \simeq \epsilon_0$) или $|C_-| = |\Delta_{C-}|/|\Delta|$ и $|D_-| = |\Delta_{D-}|/|\Delta|$ (если $\epsilon - \hbar\omega \simeq \epsilon_0$) имеют соответствующие максимальные значения.

Поэтому, исходя из идентичности вида матриц, описывающих статическое и динамическое прохождение электронов через квантово-размерные структуры, можно предположить, что высокочастотная ОЛП будет наблюдаться при прохождении электронов не только через прямоугольные потенциальные барьеры и двухбарьерные резонансно-туннельные структуры, но и через другие квантово-размерные системы с сильно и немонотонно изменяющимся коэффициентом прохождения.

Решение уравнения (3) в области, где \hat{H}_0 не зависит от координат и его собственные функции обладают свойством $\psi_0'' = \pm k^2 \psi_0$, а $V_{\pm}(x) = Vx^n$, естественно искать в виде

$$\psi_{\pm} = a_n^{\pm} x^n \psi_0 + b_{n-1}^{\pm} x^{n-1} \psi_0' + a_{n-1}^{\pm} x^{n-1} \psi_0 + \dots + a_0^{\pm} \psi_0. \quad (32)$$

При $V_{\pm}(x) = -qEx$, в частности, это приводит к формуле (25). При прохождении электронами безбарьерного участка с локализованным однородным ВЧ полем ($\psi_0(x, t) = \exp(ikx - i\omega_0 t)$) волновая функция электронов с точностью до членов 2-го порядка малости имеет вид

$$\psi(x, t) = \psi_0(x, t) \left(1 + \frac{2iqEx}{\hbar\omega} \sin \omega t + \frac{2iqEk}{m^* \omega^2} \cos \omega t \right). \quad (33)$$

Отсюда можно предположить, что точное решение уравнения

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - qEx\psi \cos \omega t \quad (34)$$

можно представить в виде

$$\psi(x, t) = \psi_0(x, t) \exp \left[\frac{iqEx}{\hbar\omega} \sin \omega t + \frac{iqEk}{m^* \omega^2} \cos \omega t + f(t) \right], \quad (35)$$

где $f(t)$ — пока неизвестная функция. Подставляя (35) в (34) и приравнивая левую и правую части, получаем

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = \exp \left[ikx - i\omega_0 t + \frac{iqEx}{\hbar\omega} \sin \omega t - \frac{iqEk}{m^* \omega^2} \cos \omega t - \right. \\ \left. - \frac{i(qE)^2}{4m^* \hbar \omega^3} \left(\omega t - \frac{\sin 2\omega t}{2} \right) \right]. \quad (36) \end{aligned}$$

Второе линейно независимое решение уравнения (34) получается из (36) заменой $k \rightarrow -k$.

При прохождении электронов через треугольные потенциальные барьеры или области со статическим однородным полем в случае, когда координатная часть периодического возмущения имеет вид $V_{\pm}(x) = Vx^n$, частное решение уравнения (3) может быть найдено в виде степенных рядов [12], однако в случае постоянного ВЧ поля его оказывается удобнее получать из точного решения уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - qE_0 x \psi - qEs \psi \cos \omega t. \quad (37)$$

Как и в предыдущем случае с учетом свойств функций Эйри $\text{Ai}(x)$ [18], решение ищем в виде

$$\psi(x, t) = \text{Ai}[-\xi + \beta(t)] \exp \left[-i\omega_0 t + \frac{iqEx}{\hbar\omega} \sin \omega t + f(t) \right], \quad (38)$$

где $\xi = (2m^*qE_0/\hbar^2)^{1/3}(x + \varepsilon/qE_0)$ (см. [1], гл. III), а функции $\beta(t)$ и $f(t)$ — пока неизвестны. Подставляя (38) в (37) и приравнявая левую и правую части, находим

$$\beta(t) = \left(\frac{2m^*qE_0}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{qE}{m^*\omega^2} \cos \omega t, \quad (39)$$

$$f(t) = -\frac{iq^2EE_0}{m^*\hbar\omega^3} \sin \omega t - \frac{i(qE)^2}{4m^*\hbar\omega^3} \left(\omega t - \frac{\sin 2\omega t}{2} \right). \quad (40)$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = \text{Ai} \left[- \left(\frac{2m^*qE_0}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(x + \frac{\varepsilon}{qE_0} - \frac{qE}{m^*\omega^2} \cos \omega t \right) \right] \exp \left[-i\omega t + \right. \\ \left. + \frac{iqEx}{\hbar\omega} \sin \omega t - \frac{iq^2EE_0}{m^*\hbar\omega^3} \sin \omega t - \frac{i(qE)^2}{4m^*\hbar\omega^3} \left[\omega t - \frac{\sin 2\omega t}{2} \right] \right]. \quad (41) \end{aligned}$$

