

Зонная структура резонансного двумерного фотонного кристалла

© С.Я. Ветров, И.В. Тимофеев*, Н.В. Рудакова

Сибирский федеральный университет,
Красноярск, Россия

* Институт физики им. Л.В. Киренского СО РАН,
Красноярск, Россия

E-mail: atrum528@mail.ru

(Поступила в Редакцию 2 июня 2009 г.)

Проведен расчет зонной структуры резонансных двумерных фотонных кристаллов двух типов, один из которых состоит из бесконечных диэлектрических цилиндров, образующих квадратную решетку, заполненную резонансным газом, другой — из бесконечных цилиндрических отверстий, заполненных резонансным газом и образующих квадратную решетку в диэлектрической матрице. Результаты получены с помощью метода разложения собственных функций по плоским волнам. В обоих случаях показано, что сочетание дисперсии резонансного газа с дисперсией двумерной структуры с фотонной запрещенной зоной приводит к появлению вблизи края запрещенной зоны дополнительной узкой полосы пропускания либо к дополнительной запрещенной зоне в сплошном спектре фотонного кристалла. Проведенные расчеты показывают, что новые свойства дисперсии существенно зависят от плотности резонансного газа, положения резонансной частоты относительно края запрещенной зоны, направления распространения электромагнитных волн.

Работа выполнена при поддержке грантов Президента РФ № 3818.2008.3, 1292.2008.2, программы Минобрнауки РФ „Развитие научного потенциала высшей школы“ РНП № 2.1.1/3455, проектов Президиума РАН № 27.1, СО РАН № 5, № 144.

1. Введение

Фотонные кристаллы (ФК) представляют собой, как правило, искусственные структуры с периодически меняющейся в пространстве диэлектрической проницаемостью. Из-за пространственной периодичности электромагнитные волны в ФК имеют зонный характер спектра подобно тому, как периодический в пространстве потенциал приводит к зонному спектру электронов.

Благодаря наличию вследствие периодичности фотонных запрещенных зон (ФЗЗ) и областей аномального возрастания плотности фотонных состояний ФК позволяют реализовать ряд интересных режимов распространения электромагнитных волн [1–3]. Например, в трехмерных ФК могут существовать полные запрещенные зоны. Это означает, что в запрещенном спектральном диапазоне свет любой поляризации не может войти в ФК ни в одном направлении. В области полной фотонной запрещенной зоны невозможно спонтанное излучение, если частота квантового перехода лежит в области запрещенных фотонных энергий. Другое важное свойство фотонных кристаллов — высокая степень локализации электромагнитных волн на дефектах решетки. При наличии дефектов в запрещенных зонах ФК возникают дефектные уровни энергии. Сочетание локализации света и управления временем жизни атома отличает фотонно-кристаллические материалы от других оптических систем. Фотонные материалы вызывают интерес как новые оптические материалы, обладающие уникальными свойствами.

На основе ФК-материалов созданы новые типы волноводов [4,5], предложены способы увеличения эффективности нелинейно-оптических процессов [6–8], обсуждаются идеи по развитию элементной базы оптоэлектронной техники и информационных технологий [9].

Спектральные свойства ФК можно дополнительно существенно изменять, помещая внутрь периодической структуры резонансные среды (атомные или молекулярные газы). Однако эти изменения проявляются лишь в узкой области частот вблизи резонансной частоты, поэтому такой фотонный кристалл называется резонансным фотонным кристаллом (РФК). Простейшей реализацией резонансного одномерного ФК являются слоистые структуры, состоящие из чередующихся слоев двух материалов, в качестве одного из которых рассматривается резонансный газ [10]. Спектральные свойства таких РФК с учетом затухания изучались в работах [11,12]. Оказалось, что сочетание резонансной дисперсии газа с дисперсией ФК-структуры приводит к качественному изменению спектров фотонных кристаллов, появляются узкие полосы прозрачности в фотонной запрещенной зоне, а также дополнительные запрещенные зоны в спектре пропускания ФК-структуры. Такие структуры с комбинированной дисперсией перспективны для создания спектральных призм с увеличенной дисперсией и узкополосных фильтров с управляемыми эксплуатационными характеристиками.

В настоящей работе с помощью метода разложения собственных функций по плоским волнам исследован спектр электромагнитных возбуждений наполненных ре-

зонансным газом двумерных структур с фотонными запрещенными зонами.

2. Модель и метод плоских волн

Рассмотрим два типа образцов резонансных фотонных кристаллов: а) элементы кристалла представляют собой бесконечные по длине одинаковые диэлектрические цилиндры, образующие квадратную решетку, заполненную резонансным газом; б) резонансным газом заполнены бесконечные по длине полые цилиндрические отверстия, образующие квадратную решетку в диэлектрической матрице.

В первом случае структура характеризуется диэлектрическими проницаемостями соответственно стержней и резонансного газа ε_1 и $\varepsilon_2(\omega)$. Диэлектрическая проницаемость газа в модели Лоренца дается выражением [13]

$$\varepsilon_2(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}, \quad (1)$$

где $\omega_p^2 = 4\pi NFe^2/m$, e — заряд электрона, m — масса электрона, N — плотность резонансных атомов, F — сила осциллятора, γ — ширина линии, ω_0 — центральная частота резонанса, ω — частота излучения.

Будем считать, что ось цилиндров перпендикулярна xy -плоскости и параллельна z -оси. Центры сечений цилиндров образуют в плоскости xy квадратную решетку Браве. Вектор произвольного узла квадратной решетки Браве имеет вид

$$\mathbf{r}_\perp(l) = l_1 \mathbf{a}_1 + l_2 \mathbf{a}_2, \quad (2)$$

где l_1, l_2 — целые числа; векторы элементарных трансляций

$$\mathbf{a}_1 = a(1, 0), \quad \mathbf{a}_2 = a(0, 1). \quad (3)$$

Здесь a — параметр решетки. Вектор обратной решетки имеет вид

$$\mathbf{G} \equiv \mathbf{G}_\perp(h) = h_1 \mathbf{b}_1 + h_2 \mathbf{b}_2, \quad (4)$$

где h_1, h_2 — целые числа, векторы элементарных трансляций обратной решетки имеют вид

$$\mathbf{b}_1 = \frac{2\pi}{a}(1, 0), \quad \mathbf{b}_2 = \frac{2\pi}{a}(0, 1). \quad (5)$$

Расчет дисперсионной картины рассматриваемого резонансного ФК проведем методом плоских волн [14–16] для электромагнитных волн, распространяющихся в плоскости xy перпендикулярно стержням так, что вектор электрического поля направлен по оси z (s -поляризация).

Для s -поляризованных электромагнитных волн, распространяющихся в РФК, волновое уравнение сводится к скалярному уравнению для z -компоненты электрического поля $E_z(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r})$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) E(\mathbf{r}_\perp) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\mathbf{r}_\perp) E(\mathbf{r}_\perp) = 0, \quad (6)$$

где $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_\perp = (x, y)$ — двумерный радиус-вектор, $\varepsilon(\mathbf{r}_\perp)$ — диэлектрическая проницаемость.

Уравнение (6) представляет собой дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами, поэтому поле $E(\mathbf{r}_\perp)$ можно представить в виде блоховской волны. С учетом этого Фурье-разложение для электрического поля имеет вид

$$E(\mathbf{r}_\perp) = \sum_{\mathbf{G}_\perp} E_{\mathbf{k}_\perp}(\mathbf{G}_\perp) e^{i(\mathbf{G}_\perp + \mathbf{k}_\perp)\mathbf{r}_\perp}, \quad (7)$$

где суммирование производится по всем векторам обратной решетки, $\mathbf{k} \equiv \mathbf{k}_\perp = (k_1, k_2, 0)$ — двумерный волновой вектор.