Второе линейно независимое решение уравнения (37) получается из (41) заменой Ai на Bi (см. [18]). Раскладывая (41) по малому параметру, получаем решения уравнения (3) при $\psi_0 = \text{Ai}(\xi)$:

$$\begin{aligned} \psi_{\pm}(x) = \pm \left(\frac{qEx}{\hbar\omega} - \frac{q^2EE_0}{m^*\hbar\omega^3} \right) \text{Ai} \left[- \left(\frac{2m^*qE_0}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(x + \frac{\varepsilon}{qE_0} \right) \right] + \\ + \left(\frac{2m^*qE_0}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(\frac{qE}{m^*\omega^2} \right) \text{Ai}' \left[- \left(\frac{2m^*qE_0}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(x + \frac{\varepsilon}{qE_0} \right) \right]. \quad (42) \end{aligned}$$

Надо отметить, что волновые функции (36), (41), а также функция, приведенная в работе [11] для потенциала, постоянного по координате и гармонически изменяющегося во времени, позволяют довольно просто решать задачи о прохождении электронов через системы прямоугольных и треугольных ям и барьеров в сильном однородном переменном поле. Однако рассмотрение этих задач выходит за рамки данной работы.

Автор благодарен Е.И.Голанту и Я.Б.Мартынову за внимание к работе и полезные замечания.

Данная работа поддерживается Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 94-02-04449 и Научным советом по программе «Физика твердотельных наноструктур», проект № 1-050.

- [1] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Квантовая механика* (М., Наука, 1989) гл. VI.
- [2] Н.Б. Делоне, В.П. Крайнов. *Атом в сильном световом поле* (М., Энергоатомиздат, 1984).
- [3] E.R. Brown, C.D. Parker, T.C.L.G. Solner. *Appl. Phys. Lett.*, **54**, 934 (1989).
- [4] Е.А. Волкова, Ф.М. Попов, О.Б. Поповичева. *ФТП*, **25**, 1618 (1991).
- [5] W.R. Frensley. *Superlat. Microstruct.*, **4**, 497 (1988).
- [6] L.Y. Chen, C.S. Ting. *Phys. Rev. B*, **43**, 2097 (1991).
- [7] V. Kislov, A. Kamenev. *Appl. Phys. Lett.*, **59**, 1500 (1991).
- [8] А.Б. Пашковский. *Письма ЖТФ*, **19**, 1 (1993).
- [9] А.Б. Пашковский. *Письма ЖТФ*, **19**, 7 (1993).
- [10] S. Collins, D. Lowe, J.R. Barker, *J. Phys. C: Sol. St. Phys.*, **20**, 6213 (1987).
- [11] M. Buttiker, R. Landauer. *Phys. Rev. Lett.*, **49**, 1739 (1982).
- [12] Э. Камке. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям* (М., Наука, 1965) с. 148.
- [13] Е.И. Голант, А.Б. Пашковский. *ФТП*, **28**, 954 (1994).
- [14] И.В. Лебедев. *Техника и приборы сверхвысоких частот* (М., Энергия, 1964) т. 2, с. 27.
- [15] В.М. Галицкий, Б.М. Карнаков, В.И. Коган. *Задачи по квантовой механике* (М., Наука, 1981) с. 172.
- [16] Е.И. Голант, А.Б. Пашковский, А.С. Тагер. *Радиотехника и электроника*, **39**, 832 (1994).
- [17] Е.И. Голант, А.Б. Пашковский, А.С. Тагер. *ФТП*, **28**, 740 (1994).
- [18] *Справочник по специальным функциям*, под ред. М. Абрамовича и И. Стиган (М., Наука, 1979).

Редактор Т.А. Полянская