Поскольку $\varepsilon(\mathbf{r}_\perp)$ является периодической функцией с периодом решетки Браве

$$\varepsilon(\mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\perp(l)) = \varepsilon(\mathbf{r}_\perp), \quad (8)$$

ее можно разложить в ряд Фурье

$$\varepsilon(\mathbf{r}_\perp) = \sum_{\mathbf{G}_\perp} \hat{\varepsilon}(\mathbf{G}_\perp) e^{i\mathbf{G}_\perp \mathbf{r}_\perp}. \quad (9)$$

Диэлектрическая проницаемость для РФК типа а может быть записана в виде

$$\varepsilon(\mathbf{r}_\perp) = \varepsilon_2(\omega) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2(\omega)) \sum_l \Theta(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_\perp(l)), \quad (10)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2(\omega)$ — диэлектрические проницаемости цилиндра и резонансного газа в модели Лоренца. Функция $\Theta(\mathbf{r}_\perp) = 1$ внутри сечения цилиндра и $\Theta(\mathbf{r}_\perp) = 0$ вне его. Для модели РФК типа б диэлектрическая проницаемость получается из выражения (10) заменой $\varepsilon_2(\omega) \rightarrow \varepsilon_1$ и $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2(\omega)$. Фурье-коэффициенты в (9) для диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\mathbf{r}_\perp)$, заданной в виде (10), определяются посредством выражения

$$\hat{\varepsilon}(\mathbf{G}_\perp) = \varepsilon_2 \delta_{\mathbf{G}_\perp 0} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2(\omega)) M_{\mathbf{G}_\perp 0}, \quad (11)$$

где

$$M_{\mathbf{G}_\perp 0} = \frac{1}{S} \int_S d^2 \mathbf{r}_\perp \Theta(\mathbf{r}_\perp) e^{-i\mathbf{G}_\perp \mathbf{r}_\perp} = 2f \frac{J_1(|\mathbf{G}_\perp| r)}{|\mathbf{G}_\perp| r}. \quad (12)$$

Здесь $J_1(z)$ — функция Бесселя первого рода, r — радиус цилиндров, $f = \pi r^2/a^2$ — фактор заполнения, т.е. доля диэлектрика или резонансного газа в ФК соответственно для моделей типа а или б.

После подстановки (7) и (9) в уравнение Максвелла (6) получаем

$$(\mathbf{k}_\perp + \mathbf{G}_\perp)^2 E_{\mathbf{k}_\perp}(\mathbf{G}_\perp) = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\mathbf{G}'_\perp} \hat{\varepsilon}(\mathbf{G}_\perp - \mathbf{G}'_\perp) E_{\mathbf{k}_\perp}(\mathbf{G}'_\perp). \quad (13)$$

Подставляя выражение для диэлектрической проницаемости (11) в уравнение (13) и учитывая (1), получаем уравнение для двумерного РФК

$$\left[(\mathbf{k}_\perp + \mathbf{G}_\perp)^2 \delta_{\mathbf{G}_\perp \mathbf{G}'_\perp} - \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \right) \delta_{\mathbf{G}_\perp \mathbf{G}'_\perp} - \frac{\omega^2}{c^2} \left(\varepsilon_1 - 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \right) M_{\mathbf{G}_\perp \mathbf{G}'_\perp} \right] E_{\mathbf{k}_\perp}(\mathbf{G}'_\perp) = 0. \quad (14)$$

Дальнейшее преобразование (14) проведем, используя методику, описанную в [15,16]. Ограничимся конечным числом членов разложения Фурье для электромагнитного поля. В этом случае (14) примет вид матричного уравнения, которое приводится к виду полинома по собственным значениям ω

$$\omega^4 I - \omega^3 i\gamma I - \omega^2 (I\omega_0^2 + KT^{-1} + (I - M)T^{-1}\omega_p^2) + \omega i\gamma KT^{-1} + \omega_0^2 KT^{-1} = 0, \quad (15)$$

где введены обозначения для матриц

$$I = \delta_{\mathbf{G}_\perp \mathbf{G}'_\perp}, \quad M = M_{\mathbf{G}_\perp \mathbf{G}'_\perp}, \\ K = (\mathbf{k}_\perp + \mathbf{G}_\perp)^2 \delta_{\mathbf{G}_\perp \mathbf{G}'_\perp}, \quad T = I + (\varepsilon_1 - 1)M. \quad (16)$$

Полиномиальное уравнение на собственные значения эквивалентно линейному уравнению на собственные значения

$$Wu = \omega u \quad (17)$$

с нормальной формой Фробениуса W , составленной из коэффициентов многочлена (15)

$$W = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ D & C & B & A \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где коэффициенты

$$A = i\gamma I, \\ B = I\omega_0^2 + KT^{-1} + (I - M)T^{-1}\omega_p^2, \\ C = -i\gamma KT^{-1}, \\ D = -\omega_0^2 KT^{-1}.$$

Для заданного волнового вектора \mathbf{k}_\perp в зоне Бриллюэна уравнение (17) позволяет найти собственные частоты ω , вещественная часть которых дает значение собственной частоты электромагнитного поля, мнимая часть ω характеризует затухание моды. Возможны лишние решения (17), соответствующие не затухающим со временем модам электромагнитного поля. Поэтому для получения дисперсионных кривых необходимо осуществлять отбор физически корректных решений на основе условия $\text{Im}(\omega) \geq 0$.

Для модели РФК типа b диэлектрическая проницаемость имеет вид

$$\varepsilon(\bar{\mathbf{r}}_\perp) = \varepsilon_1 + (\varepsilon_2(\omega) - \varepsilon_1) \sum_l \Theta(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_\perp(l)), \quad (19)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2(\omega)$ — соответственно диэлектрические проницаемости диэлектрической матрицы и резонансного газа, которым заполнены полые цилиндрические отверстия. Выражение для Фурье-коэффициентов $\hat{\varepsilon}(\mathbf{G}_\perp)$

$$\hat{\varepsilon}(\mathbf{G}_\perp) = \varepsilon_1 \delta_{\mathbf{G}_\perp 0} + (\varepsilon_2(\omega) - \varepsilon_1) M_{\mathbf{G}_\perp 0}, \quad (20)$$

$$M_{\mathbf{G}_\perp 0} = \frac{1}{S} \int_S d^2 \mathbf{r}_\perp \Theta(\mathbf{r}_\perp) e^{-i\mathbf{G}_\perp \mathbf{r}_\perp} = 2f \frac{J_1(|\mathbf{G}_\perp| r)}{|\mathbf{G}_\perp| r}. \quad (21)$$

Уравнение (17) имеет ту же структуру матрицы W , что и (18), с коэффициентами

$$A = i\gamma I, \\ B = I\omega_0^2 + KT^{-1} + MT^{-1}\omega_p^2, \\ C = -i\gamma KT^{-1}, \\ D = -\omega_0^2 KT^{-1}, \quad (22)$$

где

$$I = \delta_{\mathbf{G}_\perp \mathbf{G}'_\perp}, \quad M = M_{\mathbf{G}_\perp \mathbf{G}'_\perp}, \quad K = (\mathbf{k}_\perp + \mathbf{G}_\perp)^2 \delta_{\mathbf{G}_\perp \mathbf{G}'_\perp}, \\ T = \varepsilon_1 \delta_{\mathbf{G}_\perp \mathbf{G}'_\perp} + (1 - \varepsilon_1)M. \quad (23)$$

3. Результаты расчетов

В первую очередь рассмотрим результаты расчета зонной структуры спектра для образца РФК типа a, элементами которого являются диэлектрические цилиндры, образующие квадратную решетку, заполненную резонансным газом. Расчеты проводились для РФК с диэлектрической проницаемостью цилиндров $\varepsilon_1 = 3.24$ и периодом структуры $a = 152$ nm. Фактор заполнения $f = 24\%$. Ширина линии и плазменная частота резонансного газа близки к используемым в [10] для паров ртути:

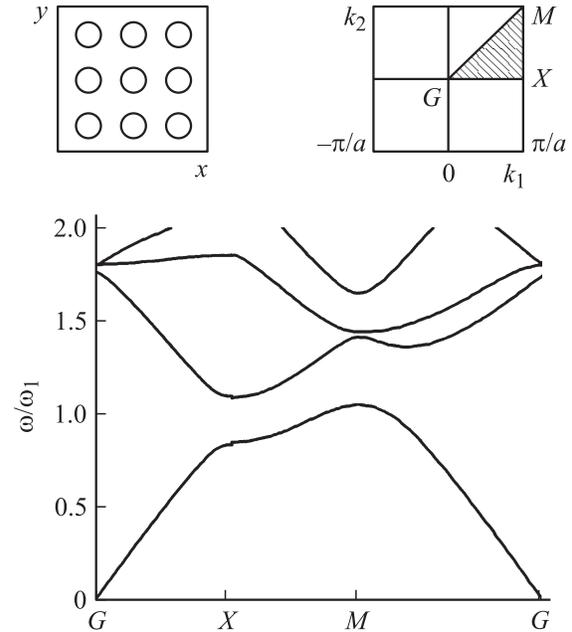


Рис. 1. Зонная структура квадратной решетки диэлектрических цилиндров в вакууме для волн s -поляризации. Вставки показывают квадратную решетку и соответствующую зону Бриллюэна; неприводимая зона заштрихована. Количество плоских волн в разложении $M = 121$, $f = 24\%$.

$\gamma = 5 \cdot 10^{-7} \omega_1$, $\omega_p^2 = 7 \cdot 10^{-8} \omega_1^2$, где $\omega_1 = \pi c n_1 / a$ — характерная частота ФЗЗ, $n_1 = \sqrt{\epsilon_1} f + (1 - f)$ — усредненный показатель преломления среды. Резонансу атомы ртути на длине волны $\lambda_0 = 253.7$ nm соответствует ширина линии $\gamma = 1.2$ GHz.

На рис. 1 представлена затравочная зонная структура ФК с диэлектрическими проницаемостями соответственно диэлектрических цилиндров и вакуума $\epsilon_1 = 3.24$ и $\epsilon_2 = 1$. При факторе заполнения $f = 24\%$ ФК обладает максимальной шириной первой полной запрещенной зоны. В этом случае в направлении X зоны Бриллюэна ФЗЗ располагается в частотном диапазоне ω/ω_1 от 0.843 до 1.084.

Сочетание дисперсии ФК-структуры с дисперсией газа (1) приводит к появлению дополнительных запрещенных зон в сплошном спектре затравочного ФК и дополнительных узких полос пропускания в запрещенной зоне ФК, которые незаметны в масштабе рис. 1. Эти эффекты иллюстрируются рис. 2. Из рис. 2, *a* видно, что в представленном фрагменте спектра появляется дополнительная запрещенная зона с шириной $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, на порядок превышающей ширину резонансной линии γ , если резонансная частота газа $\omega_0 = 1.089\omega_1$ лежит в

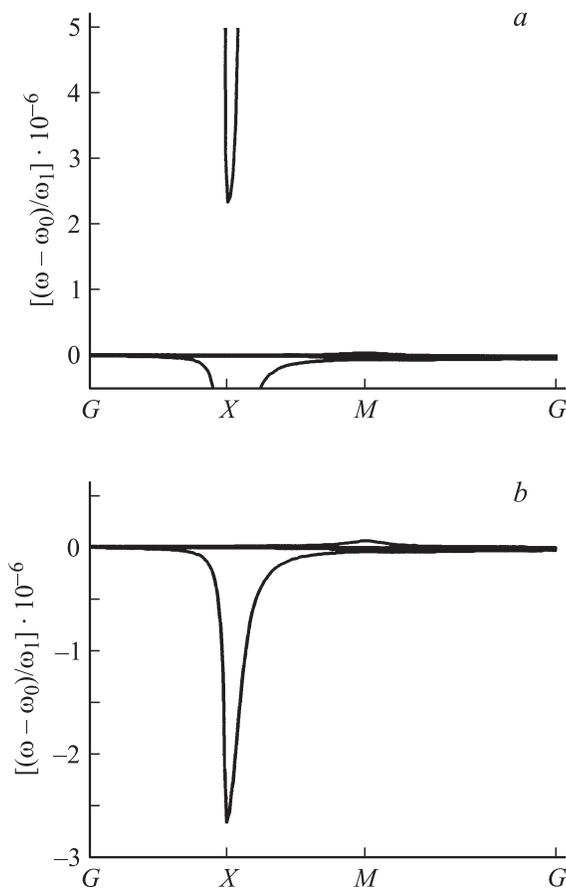


Рис. 2. Фрагмент зонной структуры, соответствующий рис. 1. *a* — резонансная частота на краю сплошного спектра $\omega_0/\omega_1 = 1.089$; *b* — резонансная частота в запрещенной зоне $\omega_0/\omega_1 = 1.079$, плотность резонансных атомов $4 \cdot 10^{14}$ cm^{-3} . Остальные параметры те же, что для рис. 1.

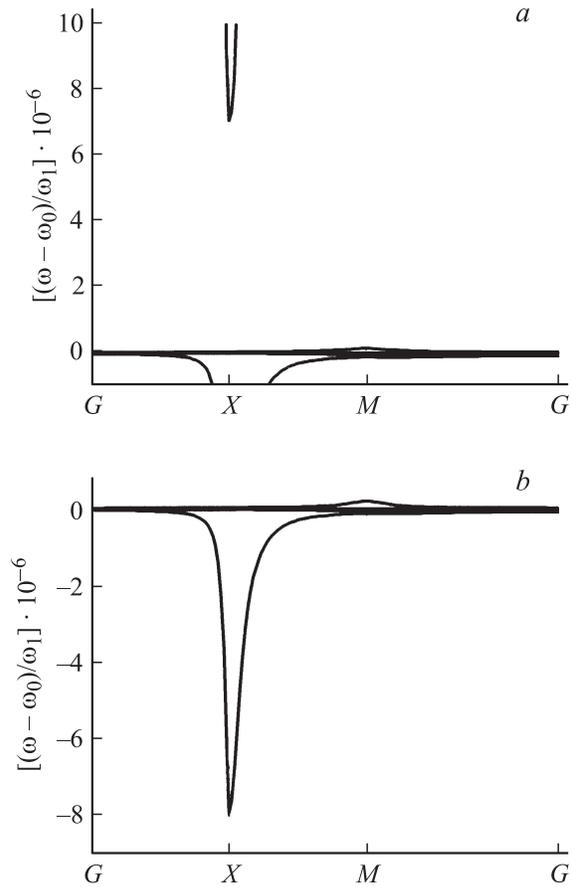


Рис. 3. Фрагмент зонной структуры. Плотность резонансных атомов $1.2 \cdot 10^{15}$ cm^{-3} , $\gamma = 1.5 \cdot 10^{-6} \omega_1$, остальные параметры те же, что для рис. 2. ω_0/ω_1 : *a* — 1.089, *b* — 1.079.

сплошном спектре вблизи высокочастотной границы первой запрещенной зоны.

Иная ситуация реализуется, если резонансная частота $\omega_0 = 1.079\omega_1$ лежит в запрещенной зоне ФК (рис. 2, *b*). В этом случае в запрещенной зоне появляется узкая полоса пропускания с шириной, превышающей на порядок ширину резонансной линии γ .

Шириной дополнительных полосы пропускания и запрещенной зоны можно управлять путем изменения давления газа. Например, при увеличении в 3 раза плотности резонансного газа затухание γ также увеличивается в 3 раза в случае ударного механизма уширения. При этом, как видно из сравнения рис. 2 и 3, ширина дополнительной запрещенной зоны или полосы пропускания увеличивается в такое же число раз.

Перейдем к рассмотрению результатов расчетов для образца РФК типа *b*, элементами которого являются полые бесконечные цилиндрические отверстия, заполненные резонансным газом и образующие квадратную решетку в диэлектрической матрице. На рис. 4 приведена затравочная зонная структура для образца ФК типа *b* с параметрами $\omega_2 = \pi c n_2 / a$, где $n_2 = f + \sqrt{\epsilon_1} (1 - f)$, $\epsilon_2 = 1$, $\epsilon_1 = 3.24$. При факторе заполнения $f = 79.5\%$ такой ФК обладает максимальной шириной полной за-

прещенной зоны. В этом случае в направлении X зоны Бриллюэна ФЗЗ располагается в частотном диапазоне ω/ω_2 от 0.854 до 1.076. Из сравнения рис. 4 и 1 видно, что структуры спектров затравочных ФК обоих типов подобны, что, очевидно, обусловлено близостью их коэффициентов заполнения диэлектриком.

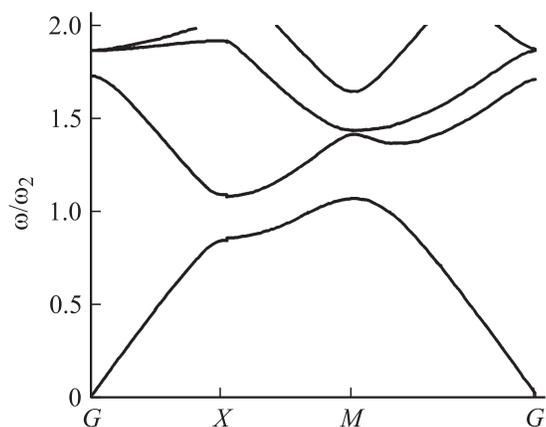


Рис. 4. Зонная структура квадратной решетки полых диэлектрических цилиндров в диэлектрической матрице для волн s -поляризации. $M = 121$, $f = 79.5\%$.

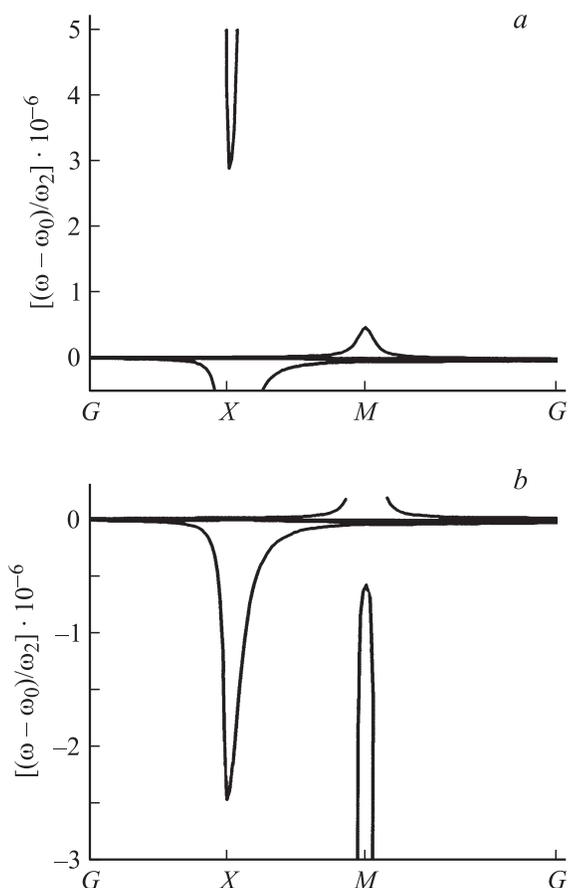


Рис. 5. Фрагмент зонной структуры, соответствующей рис. 4, при различных соотношениях резонансной частоты и параметров ФК-структуры. ω_0/ω_2 : $a - 1.081$, $b - 1.071$.

На рис. 5 показаны изменения дисперсионных свойств рассматриваемого РФК за счет резонансной дисперсии газа, описываемой выражением (1). Особенностью структуры спектра является появление дополнительных полос пропускания и запрещенной зоны соответственно в точках X и M зоны Бриллюэна (рис. 5, a). Таким образом, дисперсионные свойства РФК зависят от направления распространения электромагнитных волн. Отметим также, что ширина дополнительной полосы пропускания или запрещенной зоны возрастает, если при изменении параметров структуры резонансная частота приближается к границе запрещенной зоны.

4. Заключение

С помощью метода плоских волн изучена фотонная зонная структура для электромагнитных волн s -поляризации, распространяющихся в системе, состоящей из бесконечных диэлектрических цилиндров, образующих квадратную решетку, заполненную резонансным газом. Проведен также расчет зонной структуры для волн s -поляризации, распространяющихся в резонансном фотонном кристалле, состоящем из бесконечных цилиндрических отверстий, заполненных резонансным газом и образующих квадратную решетку в диэлектрической матрице. Показано, что комбинация дисперсии рассмотренных затравочных двумерных ФК-структур с дисперсией резонансного газа приводит к качественному изменению зонной структуры спектра собственных электромагнитных возбуждений резонансных фотонных кристаллов, появляются дополнительные запрещенные зоны в сплошном спектре кристалла, а также полосы прозрачности в фотонной запрещенной зоне. Ввиду того что полоса пропускания возникает в запрещенной зоне, в которой излучение распространяться не может, можно достичь высоких значений контраста фильтрации оптического излучения.

В практических приложениях такие РФК могут быть перспективны при создании узкополосных фильтров, спектральных призм с увеличенной дисперсией, для построения новых типов оптических устройств.

Список литературы

- [1] J.D. Joannopoulos, R.D. Meade, J.N. Winn. Photonic crystals. Princeton University Press, Princeton (1995). 137 p.
- [2] А. Ярив, П. Юх. Оптические волны в кристаллах. Мир, М. (1986). 616 с. [A. Yariv, P. Yeh. Optical waves in crystals: propagation and control of laser radiation. Wiley, N.Y. (1984).]
- [3] В.Ф. Шабанов, С.Я. Ветров, А.В. Шабанов. Оптика реальных фотонных кристаллов: жидкокристаллические дефекты, неоднородности. Изд-во СО РАН, Новосибирск (2005). 240 с.
- [4] А.М. Желтиков. УФН **170**, *11*, 1203 (2000).
- [5] O. Painter, R.K. Lee, A. Schezer, A. Yariv, J.D. O'Brien, P.D. Dapkus, I. Kim. Science **284**, 1819 (1999).
- [6] М.Г. Мартемьянов, Т.В. Долгова, А.А. Федянин. ЖЭТФ **125**, *3*, 527 (2004).

- [7] F. Wong, S.N. Zhu, K.F. Li, K.W. Cheah. *Appl. Phys. Lett.* **88**, 071 102 (2006).
- [8] S.Ya. Vetrov, I.V. Timofeev, A.V. Shabanov. *Phys. Status Solidi (RRL)* **1**, 3, 92 (2007).
- [9] K. Busch, S. Lölkes, R.B. Wehrspohn, H. Föll. *Photonic crystals: advances in design, fabrication and characterization*. Wiley–VCH, Weinheim (2004). 354 p.
- [10] А.М. Желтиков, А.Н. Наумов, П. Баркер, Р.Б. Майлс. *Опт. и спектр.* **89**, 2, 309 (2000).
- [11] M. Artoni, G. La Rossa, F. Bassani. *Phys. Rev. E* **72**, 046 604 (2005).
- [12] С.Я. Ветров, И.В. Тимофеев, А.Ю. Кутукова. *Опт. и спектр.* **106**, 5, 840 (2009).
- [13] С.А. Ахманов, С.Ю. Никитин. *Физическая оптика*. МГУ, М. (1998). 655 с.
- [14] A.A. Maradudin, A.R. McGurn. *Phys. Rev. B* **48**, 17 576 (1993).
- [15] А.В. Беликов, М.В. Богданова, Ю.Е. Лозовик. *Мат. моделирование* **19**, 19 (2007).
- [16] Ю.Е. Лозовик, С.Л. Эйдерман. *ФТТ* **50**, 1994 (2008).